文章编号:1000-0887(2004)01-0074-11

包含泥沙冲淤的浅水方程的混合有限元法(Ⅰ)——时间连续的情形*

罗振东[1,2], 朱 江[2], 曾庆存[2], 谢正辉[2]

(1.首都师范大学 数学系,北京 100037;
2.中国科学院 大气物理研究所,北京 100029)

(戴世强推荐)

摘要: 研究由水动力方程、泥沙输运方程和河床变化方程组成的浅水方程的初边值问题,讨论其广义解和混合有限元解的存在性,并导出半离散混合有限元解的误差估计,这些估计是最优阶的.

关 键 词: 混合有限元法; 浅水方程; 误差估计; 泥沙冲淤

中图分类号: O241.4 **文献标识码:** A

引 言

浅水方程是水力学中的一个重要的数学模型. 近年来,关于这个方程的数值解已经引起水力学工程师们的极大关注. 这个方程的数值解有多方面的用途:第一,用于模拟和捕捉潮汐起落产生的潮汐能,以便于为经济建设服务;第二,这些数值计算可以用于模拟潮汐的区域和由激烈的暴风雨和地震等引起的飓风和海啸的波涛,并利用这些数据制定海岸地区的发展计划;第三,浅水动力学的模型可以把水流和输运现象耦合起来,用于研究海湾和港湾污染的治理、预测渔业经济投资效果、模拟淡水和海水的相互作用、控制城市和工业废水和允许排放的标准;第四,这些数值模拟可以模拟三角洲的形成和发展、淤积区的扩展、淤泥和泥沙的输运和沉积而引起河道的变迁,以便制定出有关治理的方案.

现有的文章[1~6]主要用有限差分方法和一般的有限元方法去处理只包含连续方程和动量方程的浅水方程的数值解. 然而,淤泥和泥沙的输运、沉积在诸如三角洲的形成和发展、淤积区的扩展、河道的变迁等是自然现象变化的重要过程,也是诸如灌溉系统、运输河道、水电站、海岸工程等许多水力问题必须考虑的重大问题. 我国的曾庆存等人已经利用有限差分方法提出了包含水动力方程、淤泥运输方程、泥沙变化方程和河床变化方程的浅水方程的一些数

* 收稿日期: 2001-08-08; 修订日期: 2003-08-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071052,49776283);国家杰出青年基金资助项目(40225015);中国科学院"百人计划"资助项目;北京市优秀人才专项经费资助项目;中国科学院九五重点项目资助项目(K2952-51-434)
作者简介: 罗振东(1958—),男,广西桂平人,教授,博士,博士生导师
(联系人.Tel:86-10-68239661;E-mail:luozhd@mail.cnu.edu.cn)
曾庆存(1935—),男,研究员,中科院院士,博士,博导.

值模型,模拟了长江口的水流的泥沙冲淤[7~9],但是没有作有限元方法的数值分析. 本文研究包含水动力方程、淤泥运输方程和河床变化方程的初边值问题,讨论其广义解(见第1节)和半离散化混合有限元解(见第2节)的存在性,并给出半离化的混合有限元解的误差估计(也见第2节). 这是对该问题研究的第(Ⅰ)部分. 在该问题研究的第(Ⅱ)部分也将给出基于 Lagrange-Galerkin(输运-扩散)方法的混合有限元法.

本文用到的 Sobolev 空间及性质是熟知的(可参见[10]). 另外本文使用的 C, C_i 和 M_i($i = 0,1,\cdots$) 均表示与剖分参数 h (参见第2节)无关的一般常数,不同的地方出现可以不等.

