

文章编号: 1000-0887(2002) 03_0249_05

粘弹体中裂纹演化的细观力学分析*

张双寅

(中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

(沈亚鹏推荐)

摘要: 根据 Eshelby 等效夹杂理论研究含残币形裂纹的粘弹体中裂纹张开位移随时间的缓慢增大以及含裂纹粘弹性体的等效模量随时间的变化. 对于 Maxwell 粘弹性材料给出了模量随时间变化的显式表达式, 结果表明裂纹的缓慢张开使材料模量减小更快.

关键词: 粘弹性; 裂纹; 细观力学

中图分类号: O345; O346.1 文献标识码: A

引言

众所周知, 粘弹体中裂纹在外力作用下存在一个开裂孕育时间, 在这个裂纹孕育时间内裂纹张开位移 (COD) 随时间缓慢变大, 裂纹长度保持不变^[1]. 研究粘弹性体内的裂纹缓慢张开对认识粘弹性体的断裂行为十分有意义. 再者, 当前研究含裂纹弹性体模量的文章很多, 尚未见到有关含裂纹粘弹体弹性模量的研究工作. 本文将对以上两点进行初步探讨.

1 粘弹性本构关系

对于三维问题, 一般将本构关系分解成关于偏量和体量的两个方程^[2]:

$$R(D) \sigma_{kk}(t) = S(D) \varepsilon_{kk}(t), \quad (1)$$

$$P(D) \sigma_{ij}(t) = Q(D) \varepsilon_{ij}(t), \quad (2)$$

其中, $P(D)$, $Q(D)$, $R(D)$, $S(D)$ 是算子, D 代表 d/dt , 引入拉普拉斯变换

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

本构关系 (1)、(2) 变为拉普拉斯变换域 (TD) 内的本构关系:

$$R(s) \sigma_{kk}(s) = S(s) \varepsilon_{kk}(s), \quad (3)$$

$$P(s) \sigma_{ij}(s) = Q(s) \varepsilon_{ij}(s). \quad (4)$$

体积模量和剪切模量分别为:

$$k^{TD}(s) = \frac{1}{3} \frac{S(s)}{R(s)}, \quad \mu^{TD}(s) = \frac{1}{2} \frac{Q(s)}{P(s)},$$

相应地, 弹性模量和泊松比为

* 收稿日期: 2000.07.27; 修订日期: 2001.11.20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19572073)

作者简介: 张双寅(1938—), 男, 河北人, 研究员, 博士生导师, 国务院特殊津贴获得者.

$$E^{TD} = \frac{9k^{TD}\mu^{TD}}{3k^{TD} + \mu^{TD}}, \quad \nu^{TD} = \frac{3k^{TD} - 2\mu^{TD}}{2(3k^{TD} + \mu^{TD})},$$

拉梅参数 $\lambda^{TD} = 2\mu^{TD} \frac{\nu^{TD}}{1 - 2\nu^{TD}}$ 上标 TD 表示拉氏变换域。对于一维问题, 四参数粘弹性模型 (Burgers model),

$$E^{TD} = \frac{E_1 \eta_1 (E_2 + \eta_2 s) s}{E_1 E_2 + [\eta_1 E_2 + E_1 (\eta_1 + \eta_2)] s + s^2 \eta_2 \eta_1},$$

其中 E_1, E_2, η_1, η_2 为两个弹模和两牛顿体常数。对于 ED_6 树脂, $E_1 = 3.27\text{GPa}, E_2 = 1.8\text{GPa}, \eta_1 = 8000\text{GPa}\cdot\text{hr}, \eta_2 = 300\text{GPa}\cdot\text{hr}$ 。已知这些常数, 可对 E^{TD} 进行反演, $E(t)$ 可得^[2]。

2 裂纹的等效夹杂模拟

首先说明, 以下是在 TD 域内进行分析, 为使公式简洁, 除特别指出外将略去上标 TD 。设在无限大体内存在一个钱币形裂纹, 其空间域 Ω 可用下式描述(见图 1):

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1, \quad \frac{c}{r} \ll 1,$$

x_3 垂直于裂纹面。基体的模量和夹杂的模量分别为: λ, μ 和 λ^*, μ^* 。此粘弹体在无限远处承受一均匀拉力 σ^∞ 。现分析复合体的应力分布。

假定夹杂中发生一塑性应变 $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_p$, 根据 Eshelby 等效夹杂理论此弹性应力场可用下式模拟:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = & 2(\lambda^* + \mu^*) \varepsilon_{11} + \lambda^* (\varepsilon_{33} - \mathcal{E}_p) = \\ & 2(\lambda + \mu) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^*) + \lambda (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^* - \mathcal{E}_p), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & 2\lambda^* \varepsilon_{11} + (\lambda^* + \mu^*) (\varepsilon_{33} - \mathcal{E}_p) = \\ & 2\lambda (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^*) + (\lambda + \mu) (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^* - \mathcal{E}_p), \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $\varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{22}^*, \varepsilon_{33}^*$ 是本征应变张量。 \mathcal{E}_j 是协调应变张量:

