

文章编号: 1000_0887(2002) 04_0422_07

关于分形插值函数的连续性和可微性^{*}

李红达¹, 叶正麟², 高行山³

(1. 中国科学院 研究生院 信息安全国家重点实验室, 北京 100039;
2. 西北工业大学 数学与信息科学系, 西安 710072; 3. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

(张汝清推荐)

摘要: 获得了由迭代函数系统(IFS)定义的两类分形插值函数具有 H^1 -连续性的充分条件, 给出了这两类分形插值函数连续可微的充要条件, 并证明了可微分形插值函数的导函数是由关联 IFS 生成的分形插值函数。

关键词: 分形; 插值函数; H^1 -连续; 可微性

中图分类号: O174.1 文献标识码: A

引 言

分形插值方法是分形理论中的一种数值方法, 它与传统的插值方法有本质的不同, 是迭代函数系统(IFS)理论在函数插值这一数值领域的成功应用。Barnsley^[1, 2]首先给出了这一方法和关于分形插值函数的连续性、函数图象的分形维的一般理论, 现在这一数值方法已成为自然景物造型和一些物理过程的仿真的有力工具。众多学者对一元及多元分形插值函数的方法的理论和应用进行了大量的研究^[3-7], 得到了一些结果。文[8, 9]对由仿射变换构造的分形插值函数的 H^1 -连续性进行了研究。本文讨论更一般的分形插值函数的 H^1 -连续性和可微性。

分形插值函数的极值问题是一个在解决许多问题时都会遇到的基本问题, 因分形插值函数一般并不具有良好的光滑性, 传统求极值的方法将不再适用。因此, 这一问题变得比较困难。在一般情况下, 可使用计算机在有限精度下进行搜索取得近似的极值, 为保证这种方法的有效性, 则要求函数在一个小的局部范围内, 函数值变化不太大, 即需要其具有相对较好的连续性。因此, 有必要讨论分形插值函数光滑程度的刻画问题。本文讨论描述分形插值函数光滑程度的 H^1 -连续性及其可微性问题, 给出了 IFS 的各个参数与分形插值函数光滑程度及可微性的关系, 说明了在一般情况下, 分形插值函数若连续则必具有 H^1 -连续性。在一定的条件下, 分形插值函数可导且其导数是由称为原 IFS 的关联 IFS 所定义的分形插值函数。

1 一维分形插值函数

设 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 为有界闭区间 $I = [a, b]$ 的一个剖分, y_0, y_1, \dots, y_n 是一

* 收稿日期: 2000_08_30; 修订日期: 2001_12_21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071060)
作者简介: 李红达(1966—), 男, 陕西人, 讲师, 博士。

组任意的实数, 其中 $n \geq 2$. 设 $l_i(x)$ 是从 I 到 $[x_{i-1}, x_i]$ 的压缩同胚, 并且满足 $l_i(a) = x_{i-1}$, $l_i(b) = x_i, i = 1, 2, \dots, n$. 再设 $F_i = F_i(x, y)$ 是定义在 $I \times \mathbf{R}$ 上的二元函数, 它关于自变量 x 连续, 关于自变量 y 压缩, 并且满足

$$F_i(x_0, y_0) = y_{i-1}, F_i(x_n, y_n) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

定义映射: $w_i: I \times \mathbf{R} \rightarrow I \times \mathbf{R}$ 为

$$w_i(x, y) = (l_i(x), F_i(x, y)) \quad x \in I, y \in \mathbf{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

这样可以得到一个迭代函数系统 (IFS): $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

定理 1^[1] 迭代函数系统 $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 有唯一的不变集合, 即吸引子 $G \subset \mathbf{R}^2$, 并且存在连续函数 $f(x): I \rightarrow \mathbf{R}$ 满足

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

G 是 $f(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上的图像, 即 $G = \{(x, f(x)): x \in I\}$. 称函数 $f(x)$ 为由 IFS $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 所定义的分形插值函数.

在用迭代函数系统构造分形插值函数时, 往往采用便于使用的变换

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

其中 a_i, c_i, d_i, e_i, f_i 为实数, 并且要求满足如下插值条件:

$$w_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix}, w_i \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

变换 w_i 中的 5 个参数, 由条件 (2) 决定, 自由度为 1. 取参数 d_i 为自由变量, 称为垂直因子.

称迭代函数系统 $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 为第一类迭代函数系统.