1　包含泥沙冲淤的浅水方程的广义解的存在性

设 $\Omega \subset R^2$ 中一个适当光滑的有界区域. 在水深变化不大的假定下,考虑下面包含水流和泥沙冲淤的浅水方程:

(ⅰ) 水流的连续方程为(参见[11]):

$$\partial Z/\partial t + Z\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = 0 \qquad (\text{在 } \Omega \times (0,T) \text{ 内}), \tag{1}$$

(ⅱ) 水流的动量方程如下(为[8]中所导出的):

$$\partial \boldsymbol{v}/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + f(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}) = -g\nabla(Z + z_b) + A\Delta\boldsymbol{v} - C_D|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}/Z \qquad (\text{在 } \Omega \times (0,T) \text{ 内}), \tag{2}$$

(ⅲ) 淤泥输运方程如下(也为[8]中所导出的):

$$\partial S/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla S = \epsilon\nabla S - (\alpha\omega/Z)(S - S^*) \qquad (\text{在 } \Omega \times (0,T) \text{ 内}), \tag{3}$$

(ⅳ) 底床变化方程如下(也为[8]中所导出的):

$$\partial z_b/\partial t + h_1\nabla\boldsymbol{v}_1 = \alpha\omega/\rho_1(S - S^*) \qquad (\text{在 } \Omega \times (0,T) \text{ 内}), \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{v} = (u,v)$ 表示速度向量,z_s 和 z_b 分别表示水面的高度和底床的高度而且 $Z = z_s - z_b$ 表示水体的厚度(如图1所示). f 是 Coriolis 参数(可取为常数),$\boldsymbol{k}$ 表示垂直方向的单位向量,g 表示重力加速度,A 表示粘性系数,C_D 表示底床障碍物系数,S 表示沉淀物(与水混合)的质量比率(kg/m^3),ϵ 表示沉淀物的扩散系数,ω 表示沉淀微粒的下降速度,h_1 表示沉淀输运层的厚度(可视为已知函数),$\boldsymbol{v}_1$ 表示沉淀物质量输运的速度(也可视为已知函数),而 ρ_1 表示干沙的密度(可视为常数),S^* 表示依赖于 $|\boldsymbol{v}_1|$ 和 h_1 的底床运载函数(是一个经验函数,为了便于讨论这里假定其为常数).

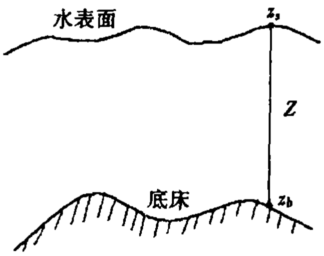

图　1

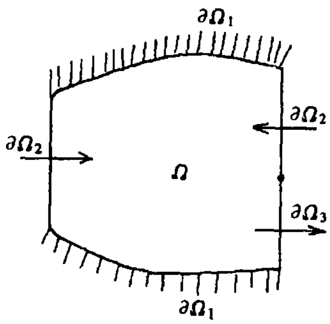

图　2

(ⅴ) 考虑边界条件如下. 首先,假定将边界分为自然边界条件和人工边界条件,并分为如下三种情形:刚性边界为 $\partial\Omega_1$,入流的横截边界为 $\partial\Omega_2$,出流或人工边界为 $\partial\Omega_3$(例如,$\partial\Omega_3$ 海湾和开阔的大海为人工边界,参见图2). 在 $\partial\Omega_1$ 上,根据物理原理,定义为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \; -\epsilon\partial S/\partial\boldsymbol{n} = \kappa(S - S^{**}) + M \qquad (\text{在 } \partial\Omega_1 \times (0,T) \text{ 上}), \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是边界上的单位外法向量(指向外面)，κ 是某个系数，$\kappa(S-S^{**})$ 是由于湍流而在边界上吸收的盐量，S^{**} 是某种饱和状态的含盐量，而 M 是由从边界流入水中的盐量(但是随边界变化被忽略)．在 $\partial\Omega_2$ 和 $\partial\Omega_3$ 上，定义为

$$\partial\boldsymbol{v}/\partial\boldsymbol{n}=\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{0},\ Z=Z_0,\ z_b=z_{b0},\ S=S_0\qquad(\text{在 }\partial\Omega_2\times(0,T)\text{ 上}),\tag{6}$$

$$\partial\boldsymbol{v}/\partial\boldsymbol{n}=\boldsymbol{B}\geqslant\boldsymbol{0},\ Z=Z_0,\ z_b=z_{b_0},\ \partial S/\partial\boldsymbol{n}=0\qquad(\text{在 }\partial\Omega_3\times(0,T)\text{ 上}),\tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}$、S_0、Z_0 和 z_{b_0} 是已知函数，$z_s|_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3}=z_{s_0}=Z_0+z_{b_0}$．