$$\mathcal{E}_j = S_{ijkl} \mathcal{E}_{ij}^*, \quad (7)$$

S_{ijkl} 是 Eshelby 张量, 对于薄钱币形夹杂, S_{ijkl} 有如下各式^[3]:

$$\begin{aligned} S_{1133} = \frac{2\nu - 1}{8(1 - \nu)} \frac{\pi c}{r}, \quad S_{3311} = \frac{\nu}{1 - \nu} \left[1 - \frac{4\nu + 1}{8\nu} \frac{\pi c}{r} \right], \\ S_{1111} = -\frac{13 - 8\nu}{32(1 - \nu)} \frac{\pi c}{r}, \quad S_{1122} = S_{2211} = \frac{8\nu - 1}{32(1 - \nu)} \frac{\pi c}{r}, \\ S_{3333} = 1 - \frac{(1 - 2\nu)}{4(1 - \nu)} \frac{\pi c}{r}. \end{aligned}$$

将(7)代入(5)(6), 忽略 $(c/r)^2$ 项, 我们得到:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^* = \frac{\mathcal{E}_p}{D} \frac{\pi}{4(1 - \nu)} \frac{c}{r} [\lambda^* \Delta\mu - \\ 2\mu^* (2\Delta\lambda + \Delta\mu)] (2\nu - 1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^* = \frac{\mathcal{E}_p}{D} \frac{\pi}{4(1 - \nu)} \frac{c}{r} [\lambda^* \Delta\mu (8\nu + 5) + \\ 2\mu^* \{ 2\Delta\lambda^* (1 - 2\nu) + 3\Delta\mu \}], \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\Delta\lambda = \lambda^* - \lambda, \Delta\mu = \mu^* - \mu$,

$$D = 2\lambda^* \left[\mu - 2\Delta\mu \frac{\nu}{1-\nu} \right] + 4\mu^* \left[\Delta\lambda \frac{\nu}{1-\nu} + \mu + \nu \right].$$

将(8)、(9)代入(5)、(6), 得到,

$$\sigma_{11} = \frac{1+4\nu}{4(1-\nu)} \frac{\pi c}{r} \xi_p - 2\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\xi_p}{D}$$

$$\frac{\pi}{4(1-\nu)} \frac{c}{r} \times$$

$$\left\{ \Delta\mu\lambda^* - 2\mu^* (2\Delta\lambda + \Delta\mu) \right\} (2\nu -$$

1),

$$\sigma_{33} = - \frac{\mu}{2(1-\nu)} \frac{\pi c}{r} \xi_p. \quad (11)$$

可以看出, σ_{33} 与夹杂的弹性模量无关. 这是由于夹杂非常薄略去了 $(c/r)^2$ 项的缘故^[4]. 于是, 式(11) 对任意模量夹杂或裂纹均成立. 由 ξ_p 产生的应变能为:

$$E = \frac{\pi^2 r c^2}{3} \frac{\mu}{1-\nu} \xi_p^2. \quad (12)$$

外力势为:

$$V = - \frac{4\pi r^2}{3} \sigma^\infty \xi_p. \quad (13)$$

总势能为: $F = E + V$. (14)

为确定 ξ_p , 令 $\partial F / \partial \xi_p = 0$, 得到 $\xi_p = \sigma^\infty / [(\pi c / 2r)(\mu / (1-\nu))]$ 与(11) 比较, 得知 $\sigma^\infty = -\sigma_{33}$, 这正好满足裂纹域内应力为零的条件:

$$(\sigma^\infty + \sigma_{33})|_{\Omega} = 0. \quad (15)$$

能量释放率可由式 $G = - \frac{\partial F}{\partial(\pi a^2)}$ 导出:

$$G = \frac{2}{\pi} \frac{(1-\nu)}{\mu} r (\sigma^\infty)^2. \quad (16)$$

根据应力强度因子和能量释放率的关系式, $K^2 = 2\mu / (1-\nu) G$, 得到应力强度因子:

$$K = 2\sigma^\infty \sqrt{\frac{r}{\pi}}. \quad (17)$$

此外, 可以想见, 裂纹张开位移(COD)可由方程 $\delta = 2c\xi_p$ 计算. 于是,

$$\delta = \frac{4(1-\nu)}{\pi} \frac{r\sigma^\infty}{\mu}. \quad (18)$$

从(16)、(18)可知, 由于 μ 在时间域内随时间变小, 所以, 在定常外力作用下粘弹体内裂纹的能量释放率 G 和裂纹张开位移 δ 随时间缓慢增大.