在第一类迭代函数系统中, 若 f_i 不是常数, 而是 x 的一般非线性连续函数, 此时 $c_i x + f_i = \varphi_i(x)$ 为 x 的非线性函数, 称为位移函数. 变换 w_i 可以写为

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ \varphi_i(x) \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

并且仍满足条件 (2), 则称迭代函数系统 $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 为第二类迭代函数系统.

由定理 1 可知, 对第一类与第二类迭代函数系统, 当垂直因子 $d_i < 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 必存在吸引子 G , 且 G 必为某个连续函数 $f(x)$ 的图像, 即存在连续函数 $f(x)$ 使 $G = \{(x, f(x)): a \leq x \leq b\}$. $f(x)$ 相应地称为第一、二类分形插值函数.

在第一、二类 IFS 中, 垂直因子 d_i 的大小影响分形插值函数的光滑程度, 一般地, d_i 越大, $f(x)$ 的光滑性往往越差. 第一类分形插值函数相对简单, 具有更强的自相似性, 它的光滑程度由 d_i 和 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 决定. 第二类分形插值函数 $f(x)$ 相对比较复杂, 它的光滑程度不仅受垂直因子 d_i 和 a_i 的影响, 而且还受 $\varphi_i(x)$ 的影响. 下面的例子说明了这个问题.

例 1 Weierstrass 函数

$$W_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\lambda n} \cos(2^n x) \quad x \in [0, 2\pi].$$

当 $0 < \lambda \leq 1$ 时, $W_\lambda(x)$ 连续但处处不可微; 当 $\lambda > 1$ 时, $W_\lambda(x)$ 是 $[\lambda - 1]$ 次可微的. 在 $[0, 2\pi]$ 上, 易证 $W_\lambda(x)$ 是由迭代函数系统

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ d_1 y + \varphi_1(x) \end{pmatrix}, w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \pi \\ d_2 y + \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$

所定义的分形插值函数, 其中 $d_1 = d_2 = 2^{-\lambda}$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cos(x/2)$. 因此, 当 $1/2^{k+1} \leq d_1 = d_2 < 1/2^k (k \geq 1)$ 时, $W_\lambda(x)$ 为 k 阶可微; 当 $1/2 \leq d_1 = d_2 < 1$, $W_\lambda(x)$ 连续但不可微, $W_\lambda(x)$ 的光滑性随 d_i 的增大而降低.

对上面的迭代函数系统, 保持 d_1, d_2 及 λ 不变, 而取

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2^{N+1}}\cos(2^N x),$$

其中 N 为任意的正整数, 则得迭代函数系统 $\{[0, 2\pi] \times \mathbf{R}; w_1, w_2\}$, 其中

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2^N} + \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2^{N+1}}\cos(2^N x) \end{pmatrix}, \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \pi \\ \frac{1}{2^N} + \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2^{N+1}}\cos(2^N x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

不难得到, 对任意的 $\lambda \in \mathbf{R}$, 它所定义的分形插值函数 $Q_\lambda(x)$ 可微. 由此可见分形插值函数的光滑性亦受 $\varphi_i(x)$ 的影响. 当 $N = 6, s = 0.5$ 时, $Q_\lambda(x)$ 及 $Q'_\lambda(x)$ 分别如图 1 和图 2

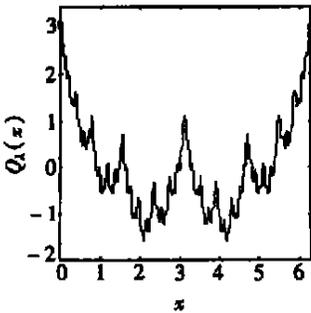


图 1

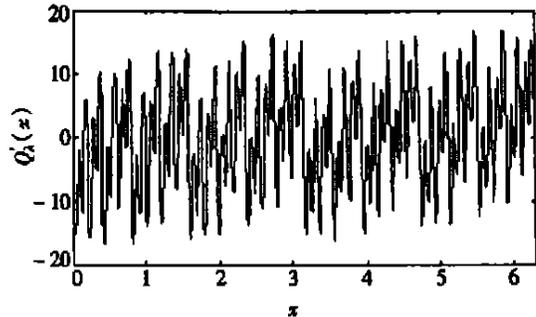


图 2

如果由(1)或(3)定义的的双曲 IFS 不满足插值条件(2), 那么它的吸引子 G 不再是一个函数 $f(x)$ 的图像, 但除去 $[a, b]$ 的一个零测度子集, G 是一个 L^1 可积函数 $f(x)$ 的图像.

