

文章编号: 1000-0887(2002) 02_01 19_09

拟协调元的位移函数及节点误差*

何东升, 唐立民

(大连理工大学 力学系, 大连 116023)

(本刊编委唐立民来稿)

摘要: 直接从拟协调元的应变关系式出发, 构造具有明确物理意义的幂级数形式的位移函数, 从而得出拟协调元的常应变和线性应变系数是唯一确定的, 它只能收敛到常应变的结论; 刚性位移项可采用多种构造方法, 不同的方法得出的节点参数与单元的本身的节点参数存在不同阶次的误差, 这与常规位移法有限元不同。

关键词: 拟协调元; 位移函数; 误差分析; 有限元法; 九参三角形板元
中图分类号: O302 文献标识码: A

引 言

有限元大多是采用位移法建立的, 其作法是假定单元位移场, 通过最小势能原理建立有限元列式, 只要单元位移场满足完备性和协调性要求, 建立的有限元就是收敛的。对于 C_0 问题的有限元, 满足二者是容易的, 但是对 C_1 问题, 满足完备和协调则比较困难, 如构造协调的三角形板元需要 21 参 5 次幂级数^[1], 其实这样做既不经济也不必要。为避开协调性要求, 卞学磺^[2] 通过假定单元应力场建立了杂交元, 唐立民等^{[3]、[4]} 通过假定单元应变场建立了拟协调元, 它们本身并未假设位移函数, 但具有良好的计算精度。事实上它们都对应对着某种变分原理, 同时数学上也证明了拟协调元是收敛的^[5]。

拟协调元提出后, 得到了一些关注。由于拟协调元是直接假定单元应变场而不是通常的单元位移场建立的, 即拟协调元没有给出单元位移场就建立了拟协调元列式。但建立拟协调元的前提又是单元间位移弱连续条件即拟协调条件, 同时位移法是构造有限元最直接、应用最广泛、最简单的方法, 而单元位移函数也是人们分析有限元的基础, 这自然引起人们研究拟协调元是否对应某种位移函数, 如果是, 那位移函数到底是什么样子? 文[6] 提出一种拟协调元的位移函数, 后来文[7] 证明它就是 BCIZ[8] 的位移函数, 因为拟协调元对任意网格是收敛的, 而 BCIZ 只对部分规则网格收敛, 可见它并不是拟协调元的位移函数。文[9] 也提出一种位移函数, 因第 10 个自由度 d_{10} 有多种选法, 且自由度选取方式与拟协调元也不同(另文叙述), 只是在精度上都收敛到常应变, 在构造上不是真正的拟协调元。我们认为确实可以找到拟协调元的位移函数, 通过这个位移函数, 同样可以构造出相应于最小势能原理的拟协调元, 从而为拟协调元找到一种采用位移函数的构造方法, 因其位移函数十分复杂, 其计算结果又与原拟协

* 收稿日期: 2000_12_25; 修订日期: 2001_10_09

作者简介: 何东升(1964—), 男, 四川岳池人, 讲师, 博士。

调元构造法一致,所以在实际使用时仍按原来的方法构造拟协调元。

1 薄板弯曲方程弱形式及弱连续条件下的最小势能原理

薄板弯曲的弹性力学平衡方程为:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0, \quad (1)$$

q 为分布力。上式要求微分方程在整个区域内逐点成立,把它写成弱形式:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q \right] V d\Omega = 0, \quad (2)$$

式中 V 为检验函数。它可以是离散的局部函数系列,也可以是连续的级数系列,它必须是完备的,即它的线性组合可以逼近域内的任何解,以保证当序列趋于无穷时, (1) 式在域内逐点成立。

对上式各项进行分步积分再利用格林公式,并利用

$$\begin{cases} Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, & Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, & Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y, \\ M_{nx} = M_{xx} n_x + M_{xy} n_y, & M_{ny} = M_{yy} n_y + M_{xy} n_x, \\ M_{nn} = M_{nx} n_x + M_{ny} n_y, & M_{ns} = -M_{nx} n_y + M_{ny} n_x, \end{cases} \quad (3)$$

则有:

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \left[M_{xx} \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + M_{yy} \frac{\partial V^2}{\partial y^2} \right] d\Omega + \\ & \oint_{\Gamma} \left[M_{nn} \frac{\partial V}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial V}{\partial s} \right] ds - \oint_{\Gamma} Q_n V ds - \iint_{\Omega} q V d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