(ⅵ) 初始条件如下：

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{v}^0,\ Z(\boldsymbol{x},0)=Z^0,\ S(\boldsymbol{x},0)=S^0,\ z_b(\boldsymbol{x},0)=z_b^0\qquad(\boldsymbol{x}\in\Omega),\tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{v}^0$、S^0、Z^0 和 z_b^0 也是已知函数，$z_s(\boldsymbol{x},0)=z_s^0=Z^0+z_b^0$．

于是，问题(1)～(8)的混合有限变分问题可叙述为：

问题(Ⅰ)　求 $(\boldsymbol{v},Z,z_b,S):[0,T]\to Y_1\times Y_2\times Y_2\times Y_3$ 使得 $S|_{\partial\Omega_2}=S_0$ 满足

$$(Z_t,\phi)+(Z\operatorname{div}\boldsymbol{v},\phi)=0\qquad(\forall\phi\in Y_2),\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}_t,\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+f(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-g(Z+z_b,\operatorname{div}\boldsymbol{w})+\\&\quad A(\nabla\boldsymbol{v},\nabla\boldsymbol{w})+C_D(|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}/Z,\boldsymbol{w})=\langle\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{w}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3}-\\&\quad\langle Z_0+z_{b_0},\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3}\qquad(\forall\boldsymbol{w}\in Y_1),\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&(S_t,\psi)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla S,\psi)+\varepsilon(\nabla S,\nabla\psi)+\alpha\omega((S-S^*)/Z,\psi)+\\&\quad\kappa\langle S-S^{**},\psi\rangle_{\partial\Omega_1}+\langle M,\psi\rangle_{\partial\Omega_1}=0\qquad(\forall\psi\in Y_{03}),\end{aligned}\tag{11}$$

$$(z_{b_t},\eta)=\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S-S^*,\eta)-(h_1\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1,\eta)\qquad(\forall\eta\in Y_2),\tag{12}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{v}^0,\ Z(\boldsymbol{x},0)=Z^0,\ S(\boldsymbol{x},0)=S^0,\ z_b(\boldsymbol{x},0)=z_b^0\qquad(\boldsymbol{x}\in\Omega),\tag{8}$$

其中 $Y_1=\{\boldsymbol{w}\in H^1(\Omega)^2;\boldsymbol{w}|_{\partial\Omega_1}=\boldsymbol{0}\}$，$Y_2=L^2(\Omega)$，$Y_3=H^1(\Omega)$，$Y_{03}=\{\psi\in Y_3;\psi|_{\partial\Omega_1}=0\}$，$y_t=\partial y/\partial t$，$\langle\varphi,\psi\rangle G=\int_G\varphi\cdot\psi\mathrm{d}s$ 表示在表面 G 上的 L^2 内积．

为了讨论问题(Ⅰ)的广义解的存在唯一性，正如[2]中所述的，需要对边值数据、初始数据以及有关数作物理上和数学上均合理的如下假定：

(A_1) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in W^{3/2,\infty}(\partial\Omega)^2$，$S^{**}$、$Z_0$、$z_b^0\in W^{1/2,\infty}(\partial\Omega)$，$t\in[0,T]$．

(A_2) $\boldsymbol{v}^0\in W^{2,\infty}(\Omega)^2$、$Z_0$、$z_b^0\in W^{1,\infty}(\Omega)$，$S^0\in W^{2,\infty}(\Omega)$．

(A_3) $h_1\in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$，$\boldsymbol{v}_1\in L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))$，$S^*\in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$．

(A_4) 存在正的常数 M_* 和 M^* 使得 $M_*\leqslant\{f,g,A,C_D,\varepsilon,\alpha,\omega,\rho_1\}\leqslant M^*$．