设 $M = \left\{ \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots) : 1 \leq \sigma_k \leq n, k = 1, 2, \dots \right\}$, 称为 IFS(1) 或(3) 的码空间. 对 $\sigma \in M$, 令

$$w_\sigma = \begin{pmatrix} x_\sigma \\ y_\sigma \end{pmatrix} = \lim_{K \rightarrow \infty} w_{\sigma_K} \circ (p_0) = \lim_{K \rightarrow \infty} w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ \dots \circ w_{\sigma_K} (p_0),$$

其中 $p_0 = (x_0, y_0)$ 是任意固定点. 那么, $x_\sigma = \lim_{K \rightarrow \infty} l_{\sigma_K}(x_0) = \lim_{K \rightarrow \infty} l_{\sigma_1} \circ l_{\sigma_2} \circ \dots \circ l_{\sigma_K}(x_0)$, 其中 $l_{\sigma_i}(x) = a_{\sigma_i}x + e_{\sigma_i}$. 由迭代函数系统理论知

$$G = \bigcup_{\sigma \in M} \{w_\sigma\}, \quad I = \bigcup_{\sigma \in M} \{x_\sigma\}.$$

记 $E = \{x_\sigma : \exists \theta \neq \sigma \in M, x_\theta = x_\sigma\}$, 易知 E 是一个可数集. 在 I 上定义函数如下:

$$\begin{cases} f(x_\sigma) = y_\sigma & x_\sigma \in I - E, \\ y(x_\sigma) = 0 & x_\sigma \in E, \end{cases}$$

则有 $G_f = \{(x, f(x)) : x \in I - E\} = \{(x, y) : (x, y) \in G, x \in I - E\}$.

定理2 如上定义的 $f(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上 L^1 可积.

该定理的证明略去.

2 分形插值函数的 H^L -lder 连续性

第一类与第二类分形插值函数 $f(x)$ 的光滑程度由 a_i, d_i 或由 a_i, d_i 及函数 $\varphi_i(x)$ 共同决定. 下面用 H^L -lder 连续性来描述其光滑程度, 给出的定理在一定程度上说明了 $f(x)$ 的光滑程度与 a_i, d_i 及函数 $\varphi_i(x)$ 的关系.

定理3 设 $f(x)$ 为第二类分形插值函数. 对任意的正实数 s , 若下列两个条件满足:

$$\textcircled{1} \max \left\{ \frac{|d_i|}{a_i^s} : i = 1, 2, \dots, n \right\} < 1, \quad (4)$$

$\textcircled{2}$ 存在正常数 M_0 , 对 $\forall x, y \in I$, 有

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < M_0 |x - y|^s \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

则存在正实数 M , 使分形插值函数 $f(x)$ 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^s \quad \forall x, y \in I \quad (6)$$

即 $f(x)$ 是 H^L -lder 连续函数, H^L -lder 指数为 s .

证明 令

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^s} & x, y \in I, x \neq y, \\ 0 & x = y \in I, \end{cases} \quad (7)$$

只需证明当 $x - y \rightarrow 0$ 时, $F(x, y)$ 有界. 由定义 $f(x)$ 的(3)及条件(2), 得 $a_i > 0$, 且当 $x \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$)时, 有

$$f(x) = d_i f\left(\frac{x - e_i}{a_i}\right) + \varphi_i\left(\frac{x - e_i}{a_i}\right).$$

因此由(7), 对任意的 $1 \leq i \leq n$, 且 $x, y \in I_i$ 时, 有

$$F(x, y) = \frac{d_i}{a_i^s} F\left(\frac{x - e_i}{a_i}, \frac{y - e_i}{a_i}\right) + \frac{1}{a_i^s} \varphi_i\left(\frac{x - e_i}{a_i}, \frac{y - e_i}{a_i}\right),$$

其中

$$\varphi_i(x, y) = \begin{cases} \frac{\varphi_i(x) - \varphi_i(y)}{|x - y|^s} & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

构造迭代函数系统如下:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x + e_i \\ a_i y + e_i \\ \frac{d_i}{a_i^s} z + \frac{1}{a_i^s} \varphi_i(x, y) \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

由已知条件可知这是双曲IFS. 从而, 在 \mathbf{R}^3 中存在吸引子且为紧集. 则对任意初始点 $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$, $x_0 \neq y_0$, 由该IFS按随机法产生的任一点列 $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0}^{\infty}$ 与 $\{(x_i, y_i, F_i(x_i, y_i))\}_{i=0}^{\infty}$ 相同. 因此, 该迭代函数系统确定了 $\lim_{x \rightarrow y} F(x, y)$. 由吸引子的紧性立即得 $\lim_{x \rightarrow y} F(x, y)$ 有界. 证毕.

