应用数学和力学, 第 23 卷 第 3 期(2002 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 03_0309_07

半序空间中增算子的不动点及其应用*

杨光崇

(成都信息工程学院 计算科学系, 成都 610041)

(丁协平推荐)

摘要: 证明了半序空间中增算子的最小最大不动点定理, 推广和改进了增算子和混合单调算子的某些最近结果, 并应用于没有任何连续性紧性凹性凸性假定下非线性奇异常微分方程的边值问题•

关 键 词: 半序空间; 上确界和下确界; 增算子及不动点; 奇异边值问题
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

考察常微分方程边值问题

$$\ddot{x}+f(t,x(t))=0,\ a<t<b,\ \alpha x(a)-\beta\dot{x}(a)=0,\ \gamma x(b)+\delta\dot{x}(b)=0 \tag{1}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$, $\Delta=(b-a)\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma>0$• $f(t,s)$ 在 $t=a,b$ 可以是奇异的•

经直接验证可知: (1) 的解等价于求下面积分方程

$$x(t)=\int_a^b G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \tag{2}$$

在 $C[a,b]$ 的解• 这里

$$G(t,s)=\begin{cases}(\beta+\alpha t-\alpha a)(\delta+\gamma b-\gamma s)/\Delta & (a\leqslant t\leqslant s\leqslant b),\\(\beta+\alpha s-\alpha a)(\delta+\gamma b-\gamma t)/\Delta & (a\leqslant s<t\leqslant b)\end{cases} \tag{3}$$

参见文[1~2]•

对于形如(2)的方程, 传统的研究方法是要求下面积分方程定义的算子 A:

$$Ax=\int_a^b G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \tag{4}$$

具有连续性和紧性(可见文[3~4])• 由于连续性和紧性难于验证, 对 A 附加某种凹凸性和单调性条件下, 用上下解方法研究其解的存在性, 许多作者已做了很好的工作• (可见文[1,2,5,6,7,8])• 从以上作者的工作来看, 一般是在锥的某个等价类上研究问题(可见[1,2,5,6,7,8])•

若对 A 不附加任何连续性紧性和凹凸性条件, 则难于用目前的方法确定(1)的解•

本文通过对半序空间增算子不动点的研究, 推广和改进了增算子和混合单调算子的某些

* 收稿日期: 2001_01_20; 修订日期: 2001_08_20
作者简介: 杨光崇(1963—), 男, 四川古蔺人, 硕士, 副教授, 从事非线性泛函分析理论及应用研究, 已发表论文十多篇.

最近结果,获得方程(1)在没有任何连续性紧性凹凸性条件下的解,其假定弱于目前有关文献,在一定程度上容易满足和检验•

1 半序空间中增算子的不动点

定义 1 赋予偏序[9]的集合 X 称为半序空间•

设 X, Y 是一个半序空间, $u, v \in X$, $u \leqslant v$• 通常称 $[u, v] = \{x: u \leqslant x \leqslant v, x \in X\}$ 为 X 的序区间• 设 $A: D \subseteq X \to Y$, 如果 $x, y \in D$, $x \leqslant y$ 蕴含 $Ax \leqslant Ay$, 则称 A 为增算子• 满足 $Ax = x$ 的 x 称为 A 的不动点• $u \leqslant v$, $u \leqslant Au$, $Av \leqslant v$ 的 u, v 称为 A 的上下不动点(解)• 设 x_* 和 x^* 是 A 在 D 中的不动点, x_* 和 x^* 称为 A 在 D 的最小不动点和最大不动点, 指 A 在 D 中任意不动点 x, 满足 $x_* \leqslant x \leqslant x^*$•

设 $M \subseteq X$, $z \in X$ 称为 M 在 X 中的上确界(下确界), 如果 $x \in M$, 都有 $x \leqslant z\ (x \geqslant z)$• 对于其它 X 中的上界(下界) y, 都有 $z \leqslant y\ (z \geqslant y)$• M 的上(下)确界表示为 $\sup M \inf M$•