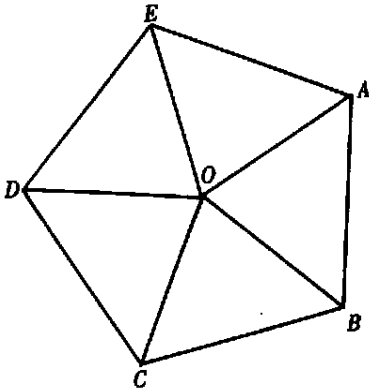


图1 检验函数的作用子域

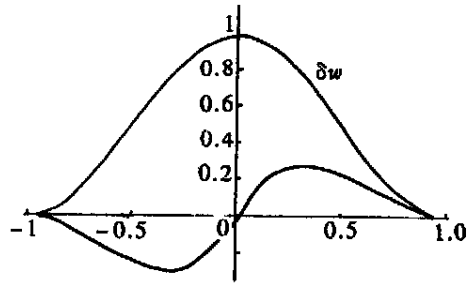


图2 一维 C_1 连续梁的检验函数

上式就是板关于内点 O 的平衡方程的弱形式。现设 $V = \delta w$ 意味着检验函数 V 就是位移函数,从而进行有限元的变分计算。 δw 是 w 的一个基底时,图1中 $ABCDE$ 就是整个区域内的一个 δw 作用的子域。如果在边界 $ABCDE$ 上逐点满足 $w = 0, \partial w / \partial n = 0$ (逐点 $w = 0$ 隐含 $\partial w / \partial s = 0$), 则(4)式的线积分项为零,这就是经典的最小势能原理^[10], 或者说是位移逐点连续条件下的最小势能原理。在一维的情况时更容易说明这一点,图2是梁单元的检验函数。在子域 $[-1, 1]$ 内,在内点 0 处的检验函数值为 1 、函数的一阶导数值为 1 ; 在子域的边界 $-1, 1$ 处,检验函数及其导数为零,因而检验函数是 C_1 连续的,即保证了单元之间位移和一阶导数逐

点连续, 它可以逼近整个域内的任意一阶可微的曲线。相对于薄板来说就是位移及其法向导数连续, 满足了协调条件, 就可按最小势能原理直接构造有限元列式, 构成所谓的协调元:

$$- \iint_{\Omega} \left(M_{xx} \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + M_{yy} \frac{\partial V^2}{\partial y^2} \right) d\Omega = \iint_{\Omega} qV d\Omega \quad (5)$$

对任意一个内点 O , 要求检验函数在边界上逐点满足 $w = 0, \partial w / \partial n = 0$, 正如前所述, 这对一维问题的梁来说是容易满足的, 但对二维问题的板来说却十分困难。但我们可以以分片试验^[8]的要求进一步放宽(4)式, 分片试验要求当单元给定常应力所对应的单元函数时, 至少包含一个内部节点的(5)式精确成立。对薄板弯曲, 常应力就是常弯矩, 所对应的位移函数为全二次多项式。这时(4)式线积分中的弯矩项为常数, 剪力为零。

$$\oint_{\Gamma} M_{nn} \frac{\partial V}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^3 M_{mC} \frac{\partial V}{\partial n} l_i, \quad (6a)$$

$$\oint_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial V}{\partial s} ds = M_{nC} \oint_{\Gamma} \frac{\partial V}{\partial s} ds = \sum_{i=1}^3 M_{nsCi} (V_k - V_j), \quad (6b)$$

$$\oint_{\Gamma} Q_n V ds = 0 \quad (6c)$$

满足分片试验只需要满足

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0, \quad \oint_{\Gamma} \frac{\partial V}{\partial s} ds = 0 \quad (7)$$

数学界对分片试验有所批评^[11], 但计算力学实践证明它仍是检验非协调元收敛的有效手段^{[12]~[16]}, 同时数学界也提出了自己的分片试验方法^{[17]、[18]}, [17]条件很弱但应用起来比较麻烦; [18]比较直观, 用起来比较简单即 F_{E_M} Test, 其中强 $F_1 F_2$ 条件就是弱协调条件:

$$\int [w] ds = 0, \quad \int \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] ds = 0, \quad \int \left[\frac{\partial w}{\partial s} \right] ds = 0, \quad (8)$$

式中 $[\cdot]$ 表示在单元边界的跳跃值, 当单元顶点位移连续时, (8)最后一式成立, 并且:

$$\left| \int [w] ds \right| \leq ch^2 |w|_{2, K_1 \cup K_2}$$

满足 F_1 条件, 即只需满足下式仍可保证收敛:

$$\int \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] ds = 0, \quad \int \left[\frac{\partial w}{\partial s} \right] ds = 0 \quad (9)$$