定理3说明了在条件 $d_i < 1$ 下, 若 $\varphi_i(x)$ 具有 H^L -lder 连续性, 则分形插值函数 $f(x)$ 也具有

有Hlder连续性. 对第一类分形插值函数 $f(x)$, 可以认为是 $\varphi_i(x) = c_i x + f_i$ 的第二类分形插值函数, 对 $s \leq 1$, 条件②成立, 故有下面的推论:

推论1 设 $f(x)$ 为第一类分形插值函数. 对正实数 $1 \geq s > 0$, 若

$$\max \left\{ \frac{|d_i|}{a_i^s} : i = 1, 2, \dots, n \right\} < 1,$$

则存在实数 $M > 0$, 使

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^s \quad \forall x, y \in I,$$

即 $f(x)$ 是指数为 s 的Hlder连续函数.

推论1说明第一类分形插值函数的光滑性由 a_i, d_i 完全决定. 在 $\max\{d_i\} < 1$ 的条件下, 由于 $0 < a_i < 1$, 必存在正实数 s 满足(4), 因此 $f(x)$ 必具有Hlder连续性; 在 $\max\{d_i\} \geq 1$ 条件下, 插值函数 $f(x)$ 可能不再存在, 即使存在, 它也是不连续的.

对第一类与第二类分形插值函数, 若存在 $s > 1$ 满足条件(4), 则必有 $c_i x + f_i = 0$ 或 $\varphi_i(x) = 0$ ($1 \leq i \leq n$), 从而有 $f(x) = 0$.

3 分形插值函数的可微性

由第一、第二类IFS所定义的分形插值函数, 一般具有较好的连续性, 但一般不具有可微性. 讨论插值函数的可微性, 第二类IFS中的 $\varphi_i(x)$ 均可微的条件是必需的. 下面所讨论的第一、第二类IFS均写为(3)的形式, 不再加以区分, 并假定 $\varphi_i(x)$ 均可微. 对形如(3)的IFS $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 定义另一迭代函数系统: $\{I \times \mathbf{R}; w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}$, 其中

$$w'_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & d_i/a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ \frac{1}{a_i} \varphi'_i(x) \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

并且满足插值条件

$$w'_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix}, \quad w'_i \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

称 $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 为 $\{I \times \mathbf{R}; w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}$ 的关联IFS. 下面的定理说明了 $f(x)$ 的可微性及 $f'(x)$ 与关联IFS的关系.

定理4 设 $f(x)$ 是 $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 定义的第一或第二类分形插值函数, 若 $f(x)$ 可微, 则 $f'(x)$ 是关联IFS所定义的分形插值函数.

证明 对任意 $1 \leq i \leq n$, $\forall x, y \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, 存在 $x', y' \in I = [x_0, x_n]$, 使

$$x = a_i x' + e_i, \quad f(x) = d_i f(x') + \varphi_i(x'),$$

$$y = a_i y' + e_i, \quad f(y) = d_i f(y') + \varphi_i(y'),$$

从而有

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{d_i f(x') + f(y')}{a_i (x' - y')} + \frac{1}{a_i} \frac{\varphi_i(x') - \varphi_i(y')}{x' - y'}, \quad (10)$$

令 $y \rightarrow x$, 则必有 $y' \rightarrow x'$, 由 $f(x)$ 可微性及(10)得,

$$f'(x) = \frac{d_i}{a_i} f'(x') + \frac{1}{a_i} \varphi'_i(x') \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

若 $x = x_{i-1}$, 则 $x' = x_0$; 若 $x = x_i$, 则 $x' = x_n$. 于是有

$$f'(x_{i-1}) = \frac{d_i}{a_i} f'(x_0) + \frac{1}{a_i} \phi'_i(x_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$f'(x_i) = \frac{d_i}{a_i} f'(x_n) + \frac{1}{a_i} \phi'_i(x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

所以 $f'(x)$ 是关联 IFS 所定义的插值函数。

定理 5 设 $f(x)$ 是由 $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 定义的第一或第二类分形插值函数, 则 $f(x)$ 在 I 上连续可微的充分必要条件是

① $\{I \times \mathbf{R}; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 的关联 IFS 是双曲 IFS, 且满足条件(9)。