定理 1 设 X 为一个半序空间, $A: D = [u, v] \subseteq X \to X$ 为增算子, 满足

1) u 和 v 是 A 的上下不动点(解)•

2) 存在半序空间 Y 和增算子 $B: [u, v] \to Y$ 及增算子 $C: [Bu, Bv] \to X$, 使 $A = CB$•

3) $B([u, v])$ 中的每一全序集在 Y 中有上确界和下确界•

则 A 在 $[u, v]$ 中具有最小不动点和最大不动点•

证明 由 A 为增算子及 1) 知: $A([u, v]) \subseteq [u, v]$• 记 $\Omega = \{[u, x], A([u, v]) \subseteq [u, x], x \in D\}$• 由 $D = [u, v] \in \Omega$, 知 $\Omega \neq \varnothing$(空集)• 又记 $M = \bigcap S\ (S \in \Omega)$, 因 $u \in M$, 故 M 非空, 且 $A(M) \subseteq M$•

令 $R = \{x \leqslant Ax: x \in M\}$, 因 $u \in R$, 故 R 非空• 对 R 中全序子集 $\{x_\alpha: \alpha \in I\}$, 由 B 的增性知: $\{Bx_\alpha: \alpha \in I\}$ 为 Y 中的全序子集• 根据假定 3), 记 $w = \sup\{Bx_\alpha: \alpha \in I\}$• 显然 $w \in [Bu, Bv]$• 令 $z = Cw$, 下证 z 为 $\{x_\alpha: \alpha \in I\}$ 在 R 中的上界• 事实上, 任意 $S = [u, x] \in \Omega$, 均有: $\{x_\alpha\} \subseteq M \subseteq S$, 从而 $x_\alpha \leqslant x\ (\alpha \in I)$• 故 $Bx_\alpha \leqslant Bx\ (\alpha \in I)$• 由 w 的最小性得出: $w \leqslant Bx$• 又 C 为增算子, 于是 $z = Cw \leqslant CBx = Ax \leqslant x$• S 的任意性已表明 $z \in M$• 注意到 $x_\alpha \leqslant Ax_\alpha = CBx_\alpha \leqslant Cw = z$, $Bx_\alpha \leqslant Bz$• w 具有最小性, 又有 $w \leqslant Bz$, 从而 $z = Cw \leqslant CBz = Az$• 这已表明 z 为 $\{x_\alpha: \alpha \in I\}$ 在 R 中的上界• 根据在 Zorn 引理, R 中有极大元 x_*, 满足 $x_* \leqslant Ax_*$• 由 A 的增性和 x_* 的极大性知 $x_* = Ax_*$•

类似地, 记 $G = \{[x, v]: A([x, v]) \subseteq [x, v], x \in D\}$• 由 $D = [u, v] \in G$, 知 $G \neq \varnothing$(空集)• 又记 $Q = \bigcap S\ (S \in G)$, 因 $v \in Q$, 故 Q 非空, 且 $A(Q) \subseteq Q$• 令 $K = \{x \geqslant Ax: x \in Q\}$, 由 $v \in K$, 故 K 非空• 对 K 中全序子集 $\{x_\alpha: \alpha \in I\}$, 仿上可证 $\{x_\alpha: \alpha \in I\}$ 在 K 中有下界• 根据 Zorn 引理: K 有极小元 x^*• 此极小元满足 $Ax^* = x^*$•

对 A 在 $[u, v]$ 中任意不动点 x, 由 $A([u, v]) \subseteq [u, x]$, $A([x, v]) \subseteq [x, v]$ 可知: $M \subseteq [u, x]$, $Q \subseteq [x, v]$• 从而 $x_* \leqslant x \leqslant x^*$• 定理证毕•

注 1 用定理 1 的方法可加强[9]中定理 6.2.4 的结论• 置 $\Omega = \{S: F(S) \subseteq S \subseteq X, b \in S, x \in S, x \geqslant b$• S 的全序子集的上确界在 S 中$\}$• 由 $D = \{x \geqslant b, x \in S\} \in \Omega$, 知 $\Omega \neq \varnothing$• $M = \bigcap S\ (S \in \Omega)$, $b \in M$, 则 M 非空, $F(M) \subseteq M$• 易知: F 在 M 中有不动点 x_* 且为 $\{x \geqslant b, x \in S\}$ 中的最小不动点•

推论 1 设 X 为一个半序空间, $D = [u, v] \subseteq X$, $H: [u, v] \times [u, v] \to X$ 的混合单调算子,

即 $x_1 \leqslant x_2, y_2 \leqslant y_1$, 蕴含 $H(x_1, y_1) \leqslant H(x_2, y_2)$. 满足:

1) $u \leqslant H(u, v), H(v, u) \leqslant v$.