事实上这就是(7)式, 所以只要(7)成立, 式(4)就当作(5)使用, 我们仍可按最小势能原理构造有限元, 它意味着单元边界之间是弱连续的, 即

$$\int \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^+ ds = \int \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^- ds, \quad \int \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^+ ds = \int \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^- ds \quad (10)$$

在条件(10)下的(5)式就是弱连续条件下的最小势能原理。这种积分协调条件是相对逐点协调的弱协调条件, 它比拟协调条件更弱, 而拟协调条件要求:

$$\int w^+ ds = \int w^- ds, \quad \int \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^+ ds = \int \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^- ds, \quad \int \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^+ ds = \int \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^- ds \quad (11)$$

为保证拟协调条件, 拟协调元不是假定单元内位移场而是假设单元边界位移函数来满足拟协调条件的。对九参三角形板元, 每点3个参数: w, w_x, w_y , 对任一边可以确定各边在顶点的法向导数和切向导数, 因此对边上的函数可构造一个两点 Hermite 三次多项式、法向导数的两点线性多项式^{[3]、[4]}:

$$w_{13} = L_1^2(1 + 2L_2)w_1 + l_3 L_1^2 L_2 \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_1 + L_2^2(1 + 2L_1)w_2 - l_3 L_1 L_2^2 \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_2, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{l_3} = \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_1 L_1 + \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_2 L_2 \quad (13)$$

以下以九参拟协调板元为例构造其位移函数。

2 拟协调元的位移函数

上面从平衡方程的弱形式得出了弱协调条件,下面再从协调方程的弱形式来构造拟协调元的位移函数。协调方程的弱形式为:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(k_x - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) p_1 dx dy &= 0, \\ \iint_{\Omega} \left(k_y - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) p_2 dx dy &= 0, \\ \iint_{\Omega} \left(k_{xy} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) p_3 dx dy &= 0, \end{aligned}$$

式中 k 为薄板曲率。令 $p_i = 1, x, y$ 就得到了拟协调元的推导公式。对九参拟协调板元,假定应变函数是线性的,因而其位移函数是 3 次的,不失一般性,假定拟协调元的位移函数为 Taylor 公式中全三次项,为描述方便,设三角形重心坐标为 $O(0, 0)$, 关于 O 点的二元 Taylor 展开式为:

$$\begin{aligned} W = & W_0 + W_{x0}x + W_{y0}y + W_{xx0} \frac{x^2}{2!} + 2W_{xy0} \frac{xy}{2!} + W_{yy0} \frac{y^2}{2!} + W_{xxx0} \frac{x^3}{3!} + \\ & 3W_{xxy0} \frac{x^2y}{3!} + 3W_{xyy0} \frac{xy^2}{3!} + W_{yyy0} \frac{y^3}{3!} + o(h^3). \end{aligned} \quad (14a)$$

相应的位移函数可表示为:

$$\begin{aligned} W = & C_1 + C_2x + C_3y + \frac{C_4}{2}x^2 + C_5xy + \frac{C_6}{2}y^2 + \frac{C_7}{6}x^3 + \\ & \frac{C_8}{2}x^2y + \frac{C_9}{2}xy^2 + \frac{C_{10}}{6}y^3, \end{aligned} \quad (14b)$$

式中: $C_1 \sim C_{10}$ 为系数。对照 Taylor 式,系数的物理意义十分明确。

相应的应变为:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C_4 + C_7x + C_8y, \quad (15a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = C_6 + C_9x + C_{10}y, \quad (15b)$$

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial xy} = 2C_5 + 2C_8x + 2C_9y. \quad (15c)$$

拟协调元就是从 (15) 式出发求出 $C_4 \sim C_{10}$ 的,所以单元函数的系数 $C_4 \sim C_{10}$ 其实已由拟协调元确定,只是表现形式不同。这里 C_8, C_9 出现两次,很容易得出只有 7 个系数是独立的⁽³⁾。 C_8, C_9 由拟协调元方式离散格式不同,但逼近的是同一个值。

2.1 常应变项系数

式 (15) 中常应变项对应的系数为 $C_4, C_6, 2C_5$, 以下按拟协调元的作法先求常应变。对 (15a) 式面积分:

$$\iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy = \iint_A (C_4 + C_7x + C_8y) dx dy. \quad (16)$$

对重心的面积分有:

$$\iint_A dx dy = A, \quad \iint_A C_7 x dx dy = 0, \quad \iint_A C_8 y dx dy = 0,$$

所以 $C_4 = \frac{1}{A} \iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy$.