② 存在常数 C , 使

$$f(x_0) + \int_{x_0}^{x_{i-1}} f_0(x) dx = \phi_i(x_0) + dif(x_0) + C \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

其中 $f_0(x)$ 为关联 IFS 所定义的分形插值函数。

证明 必要性显然。

充分性 设 $f_0(x)$ 为关联 IFS 所定义的插值函数, 令

$$g(x) = \int_{x_0}^x f_0(t) dt + f(x_0) - C,$$

则 $g(x)$ 可微。对任意 $1 \leq i \leq n$ 及 $x \in I_i$, 有

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{x_0}^{x_{i-1}} f_0(t) dt + \int_{x_{i-1}}^x f_0(t) dt + f(x_0) - C = \\ &= \int_{x_0}^{x_{i-1}} f_0(t) dt + \int_{x_{i-1}}^x \left[\frac{d_i}{a_i} f_0 \left(\frac{t - e_i}{a_i} \right) + \frac{1}{a_i} \phi'_i \left(\frac{t - e_i}{a_i} \right) \right] dt + f(x_0) - C = \\ &= \int_{x_0}^{x_{i-1}} f_0(t) dt + d_i \int_{x_0}^{\frac{x - e_i}{a_i}} f_0(t) dt + \phi_i \left(\frac{x - e_i}{a_i} \right) - \phi_i(x_0) + f(x_0) - C = \\ &= d_i \int_{x_0}^{\frac{x - e_i}{a_i}} f_0(t) dt + dif(x_0) + \phi_i \left(\frac{x - e_i}{a_i} \right) + \\ &= \int_{x_0}^{x_{i-1}} f_0(t) dt - dif(x_0) - \phi_i(x_0) + f(x_0) - C = \\ &= d_i g \left(\frac{x - e_i}{a_i} \right) + \phi_i \left(\frac{x - e_i}{a_i} \right). \end{aligned}$$

由此得 $g(x)$ 和 $f(x)$ 由同一 IFS 生成, 即 $f(x) = g(x)$, 从而得 $f(x)$ 可微。

证毕。

对于满足 $\sum_{i=1}^n d_i \neq 1$ 条件的 IFS, 定理 5 中的条件 ② 可进一步写为

$$f(x_0) + \frac{D_{i-1}}{1-D} \sum_{k=1}^{i-1} (\phi_k(x_n) - \phi_k(x_0)) = dif(x_0) + \phi_i(x_0) + C,$$

其中 $D = \sum_{k=1}^n d_k$, $D_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} d_k$ 。

[参 考 文 献]

- [1] Bamsley M F. Fractal functions and interpolation[J]. Constr Approx, 1986, 2(3): 303—329.
- [2] Bamsley M F. Fractal Everywhere[M]. Boston: Academic Press, 1988.
- [3] Massopust Peter R. Fractal function and applications[J]. Chaos Solitons & Fractal, 1997, 8(2): 171—

- 190.
- [4] Peter Singer. Self-affine functions and wavelet series[J]. J Math Appl, 1999, **240**(2): 518—551.
- [5] Jacques Levy_Vehel. Fractal approaches in signal processing[J]. Fractals, 1995, **3**(4): 715—775.
- [6] Panagiotopoulos P D, Panagouli D. Mechanics on fractal bodies: Data compression using fractal[J]. Chaos Solitons & Fractal, 1997, **8**(2): 253—267.
- [7] 谢和平, 孙洪泉. 分形插值曲面理论及应用[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(4): 297—306.
- [8] Bedford T. H -1der exponents and box dimension for self-affine fractal function[J]. Constr Approx, 1989, **5**(1): 33—48.
- [9] Donovan G, Geronimo J S, Massopust P R. Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions[J]. SIAM J Math Anal, 1996, **27**(4): 1158—1192.
- [10] Barnsley M F, Harring A N. The calculus of interpolation function[J]. J Approx Theory, 1989, **57**(1): 14—34.

On the Continuity and Differentiability of a Kind of Fractal Interpolation Function

LI Hong_da¹, YE Zheng_lin², GAO Hang_shan³

(1. State Key Laboratory of Information, Security Graduate School, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, P R China;

2 Department of Mathematics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P R China;

3 Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P R China)

Abstract: The sufficient conditions of H -1der continuity of two kinds of fractal interpolation functions defined by IFS were obtained. The sufficient and necessary condition for its differentiability was proved. Its derivative was a fractal interpolation function generated by the associated IFS, if it is differentiable.

Key words: fractal; interpolation function; H -1der continuity; differentiability