2) 存在半序空间 Y 和混合单调算子 $F: [u, v] \times [u, v] \to Y$ 及增算子 $K: [F(u, v), F(v, u)] \to X$, 使得 $H = KF$.

3) $F([u, v] \times [u, v])$ 中的每一全序子集在 Y 中有上确界和下确界.

则 H 在 $[u, v]$ 中具有耦合不动点 x_* 和 y^* $(H(x_*, y^*) = x_*, H(y^*, x_*) = y^*)$, 使得对于 H 在 $[u, v]$ 中任意耦合不动点 x 和 y, 都有 $x_* \leqslant x \leqslant y^*, x_* \leqslant y \leqslant y^*$.

证明 在 $X \times X$ 和 $Y \times Y$ 中分别定义半序如下 $\leqslant$:

$$w_1 = (x_1, y_1) \leqslant w_2 = (x_2, y_2) \text{ 当且仅当 } x_1 \leqslant x_2, y_2 \leqslant y_1,$$

及算子

$$Aw = (H(x, y), H(y, x)), w = (x, y) \in [u, v] \times [u, v].$$

$$Bw = (F(x, y), F(y, x)), w = (x, y) \in [u, v] \times [u, v].$$

$$Cw = (Kx, Ky), w = (x, y) \in [F(u, v), F(v, u)] \times [F(u, v), F(v, u)].$$

由 1) – 2), 容易验证 $A: X \times X \to X \times X$, $B: X \times X \to Y \times Y$, $C: Y \times Y \to X \times X$ 均为增算子, 且 $A = CB$, $(u, v), (v, u)$ 为 A 的上下不动点. 根据 3) 知: $\{Bw: w = (x, y) \in [u, v] \times [u, v]\}$ 中的任意全序子集在 $Y \times Y$ 中有上确界和下确界. 根据定理 1, A 在 $[u, v] \times [u, v]$ 中具有最小不动点 $w_* = (x_*, y^*)$, 此不动点即为 H 在 $[u, v]$ 中的耦合不动点. 对 H 在 $[u, v]$ 中的耦合不动点 x 和 y, $(x, y), (y, x)$ 为 A 在 $[u, v] \times [u, v]$ 中的不动点. 由 (x_*, y^*) 的最小性: $x_* \leqslant x, y \leqslant y^*, x_* \leqslant y, x \leqslant y^*$. 故 $x_* \leqslant x \leqslant y^*, x_* \leqslant y \leqslant y^*$.

注 2 推论 1 改进和推广了文[10]的定理 2.

2 上确界和下确界存在定理

在这一节, 我们证明上确界和下确界的一个存在定理.

定义 2 设半序空间 X 具有拓扑, 拓扑和半序具有相容关系:

$$x_\alpha \leqslant y_\alpha, x_\alpha \to x, y_\alpha \to y, \text{ 则 } x \leqslant y. \tag{5}$$

则称 X 是半序拓扑空间. 对于半序拓扑空间 X 的全序子集 M, 如果存在至多可数子集 $\{x_n\} \subseteq M$ 在 M 中稠密, 则称 M 是拟可分的. 对于 M 的至多可数的子集 $\{x_n\}$, $\{x_n\}$ 中总存在相对紧子集 $\{x_{n_k}\}$, 则称 M 是拟紧的.

定理 2 若 M 是半序拓扑空间 X 的全序子集, 且相对紧(其闭包 $\mathrm{cl}(M)$ 是 X 中的紧集) 或是拟可分的拟紧集, 则 M 在 X 中具有上确界和下确界.