应用分步积分及格林公式:

$$C_4 = \frac{1}{A} \iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy = \frac{1}{A} \oint_{\partial\Omega} n_x^2 \frac{\partial w}{\partial n} ds - \frac{1}{A} \oint_{\partial\Omega} n_x n_y dw, \quad (17)$$

式中围线积分 $\oint_{\partial\Omega}$ 为绕三角形3边一周, 这时各边沿 x 、 y 方向的方向导数 n_x 、 n_y 均为常数, 假设位移沿边上的法向导数为线性分布:

$$\int_1 \frac{\partial w}{\partial n} ds \approx \frac{l_1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_2 + \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_3 \right] + o(h^3). \quad (18)$$

略去高阶小量, 展开:

$$C_4 = \left[-\frac{n_{x2}n_{y2} + n_{x3}n_{y3}}{A}, -\frac{n_{x3}^2b_3 + n_{x2}^2b_2}{2A}, -\frac{n_{x3}^2c_3 + n_{x2}^2c_2}{2A}, \dots \right] \{ \mathbf{q} \}, \quad (19)$$

下标 1、2、3 循环, $b_1 = y_2 - y_3$, $c_1 = x_3 - x_2$, A 为三角形单元面积.

$$\{ \mathbf{q} \} = [w_1, w_{x1}, w_{y1}, w_2, w_{x2}, w_{y2}, w_3, w_{x3}, w_{y3}]^T,$$

下标是字母时为对该方向求导, 是数字时为节点号, 以下同. 同理可得 C_5 、 C_6 :

$$C_5 = \left[\frac{n_{x2}^2 - n_{y2}^2 - n_{x3}^2 + n_{y3}^2}{A}, -\frac{n_{x3}^2c_3 - n_{x2}^2c_2}{A}, \right. \\ \left. -\frac{n_{y3}^2b_3 - n_{y2}^2b_2}{A}, \dots \right] \{ \mathbf{q} \}, \quad (20)$$

$$C_6 = \left[\frac{n_{x2}n_{y2} - n_{x3}n_{y3}}{A}, -\frac{n_{y3}^2b_3 + n_{y2}^2b_2}{2A}, -\frac{n_{y3}^2c_3 + n_{y2}^2c_2}{2A}, \dots \right] \{ \mathbf{q} \}. \quad (21)$$

导出常应变项时使用了式(18), 将(18)代入(17)还可得到 C_4 的误差为 $o(h^1)$, 同样 C_5 、 C_6 的误差也为 $o(h^1)$.

2.2 线性应变项系数

对(15a)第一式乘 x 、 y 再对面积分:

$$\iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x dx dy = \iint_A (C_4 x + C_7 x^2 + C_8 xy) dx dy, \quad (22a)$$

$$\iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} y dx dy = \iint_A (C_4 y + C_7 xy + C_8 y^2) dx dy, \quad (22b)$$

$$\iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} x dx dy = \oint_{\partial\Omega} (w_{nx} n_x^2 - w_{xn} n_x n_y - w_{nx}) ds = \\ C_7 \iint_A x^2 dx dy + C_8 \iint_A xy dx dy, \quad (23a)$$

$$\iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} y dx dy = \oint_{\partial\Omega} (w_{ny} n_x^2 - w_{yn} n_x n_y) ds = \\ C_7 \iint_A xy dx dy + C_8 \iint_A y^2 dx dy. \quad (23b)$$

(23) 式中间线积分项中用到:

$$\int_3 w_{nx} ds = \frac{l_3^2}{6} (2w_{n2}x_2 + w_{n1}x_2 + 2w_{n1}x_1 + w_{n2}x_1) + o(h^4), \quad (24)$$

$$\int_3 w_{ny} ds = \frac{l_3^2}{6} (2w_{n2y2} + w_{n1y2} + 2w_{n1y1} + w_{n2y1}) + o(h^4), \quad (25)$$

$$\int_1 w_{xd} ds = \sum_1^3 ux |_{-}^{+} - \oint_{\partial \Omega} n_y w ds, \quad (26)$$

$$\int_1 w_{yd} ds = \sum_1^3 wy |_{-}^{+} - \oint_{\partial \Omega} n_x w ds, \quad (27)$$

$$\int_1 w ds = l_1 \left[\frac{1}{2} w_2 + \frac{1}{12} w_{x2} c_1 - \frac{1}{12} w_{y2} b_1 + \frac{1}{2} w_3 - \frac{1}{12} w_{x3} c_1 + \frac{1}{12} w_{y3} b_1 \right] + o(h^5). \quad (28)$$