如前所述, 式(18)中 μ 是在拉普拉斯变换域的量, 要求时间域的裂纹张开位移 $\delta(t)$ 需作逆变换, 其实, (18) 很容易进行逆变换, 例如对于 Maxwell 体,

$$\mu(t) = \mu \exp\left[-\frac{t\mu}{\eta_0}\right],$$

其中, η_0 , μ 分别为 Maxwell 体的粘性参数与剪切模量. 于是,

$$\delta(t) = \frac{4(1-\nu)}{\pi} \frac{r\sigma^\infty}{\mu \exp\left[-\frac{t\mu}{\eta_0}\right]}. \quad (18)'$$

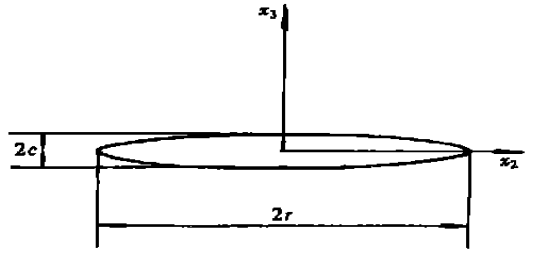


图 1 钱币形裂纹示意图

显然, $\delta(t)$ 是时间的增函数。

3 裂纹体模量

根据文献[5], 对于含单向排列钱币形夹杂的复合材料, 其垂直裂纹面方向的等效模量 E_{33} 等于(这里已换为本文的符号与坐标):

$$\frac{E_{33}}{E} = \frac{1}{1 + \frac{f_1}{f_0} \frac{4(1-\nu)r}{\pi c}} \quad (19)$$

其中, f_1, f_0 分别为夹杂和基体的体积分数。这里, E, E_{33} 均为时间的减函数, 且具有相同的函数形式。

采用 Budiansky 等^[6] 关于裂纹密度的符号,

$$\eta = Nr^3/\Omega$$

得到

$$f_1 = \frac{4}{3}\pi cr^2N/\Omega = \frac{4c}{3r}\pi\eta$$

N 是裂纹个数, Ω 是总体积。(19) 变为:

$$E_{33} = \frac{E}{1 + \frac{16}{3f_0}(1-\nu^2)\eta} \quad (20)$$

因为 $f_0 = 1 - f_1, f_1$ 与裂纹厚度 c 成正比, $c = c_i + \delta(t)$ (c_i 是初始裂纹张开位移), 于是

$$E_{33}(t) = \frac{3f_0E(t)}{3f_0 + 16(1-\nu^2)\eta} = \frac{3\left[1 - \frac{4[c_i + \delta(t)]}{3r}\pi\eta\right]E(t)}{3\left[1 - \frac{4[c_i + \delta(t)]}{3r}\pi\eta\right] + 16(1-\nu^2)\eta} \quad (21)$$

其中 c_i 为裂纹的初始厚度。可见, 含裂纹粘弹体的有效模量 E_{33} 将随时间变小, 原因有二: 一是基体模量 E 随时间变小; 二是裂纹张开位移随时间变大。

4 结 论

对粘弹体内裂纹演化进行了粗浅的分析, 给出了能量释放率 G 和裂纹张开位移 δ 的显式表达式, 由于式中只有 μ 的一次项, 所以很容易进行反演; 讨论了含裂纹粘弹体的等效模量随时间变化, 指出在开裂孕育时间内, 裂纹缓慢张开促使等效模量更快变小。

[参 考 文 献]

- [1] 张双寅, 熊电元. 幂律非线性粘弹性材料中的裂纹扩展[J]. 应用数学和力学, 1997, 18(11): 993—1000.
- [2] Li J, Weng G J. Strain rate sensitivity, relaxation behavior, and complex moduli of a class of isotropic viscoelastic composites[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1994, 116(4): 495—504.
- [3] Mura T. Micromechanics of Defects in Solids[M]. The Hague: Martinus Nijhoff, 1994.
- [4] Mori T, Mura T. An inclusion model for crack arrest in fiber reinforced materials[J]. Mechanics of Materials, 1984, 3(3): 193—198.
- [5] Zhao Y H, Tandon G P, Weng G J. Elastic moduli for a class of porous materials[J]. Acta Mechanica, 1988, 76(1/2): 105—130.

- [6] Budiansky B, O'Connell R J. Elastic moduli of a cracked solid[J]. International Journal of Solids and Structures, 1976, 12(2): 81—97.

Micromechanics Analysis on Evolution of Crack in Viscoelastic Materials

ZHANG Shuang_yin

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China)

Abstract: A preliminary analysis on crack evolution in viscoelastic materials was presented. Based on the equivalent inclusion concept of micro_mechanics theory, the explicit expressions of crack opening displacement δ and energy release rate G were derived, indicating that both δ and G are increasing with time. The equivalent modulus of the viscoelastic solid comprising cracks was evaluated. It is proved that the decrease of the modulus comes from two mechanisms: one is the visco_elasticity of the material, the other is the crack opening which is getting larger with time.

Key words: visco_elasticity; crack; micro_mechanics