证明 a) 事实上, 当 M 相对紧时, 记 $M = \{x_\alpha: \alpha \in I\}$, $M_\alpha = \{x: x \geqslant x_\alpha, x \in M\}$. 容易验证: 对任意 $\alpha \in I$, $M_\alpha \neq \Phi$. 由 (5) 知: 任意 $x \in \mathrm{cl}(M_\alpha)$, $x \geqslant x_\alpha$, $\mathrm{cl}(M_\alpha) \subseteq \mathrm{cl}(M)$. 当 $x_\alpha \leqslant x_{\alpha_2}$, 有 $\mathrm{cl}(M_{\alpha_1}) \supseteq \mathrm{cl}(M_{\alpha_2})$. 为了证明 $\cap\, \mathrm{cl}(M_\alpha) \neq \Phi (\alpha \in I)$. 由 $\mathrm{cl}(M)$ 是紧集, 只需验证 $\{\mathrm{cl}(M_\alpha): \alpha \in I\}$ 具有有限交性质, 任取 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in I$, 由 $\{x_\alpha\}$ 的全序性, 可将 $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \cdots, x_{\alpha_n}$ 排序为 $x_{\alpha_{j_1}} \leqslant x_{\alpha_{j_2}} \leqslant \cdots \leqslant x_{\alpha_{j_n}}$ 从而 $\cap\, \mathrm{cl}(M_{\alpha_i}) = \cap\, \mathrm{cl}(M_{\alpha_{j_k}}) = \mathrm{cl}(M_{\alpha_{j_n}}) \neq f$. 故 $\cap\, \mathrm{cl}(M_\alpha) \neq \Phi (\alpha \in I)$. 取 $z = \cap\, \mathrm{cl}(M_\alpha) (\alpha \in I)$, 容易验证: z 为 M 的上界. 对其它上界 x, 显然有 $\mathrm{cl}(M_\alpha) \subseteq [x_\alpha, x] (\alpha \in I)$. 故 z 为 M 的上确界.

类似地, $Q_\alpha = \{x: x \leqslant x_\alpha, x \in M\}$. 容易验证: 对任意 $\alpha \in I$, $Q_\alpha \neq \Phi$, 任意 $x \in \mathrm{cl}(Q_\alpha)$, $x \leqslant x_\alpha$, $\mathrm{cl}(M)$, $x_{\alpha_1} \leqslant x_{\alpha_2}$, 有 $\mathrm{cl}(Q_{\alpha_1}) \subseteq \mathrm{cl}(Q_{\alpha_2})$, $\bigcap \mathrm{cl}(Q_\alpha) \neq \Phi(\alpha \in I)$. 取 $y \in \bigcap \mathrm{cl}(Q_\alpha)(\alpha \in I)$, 容易验证: y 为 M 的下界, 对 M 的任意下界 x, 显然有 $\mathrm{cl}(Q_\alpha) \subseteq [x, x_\alpha](\alpha \in I)$. 故 y 为 M 的下确界.

b) 对 $M = \{x_\alpha: \alpha \in I\}$ 是拟可分的拟紧集的情形. 因有至多可数集 $\{x_n\} \subseteq M$ 在 M 中稠密, 记 $y_n = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $z_n = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 中有相对紧子集 $\{y_{n_i}\}$ 和 $\{z_{n_j}\}$. 由 a) 的证明知: $\inf\{y_{n_i}\}$ 和 $\sup\{z_{n_j}\}$ 存在, 分别记 y 和 z. 由 (5) 及 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 的定义易知: $y \leqslant y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \leqslant z$. 对任意 x_α, 取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_x}\}$ 收敛于 x_α. 由 (5) 得到 $z \leqslant x_\alpha \leqslant y$. 定理 2 证毕.

注 3　结合定理 1、定理 2 和推论 1, 我们推广了文 [11] 中的定理 1 和 (改进) 定理 2, [10] 中的定理 3~4, 且可获得半序 Banach 空间中增算子和混合单调算子的若干不动点和耦合不动点定理. 限于篇幅, 从略.

3　对奇异边值问题的应用

为了较弱条件下确定求方程 (1) 的解, 我们先证明一个引理.