(23) 式右端 $\iint_A x^2 dx dy$ 、 $\iint_A y^2 dx dy$ 、 $\iint_A xy dx dy$ 即是三角形域在重心处的惯性矩和惯性积, 因而(23) 式是关于 C_7 、 C_8 的二元一次方程组, 略去高阶小量即可简单地求解:

$$C_7 = \left[A_1 \left[-n_x 2n_y 2x_1 + n_x 3n_y 3x_1 + \frac{1}{2}(n_y^2 + 1)b_2 + \frac{1}{2}(n_y^3 + 1)b_3 \right] + A_2 \left[-n_x 2n_y 2y_1 + n_x 3n_y 3y_1 - \frac{1}{2}n_x 2n_y b_2 - \frac{1}{2}n_x 3n_y b_3 \right], A_1 \left[\frac{1}{6}b_2^2 n_x 2(x_3 + 2x_1) - \frac{1}{12}(n_y^2 + 1)b_2 c_2 + \frac{1}{12}(n_y^3 + 1)b_3 c_3 + \frac{1}{6}b_3^2 n_x 3(x_2 + 2x_1) \right] - A_2 \left[\frac{1}{6}b_2^2 n_x 2(y_3 + 2y_1) + \frac{1}{12}b_2^2 n_y^2 - \frac{1}{12}b_3^2 n_y^3 + \frac{1}{6}b_3^2 n_x 3(y_2 + 2y_1) \right], A_1 \left[\frac{1}{6}b_2^2 n_y 2(x_3 + 2x_1) - \frac{1}{12}(n_y^2 + 1)b_2^2 + \frac{1}{12}(n_y^3 + 1)b_3^2 + \frac{1}{6}b_3^2 n_y 3(x_2 + 2x_1) \right] - A_2 \left[\frac{1}{6}b_2^2 n_y 2(y_3 + 2y_1) - \frac{1}{12}b_2^2 n_y 2n_x 2 + \frac{1}{12}b_3^2 n_y 3n_x 3 + \frac{1}{6}b_3^2 n_y 3(y_2 + 2y_1) \right], \dots \right] \{ \boldsymbol{q} \},$$

$$C_8 = \left[A_3 \left[n_x 2n_y 2x_1 - n_x 3n_y 3x_1 - \frac{1}{2}(n_y^2 + 1)b_2 + \frac{1}{2}(n_y^3 + 1)b_3 \right] + A_4 \left[-n_x 2n_y 2y_1 + n_x 3n_y 3y_1 - \frac{1}{2}n_x 2n_y b_2 - \frac{1}{2}n_x 3n_y b_3 \right], A_3 \left[\frac{1}{6}b_2^2 n_x 2(x_3 + 2x_1) - \frac{1}{12}(n_y^2 + 1)b_2 c_2 + \frac{1}{12}(n_y^3 + 1)b_3 c_3 + \frac{1}{6}b_3^2 n_x 3(x_2 + 2x_1) \right] + A_4 \left[\frac{1}{6}b_2^2 n_x 2(y_3 + 2y_1) + \frac{1}{12}b_2^2 n_y^2 - \frac{1}{12}b_3^2 n_y^3 + \frac{1}{6}b_3^2 n_x 3(y_2 + 2y_1) \right], -A_3 \left[\frac{1}{6}b_2^2 n_y 2(x_3 + 2x_1) + \frac{1}{12}(n_y^2 + 1)b_2^2 - \frac{1}{12}(n_y^3 + 1)b_3^2 + \frac{1}{6}b_3^2 n_y 3(x_2 + 2x_1) \right] - A_4 \left[\frac{1}{6}b_2^2 n_y 2(y_3 + 2y_1) - \frac{1}{12}b_2^2 n_y 2n_x 2 + \frac{1}{12}b_3^2 n_y 3n_x 3 + \frac{1}{6}b_3^2 n_y 3(y_2 + 2y_1) \right], \dots \right] \{ \boldsymbol{q} \}.$$