设 $x(t)$ 为定义在区间 I 上取有限值的实函数, 如果 $t_1, t_2 \in I$, $\lambda \in [0, 1]$, 都有 $x[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2] \leqslant \lambda x(t_1) + (1-\lambda)x(t_2)$, 则 $x(t)$ 称为凸函数. $x(t)$ 称为凹函数, 如果 $-x(t)$ 为凸函数. 若 $x(t)$ 为有限闭区间 $[a, b]$ 上的凸函数 (不一定连续), 任意 $t \in [a, b]$, 总有 $\lambda \in [0, 1]$, $t = \lambda a + (1-\lambda)b$,

$$x(t) \leqslant \lambda x(a) + (1-\lambda)x(b) \leqslant \max\{|x(a)|, |x(b)|\} = N.$$

记 $z = t - (a+b)/2$, 则 $t = (a+b)/2 + z$, $(a+b)/2 - z = a + b - t \in [a, b]$. 于是

$$x[(a+b)/2] = x[((a+b)/2 + z)/2 + ((a+b)/2 - z)/2] \leqslant$$
$$x[(a+b)/2 + z]/2 + x[(a+b)/2 - z]/2 \leqslant x(t)/2 + N/2.$$

故 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上有界. 可证 $x(t)$ 在 (a, b) 内连续 (类似于下面引理证明 $x(a+0)$, $x(b-0)$) 存在).

本节用 $C[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上所有实连续函数构成的空间, $P = \{x(t) \geqslant 0, x(t) \in C[a, b]\}$. 以 P 在 $C[a, b]$ 中引导半序: $x \leqslant y$ 当且仅当 $y(t) - x(t) \in P$, 则 $C[a, b]$ 成为半序空间.

引理　设 $\{x_\alpha(t): \alpha \in I\} \subseteq C[a, b]$ 为全序子集, 满足:

1) 对每一 $t \in [a, b]$, $\{x_\alpha(t)\}$ 有界; 2) 对每一个 $\alpha \in I$, $x_\alpha(t)$ 为 $[a, b]$ 上凸函数; 或 3) 对每一个 $\alpha \in I$, $x_\alpha(t)$ 为 $[a, b]$ 上凹函数.

则 $\{x_\alpha(t): \alpha \in I\}$ 在 $C[a, b]$ 中必有上确界 $z(t)$ 和下确界 $y(t)$.

证明　1) 当 $\{x_\alpha(t): \alpha \in I\}$ 为凸函数集时, 令

$p(t) = \sup\{x_\alpha(t): \alpha \in I\}$, $q(t) = \inf\{x_\alpha(t): \alpha \in I\}(t \in [a, b])$. 条件 1) 蕴含 $p(t)$, $q(t)$ 有定义. 易验证: $p(t)$ 为 $[a, b]$ 上的凸函数. 下证 $q(t)$ 为 $[a, b]$ 的凸函数.

设 $t_1, t_2 \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$. 由 2) 知: $x_\alpha(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leqslant \lambda x_\alpha(t_1) + (1-\lambda)x_\alpha(t_2)$. 对每一 $\alpha \in I$, $q(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leqslant \lambda x_\alpha(t_1) + (1-\lambda)x_\alpha(t_2)$.　　(6)

根据 $q(t)$ 的定义, 存在 $\alpha_n, \beta_n \in I$, 使得 $x_{\alpha_n}(t_1) \leqslant q(t_1) + 1/n$, $x_{\beta_n}(t_2) \leqslant q(t_2) + 1/n$. 记 z_n

$= \min\left\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \cdots, x_{\alpha_n}, x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \cdots, x_{\beta_n}\right\}$, 因 $\left\{x_\alpha(t): \alpha \in I\right\}$ 为全序集, 故 $z_n(t) \in \left\{x_\alpha(t): \alpha \in I\right\}$. 于是由(6) 得:

$$q(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leqslant \lambda z_n(t_1) + (1-\lambda)z_n(t_2) \leqslant \lambda q(t_1) + (1-\lambda)q(t_2) + 2/n.$$

故 $q(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leqslant \lambda q(t_1) + (1-\lambda)q(t_2)$, 从而 $q(t)$ 为 $[a, b]$ 的凸函数.

2) 设 $x(t)$ 为 $[a, b]$ 上的凸函数. 下证 $x(a+0)$, $x(b-0)$ 存在, $x(t)$ 在 (a, b) 内连续.

设 $[a, b]$ 上的三点 $t_1 < t_2 < t_3$, 令 $\lambda = (t_3 - t_2)/(t_3 - t_1)$, $\lambda \in (0, 1)$, $t_2 = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_3$. 由凸函数的定义知: $x(t_2) \leqslant \lambda x(t_1) + (1-\lambda)x(t_3)$. 于是

$$x(t_2) - x(t_1) \leqslant (1-\lambda)[x(t_3) - x(t_1)]. \tag{7}$$

因 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 故任意 $\left\{t_n\right\} \subseteq [a, b]$, $\left\{x(t_n)\right\}$ 总有收敛子列. 若 $x(a+0)$ 不存在, 必有 $\left\{t_n\right\}$, $\left\{t_n'\right\} \subseteq (a, b]$, $t_n \to a$, $t_n' \to a$, $x(t_n) \to c$, $x\left(t_n'\right) \to d$, $c \neq d$. 选取 $\left\{t_n\right\}$, $\left\{t_n'\right\}$ 的子列 $\left\{t_{i_k}\right\}$, $\left\{t_{i_k}'\right\}$ 和 $\left\{t_{j_k}\right\}$, $\left\{t_{j_k}'\right\}$ 满足(8):

$$t_{i_{k+1}} < t_{i_k}' < t_{i_k}, \quad t_{j_{k+1}}' < t_{j_k} < t_{j_k}'. \tag{8}$$

由(7) 有: $x(t_{i_k}') - x(t_{i_{k+1}}) \leqslant (1-\lambda_k)[x(t_{i_k}) - x(t_{i_{k+1}})]$,

$$x(t_{j_k}) - x(t_{j_{k+1}}') \leqslant (1-\lambda_k')[x(t_{j_k}') - x(t_{j_{k+1}}')].$$

在上面两式中, 分别令 $i_k \to \infty$ 和 $j_k \to \infty$, 得到: $d - c \leqslant 0$, $c - d \leqslant 0$. 因而 $c = d$, 矛盾. 故 $x(a-0)$ 存在. 同理, 取 $\left\{t_n\right\}$, $\left\{t_n'\right\} \subseteq [a, b)$, $t_n \to b$, $t_n' \to b$, 类似可证 $x(b-0)$ 存在. 对 $t \in (a, b)$, 取 $\left\{t_n\right\}$, $\left\{t_n'\right\} \subseteq [a, b]$, $t_n < t$, $t_n \to t$, $t_n' > t$, $t_n' \to t$, 可证得 $x(t-0) = x(t+0) = x(t)$. 故 $x(t)$ 在 (a, b) 内连续

3) 对 1) 确定 $p(t)$, $q(t)$, 由 2) 知

$$z(t) = \begin{cases} p(a+0) & (t = a), \\ p(t) & (t \in (a, b)), \\ p(b-0) & (t = b). \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} q(a+0) & (t = a), \\ q(t) & (t \in (a, b)), \\ q(b-0) & (t = b). \end{cases}$$

为 $[a, b]$ 上的连续函数. 对 $t \in (a, b)$, 有 $y(t) \leqslant x_\alpha(t) \leqslant z(t)$. 注意 $x_\alpha(t)$ 的连续性及 $y(t)$, $z(t)$ 的定义知: $y(t) \leqslant x_\alpha(t) \leqslant z(t)$, $t \in [a, b]$. 显然 $z(t)$, $y(t)$ 即为所求上确界和下确界.

4) 对 $\left\{x_\alpha(t): \alpha \in I\right\}$ 为凹函数集的情形. 此时 $\left\{-x_\alpha(t): \alpha \in I\right\}$ 为凸函数集. 由 1) ~ 3) 的证明知: $\left\{-x_\alpha(t): \alpha \in I\right\}$ 有上确界 $z(t)$ 和下确界 $y(t)$. 从而 $-y(t)$ 和 $-z(t)$ 为 $\left\{x_\alpha(t): \alpha \in I\right\}$ 的上确界和下确界. 引理证毕.