同理:

$$C_9 = \left[A_1 \left[n_x 2n_y 2x_1 - n_x 3n_y 3x_1 - \frac{1}{2}n_y^2 b_2 - \frac{1}{2}n_y^3 b_3 \right] + A_2 \left[-n_x 2n_y 2y_1 + n_x 3n_y 3y_1 - \frac{1}{2}n_x 2n_y b_2 - \frac{1}{2}n_x 3n_y b_3 \right], A_1 \left[\frac{1}{6}c_2^2 n_x 2(x_3 + 2x_1) + \frac{1}{12}n_x 2n_y 2c_2^2 - \frac{1}{12}n_x 3n_y 3c_3^2 + \frac{1}{6}c_3^2 n_x 3(x_2 + 2x_1) \right] + A_2 \left[-\frac{1}{6}c_2^2 n_x 2(y_3 + 2y_1) + \frac{1}{12}c_2^2 n_x 2 - \frac{1}{12}c_3^2 n_x 3 - \frac{1}{6}c_3^2 n_x 3(y_2 + 2y_1) \right],$$

$$\begin{aligned}
& A_1 \left\{ \frac{1}{6} c_2^2 n_{y2} (x_3 + 2x_1) - \frac{1}{12} n_{x2}^2 c_2^2 + \frac{1}{12} n_{x3}^2 c_3^2 + \frac{1}{6} c_3^2 n_{y3} (x_2 + 2x_1) \right\} + \\
& A_2 \left\{ -\frac{1}{6} c_2^2 n_{y2} (y_3 + 2y_1) - \frac{1}{12} b_2^2 n_{y2} n_{x2} + \frac{1}{12} b_3^2 n_{y3} n_{x3} - \frac{1}{6} c_3^2 n_{y3} (y_2 + 2y_1) \right\}, \dots \left\{ \mathbf{q} \right\}, \\
C_{10} = & \left[A_3 \left\{ -n_{x2} n_{y2} x_1 + n_{x3} n_{y3} x_1 + \frac{1}{2} n_{y2} n_{y2} c_2 + \frac{1}{2} n_{x3} n_{y3} c_3 \right\} + \right. \\
& A_4 \left\{ n_{x2} n_{y2} y_1 - n_{x3} n_{y3} y_1 + \frac{1}{2} n_{x2}^2 c_2 + \frac{1}{2} n_{x3}^2 c_3 \right\}, \\
& A_3 \left\{ -\frac{1}{6} c_2^2 n_{x2} (x_3 + 2x_1) - \frac{1}{12} n_{x2} n_{y2} c_2^2 + \frac{1}{12} n_{x3} n_{y3} c_3^2 - \frac{1}{6} c_3^2 n_{x3} (x_2 + 2x_1) \right\} - \\
& A_4 \left\{ -\frac{1}{6} c_2^2 n_{x2} (y_3 + 2y_1) + \frac{1}{12} b_2^2 n_{y2}^2 - \frac{1}{12} b_3^2 n_{y3}^2 + \frac{1}{6} c_3^2 n_{x3} (y_2 + 2y_1) \right\}, \\
& A_3 \left\{ -\frac{1}{6} c_2^2 n_{y2} (x_3 + 2x_1) + \frac{1}{12} n_{x2}^2 c_3^2 - \frac{1}{12} n_{y3}^2 b_3^2 - \frac{1}{6} c_3^2 n_{y3} (x_2 + 2x_1) \right\} - \\
& \left. A_4 \left\{ -\frac{1}{6} c_2^2 n_{y2} (y_3 + 2y_1) - \frac{1}{12} b_2^2 n_{y2} n_{x2} + \frac{1}{12} b_3^2 n_{y3} n_{x3} - \frac{1}{6} c_3^2 n_{y3} (y_2 + 2y_1) \right\}, \dots \right] \left\{ \mathbf{q} \right\}.
\end{aligned}$$

在计算 $C_7 \sim C_{10}$ 时, 采用了式(24)、(25), 它们都具有4阶小量, 而三角形的惯性矩和惯性积也具有4次量纲, 这样 $C_7 \sim C_{10}$ 具有 $o(h^0)$ 阶近似, 它不能收敛于线性应变, 但它们与一次项的乘积也具有 $o(h^1)$ 级, 因而整个应变的截断误差为 $o(h^1)$, 这与拟协调元的结论一致³⁾.