定理 3 关于方程(1), 假定

i) $f(t, s): (a, b) \times (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$, 对每一 t, $f(t, s)$ 是关于 s 的增函数. $f(t, s)$ 在 $t = a, b$ 可以是奇异的.

ii) 存在 $u, v \in C[a, b]$, $u \leqslant v$, 使得:

$$u(t) \leqslant (b-a)G(t, s)f(s, u(s)), (b-a)G(t, s)f(s, v(s)) \leqslant v(t), s \in (a, b).$$

这里 $G(t, s)$ 见(3).

iii) 对 $x(t)\in C[a,b]$, $f(t,x(t))$ 勒贝格可测•

则方程(1)在 $[u,v]$ 中有最小解 x_* 和最大解 x^*•

证明 a) 先证 $f(t,x(s))\geqslant 0(x\geqslant u)$ 的情形•

对 $x(t)\in[u,v]$, i)–iii) 蕴含着对每一 $t\in[a,b]$, $\int_a^b G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s$ 存在, 因 $0\leqslant G(t,s)f(s,x(s))\leqslant\max\{v(t):t\in[a,b]\}/(b-a)=B$, $s\in(a,b)$• 于是 $0\leqslant G(s,s)f(s,x(s))\leqslant B$, $s\in(a,b)$• 故 $\int_a^b G(s,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s$ 存在•

记
$$G_1(t,s)=\begin{cases}G(t,s) & (a\leqslant t\leqslant s\leqslant b),\\ G(s,s) & (a\leqslant s<t\leqslant b)\bullet\end{cases}$$
$$G_2(t,s)=\begin{cases}0 & (a\leqslant t\leqslant s\leqslant b),\\ G(t,s)-G(s,s) & (a\leqslant s<t\leqslant b)\bullet\end{cases}$$
则 $G_1(t,s)$ 关于 t 是增的连续函数, $G_2(t,s)$ 关于 t 是减的连续函数, 且 $G(t,s)=G_1(t,s)+G_2(t,s)$• 取单调序列 $\{t_n\}\in[a,b]$, $t_n\to t_0$,
$$G(t_n,s)f(s,x(s))=G_1(t_n,s)f(s,x(s))+G_2(t_n,s)f(s,x(s))\bullet \tag{9}$$
因 $f(t,x(s))\geqslant 0(x\geqslant u)$, (9) 式右边两项均为 s 的单调函数序列, 且分别处处收敛于 $G_1(t_0,s)f(s,x(s))$ 和 $G_2(t_0,s)f(s,x(s))$• 由勒贝格积分的勒维定理知:
$$\int_a^b G_1(t_n,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\to\int_a^b G_1(t_0,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,$$
$$\int_a^b G_2(t_n,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\to\int_a^b G_2(t_0,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\bullet$$
故
$$\int_a^b G(t_n,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\to\int_a^b G(t_0,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\bullet$$
从而由(4)定义的算子 $\mathrm{A}x\in C[a,b]$• 条件 i) 蕴含A 是增算子, ii) 蕴含 u, v 是A 的上下不动点(解)• 容易验证: $G(t,s)$ 是关于 t 的凹函数• $f(t,x(s))\geqslant 0$, 故 $\mathrm{A}([u,v])$ 为凹函数集• 对 $A([u,v])$ 中全序子集 $\{x_\alpha:\alpha\in I\}$ (显然有界), 由本节的引理知: $\{x_\alpha\}$ 有上确界和下确界• 在定理1中让 B= A, C= I(恒等算子), $X=Y$ 知, 方程(1)在 $[u,v]$ 中有最小解 x_* 和最大解 x^*•

b) 对一般情形, 置 $g(t,x(s))=f(t,x(s))-f(t,u(s))$, 当 $u\leqslant x$ 时, 且 $g(t,x(s))\geqslant 0$• 构造算子:
$$\mathrm{B}y=\int_a^b G(t,s)g(s,x(s))\mathrm{d}s=\int_a^b G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s-\int_a^b G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s=\mathrm{A}x-h,$$
$$y=x-h,\ h=\int_a^b G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\bullet \tag{10}$$
显然为 B 增算子, $\mathrm{B}(u-h)=\mathrm{A}u-h\geqslant u-h$, $\mathrm{B}(v-h)=\mathrm{A}v-h\leqslant v-h$, 即 $u-h$, $v-h$ 为B的上下不动点(解)• 由a) 知: B 在 $[u-h,v-h]$ 中有最小解 y_* 和最大解 y^*• 由(10)知: $x_*=y_*+h$ 和 $x^*=y^*+h$ 为A 在 $[u,v]$ 中的最小解和最大解, 定理3证毕•

注4 关于方程(1)• 使用传统的方法(如[3~4]), 要求(4)中的算子 A 具有连续性和紧性, 使用文[1,2,5,6,7,8]的方法, 要求A 具有凹凸性(即 $f(t,s)$ 是 s 的凹(凸)或 α_凹(凸)或 φ_凹(凸)函数), 且要求 $f(t,s)$

$\geqslant 0$· 使用文[11] 的方法,要求 $f(s, x(s)) \in L^p[a, b]\ (p \geqslant 1)$· 这一条件目前诸多文献均要满足(如[1～4])· 如取 $a = 0,\ b = 1,\ \beta = \gamma = 0,\ \alpha = \delta = 1,\ f(t, s) = (s + 1)/2t,\ (t, s) \in (0, 1) \times (-\infty, +\infty)$,则 $G(t, s) = \min\left\{t, s\right\}$, 置 $u(t) = 0,\ v(t) = 1$,对 $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$, 由

$$G(t, s)f(s, x(s)) = \begin{cases} t(x(s) + 1)/2s & (0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1) \\ (x(s) + 1)/2 & (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1) \end{cases} \quad (0 < s < 1)\cdot$$

知 $u = 0,\ v = 1$ 为下解和上解, 从而(1) 在[0, 1] 有最小解和最大解· 但

$$f(s, x(s)) = (x(s) + 1)/2s \notin L^p[0, 1]$$

$(p \geqslant 1)$,不能用[1～8, 12] 的方法· 显然, 文[9] 的定理6.2.4不适合本文· 因此,本文的定理3是新结果·

[参 考 文 献]

[1] 赵增勤. 半序线性空间混合单调映射不动点的存在唯一性[J]. 系统科学与数学, 1999, **19**(2): 217－224.

[2] ZHAO Zeng_qin. Uniqueness of positive solutions for singular nonlinear second order boundary_value problems[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1994, **23**(6): 755－765.

[3] Deimiling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1985.

[4] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科技出版社, 1985.

[5] ZHANG Zhi_tao. New fixed point theorems of mixed monotone operators and applications[J]. J Math Anal Appl, 1996, **204**(1): 307－319.

[6] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用[J]. 数学学报, 1998, **41**(6): 1121－1126.

[7] 李福义, 梁展东. φ_凹(凸)算子的不动点及其应用[J]. 系统科学与数学, 1994, **14**(4): 355－360.

[8] 李福义, 冯锦华, 沈沛龙. 一类减算子的不动点及其应用[J]. 数学学报, 1999, **42**(2): 193－196.

[9] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

[10] GUO Da_jun, Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1987, **11**(5): 623－632.

[11] 孙经先. 非连续增算子的不动点定理及其对含间断项的非线性积分方程的应用[J]. 数学学报, 1988, **31**(1): 101－107.

[12] 杨光崇. 有序 Banach 空间的拟弱收敛及其应用[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(11): 1198－1102.

Fixed Ponts of Increasing Operators in Ordered Space With Applications

YANG Cuang_chong

(Department of Basic Computation Science, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610041, P R China)

Abstract: The minimal_maximal fixed points theorems of increasing operators are proved in ordered space and some well_known results of increasing operators and monotone operators are improved and generalized. The obtained results are then applied to singular nonlinear boundary problem in ordinary differential equation without any assumption of continuity, compactness, convexity and concavity.

Key words: ordered space; supremum and infimum; increasing operator and fixed point; singular boundary problem