3 刚性位移项及其节点误差

由于拟协调元的推导只是利用了单元边界的弱连续条件, 以上求出拟协调元位移函数的全部二次项(常应变项)和三次项(线性应变项)都是在边上进行离散得到的, 或者只使用了边参数, 而要确定位移函数的前3项(刚性位移项)则必须利用节点参数. 有多种方法可以确定位移函数的刚性位移项, 例如:

3.1 由 $w_i (i = 1 \sim 3)$ 直接确定 C_1, C_2, C_3

把 $(x_i, y_i) i = 1 \sim 3$ 代入(14)式则得到一个三元一次方程组, 令

$$\Phi = \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 xy + \frac{C_6}{2} y^2 + \frac{C_7}{6} x^3 + \frac{C_8}{2} x^2 y + \frac{C_9}{2} xy^2 + \frac{C_{10}}{6} y^3,$$

$$\text{则有 } \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{cases} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{cases} w_1 - \Phi_1 \\ w_2 - \Phi_2 \\ w_3 - \Phi_3 \end{cases}.$$

Φ_i 为 Φ 代入 1, 2, 3 点的值, 因为 $C_4 \sim C_6$ 具有一阶近似、 $C_7 \sim C_{10}$ 具有 0 阶近似, 则 Φ 具有 3 阶近似, 而 a_i 的量纲为 h^2 , b_i, c_i 的量纲为 h^1 , 则有误差:

$$C_1 = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i (w - \Phi)_i = \frac{o(h^2)}{o(h^2)} o(h^3) = o(h^3).$$

同理: C_2, C_3 具有误差 $o(h^2)$. 这样, 全部系数的误差:

$$C_1: o(h^3),$$

$$C_2, C_3: o(h^2),$$

$$C_4, C_5, C_6: o(h^1),$$

$$C_7, C_8, C_9, C_{10}: o(h^0).$$

节点误差:

把所求系数代入(14)式,可见 w_1, w_2, w_3 是精确满足的,但是 w_{xi}, w_{yi} 并不等于该点的节点处的参数值,而是具有2阶近似,这与用节点参数来确定单元位移函数的有限元不同,但与石钟慈教授关于拟协调元的结论是一样的^[9],以下我们还会得到其它结论·

3.2 由 w_i, w_{xi}, w_{yi} (i 分别为 1, 2, 3) 直接确定 C_1, C_2, C_3 (以 $i = 1$ 为例)

代入式(14)后得出 $C_1 \sim C_3$ · 其中 C_2, C_3 具有2阶小量误差,而 C_1 具有1阶小量误差· w_1, w_{x1}, w_{y1} 是准确满足的, w_2, w_3 具有3阶近似, $w_{x2}, w_{y2}, w_{x3}, w_{y3}$ 具有2阶近似,这又不同于文[9]的结论·

3.3 直接对式(14)求导确定 C_1, C_2, C_3

在重心对式(14)求导有: $C_2 = w_{x0}$ 求围线积分:

$$C_2 = \frac{1}{A} \iint_A w_{x0} dx dy = \frac{1}{A} \oint_{\partial \Omega} w dy, \quad \text{其误差: } C_2 = \frac{o(h^5)}{o(h^2)} = o(h^3) \cdot$$

$$C_3 = \frac{1}{A} \iint_A w_{y0} dx dy = -\frac{1}{A} \oint_{\partial \Omega} w dx, \quad \text{其误差: } C_3 = o(h^3) \cdot$$

C_1 则可代入1或2、3点的值确定· 这时 C_1 具有4阶精度,且代入点的位移是精确满足的,其它的位移都有4阶精度,而节点参数 w_{xi}, w_{yi} 具有3阶精度· 这里给出了 $C_1 \sim C_3$ 的物理意义: C_1 是单元重心处的位移, C_2, C_3 是单元函数在重心处对 x 轴、 y 轴的导数,即在重心处单元绕 x, y 方向的转动·

3.4 其它方法确定 C_1, C_2, C_3

除上述三种方法外,还有许多办法可以确定 $C_1 \sim C_3$, 如只代入 w_{xi} 或 w_{yi} 的值也可求得 $C_1 \sim C_3$ · 作为扩充,我们认为9个点参数中的任意3个均可能唯一确定3个刚性位移项,这样就有 C_3^3 种组合,这时所取的3个参数是可以精确满足的,而其它6个参数具有某种阶次的近似· 3.1、3.2 都是本扩充的特例· 无论怎样选取参数确定刚性位移项,都不影响 $C_4 \sim C_{10}$ 的变化,因而单元应变总是具有 $o(h^1)$ 阶近似,当单元趋于无穷小时,拟协调元收敛到真解·

4 结 论

得到位移函数后,我们可以按照常规有限元的方法构造有限元列式,即可直接采用(15)式构造单元刚度矩阵,因为(15)式也是构造拟协调元的应变函数^[3],所以二者的 B 阵是相同的,即刚度矩阵相同,也就是说它就是拟协调元的位移函数;我们还可以按常规有限元的方法通过分析单元位移来分析拟协调元;同时本文通过确定位移函数还得出结论:拟协调元的节点参数与单元本身的节点参数并不相等,而是存在某种误差(这与由节点确定单元位移函数的有限元不同),不同的确定刚性位移的方法所得到的位移函数和节点误差不同,正如第3.3节所述,因而拟协调元的位移函数并不是唯一的· 此外与采用形函数构造位移函数的常规的有限元相比,本位移函数采用幂级数形式具有明确的物理意义: C_1 表示刚体平移, C_2, C_3 表示刚体转动,它们对应变没有影响,也不影响单元刚度矩阵, $C_4, C_6, 2C_5$ 表示单元的常应变, $C_7 \sim C_{10}$ 表示线性应变· 同时我们方便地得到:因为 $C_4 \sim C_6$ 具有一阶精度,而 $C_7 \sim C_{10}$ 具有0阶精度,拟协调元只能收敛到常应变项,而不能收敛到线性应变·

[参 考 文 献]

[1] Argris J H, Fried I, Scharpf D W. The TUBA family of plate elements for the matrix displacement

- method[J]. The Aeronautical J R Ae S, 1968, **72**: 701—709.
- [2] Pian T H H. Deriation of element stiffness matrices by assumed stress distribution[J]. J AIAA, 1964, **2**(7): 1333—1335.
- [3] 唐立民、陈万吉、刘迎曦. 有限元分析中的拟协调元[J]. 大连工学院学报, 1980, **19**(2): 19—35.
- [4] 陈万吉、唐立民、刘迎曦. 拟协调元列式[J]. 大连工学院学报, 1980, **19**(2): 37—49.
- [5] 张鸿庆、王鸣. 多套函数有限元逼近与拟协调板元[J]. 应用数学和力学, 1985, **6**(1): 41—52.
- [6] 王鸣. 多套函数逼近与拟协调元方法[D]. 硕士论文. 大连: 大连理工大学, 1984.
- [7] 石钟慈. 关于九参拟协调板元[J]. 计算数学, 1988, **8**(1): 100—106.
- [8] Bazeley G P, Cheung Y K, Irons B M, et al. Triangular elements in bending conforming and non conforming solutions[A]. In: Proc 1st Conf on Matrix Methods in Struct Mech [C]. Ohio: Air Force Inst of Tech, Wright Patterson A F Base, 1965, 547—576.
- [9] 石钟慈、陈绍春. 九参拟协调元的直接分析[J]. 计算数学, 1990, **12**(1): 76—84.
- [10] 钱伟长. 变分法及有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [11] Stummel F. The limitations of the patch test[J]. Int J Num Meth Eng, 1980, **15**(1): 177—188.
- [12] Taylor R L, Simo J C, Zienkiewicz O C, et al. The patch test, a condition for assessing FEM convergence[J]. Int J Num Meth Eng, 1986, **22**(1): 39—62.
- [13] Razzaque A. The patch test for elements[J]. Int J Num Meth Eng, 1986, **22**(1): 63—72.
- [14] Zienkiewicz O C, Qu S, Taylor R L, et al. The patch test for mixed formulations[J]. Int J Num Meth Eng, 1986, **23**(10): 1873—1884.
- [15] Belytschk T, Lasry D. A fractal patch test[J]. Int J Num Meth Eng, 1988, **26**(10): 2199—2210.
- [16] Zhang W, Chen D P. The patch test conditions and some multivariable finite element formulations [J]. Int J Num Meth Eng, 1997, **40**(16): 3015—3032.
- [17] Stummel F. The generalized patch test[J]. SIAM J Numer Anal, 1979, **16**(3): 449—471.
- [18] SHI Zhong_ci. The FEM test for convergence of nonconforming finite elements[J]. Math Comput, 1987, **49**(3): 391—405.

The Displacement Function of Quasi_Conforming Element and Its Node Error

HE Dong_sheng, TANG Li_min

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

Abstract: Based on the strain formulation of the quasi_conforming finite element, displacement functions are constructed which have definite physical meaning, and a conclusion can be obtained that the coefficients of the constant and the linear strain are uniquely determined, and the quasi_conforming finite element method is convergent to constant strain. There are different methods for constructing the rigid displacement items, and different methods correspond to different order node errors, and this is different from ordinary displacement method finite element.

Key words: quasi_conforming element; displacement function; error analysis; finite element method; 9_parameter triangular plate element