(A_5) 假定 $\partial\Omega\times C^{l,\beta}(l\geqslant0,\beta\geqslant0)$，$S_0\in C^{l,\beta}(\partial\Omega\in[0,T])$，则存在 S_0 到 $C_0^{l,\beta}(R^2)$ 上的一个延拓(不妨仍然记为 S_0)使得

$$\|S_0\|_{l,q}\leqslant\delta\qquad(l\geqslant0,1\leqslant q\leqslant\infty),$$

其中 δ 是任意可以选择的小正数．

附注　假定(A_5)可以从 Sobolev 空间的性质[10]导出．

另外，还需要引入下面的 Gronwall 引理[12]．

引理 1　设 $g(t)$ 是$[0,t_1]$上的正的可积函数，而且 $c\geqslant0$ 是常数．如果 $\psi(t)\in C^0([0,t_1])$ 满足

$$0\leqslant\psi(t)\leqslant c+\int_0^t g(s)\psi(s)\mathrm{d}s\qquad(\forall t\in[0,t_1]),$$

那么 $\psi(t)$ 也满足

$$0 \leqslant \psi(t) \leqslant c \cdot \exp\left(\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right) \qquad (\forall t \in [0, t_1]),$$

特别地，当 $c = 0$ 时，有 $\psi(t) \equiv 0$.

定理 1 在$(\mathrm{A}_1) \sim (\mathrm{A}_5)$的假定下，问题(Ⅰ)存在唯一的解 $(\boldsymbol{v}, Z, z_b, S) \in Y_1 \times Y_2 \times Y_2 \times Y_3$ 使得 $S|_{\partial\Omega_2} = S_0$，而且存在正的常数 M_0、M_1、M_2 和 M_3 满足

$$M_0 \leqslant Z \leqslant M_1, \ \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{0,\infty} \leqslant M_2, \ \|\nabla S\|_{0,\infty} \leqslant M_3. \tag{13}$$

证明 对于给定的 $\boldsymbol{v}_1 \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\Omega)^2$, $Z_1 \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$，考虑下面线性化的问题，$(n = 2, 3, 4, \cdots)$，

$$(Z_{nt}, \phi) + (Z_n \mathrm{div} \boldsymbol{v}_{n-1}, \phi) = 0 \qquad (\forall \phi \in Y_2), \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}_{nt}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v}_n \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}) - g(Z_n + z_{bn}, \mathrm{div}\boldsymbol{w}) + \\ &\quad A(\nabla \boldsymbol{v}_n, \nabla \boldsymbol{w}) + C_D(|\boldsymbol{v}_{n-1}|\boldsymbol{v}_n / Z_{n-1}, \boldsymbol{w}) = \\ &\quad -\langle Z_0 + z_{b0}, \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} \rangle_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3} + \langle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \boldsymbol{w} \rangle_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3} \qquad (\forall \boldsymbol{w} \in Y_1),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&(S_{nt}, \psi) + (\boldsymbol{v}_{n-1} \cdot \nabla S_n, \psi) + \varepsilon(\nabla S_n, \nabla \psi) + \alpha\omega((S_n - S^*)/Z_{n-1}, \psi) + \\ &\quad \kappa\langle S_n - S^{**}, \psi \rangle_{\partial\Omega_1} + \langle M, \psi \rangle_{\partial\Omega_1} = 0 \qquad (\forall \psi \in Y_{03}),\end{aligned} \tag{16}$$

$$(z_{bn_t}, \eta) = \frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S - S^*, \eta) - (h_1 \mathrm{div}\boldsymbol{v}_1, \eta) \qquad (\forall \eta \in Y_2), \tag{17}$$

$$\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v}^0, \ Z_n(\boldsymbol{x}, 0) = Z^0, \ S_n(\boldsymbol{x}, 0) = S^0, \ z_{bn}(\boldsymbol{x}, 0) = z_b^0 \qquad (\boldsymbol{x} \in \Omega), \tag{18}$$

$$S_n|_{\partial\Omega_2} = S_0. \tag{19}$$

显然，根据线性抛物型方程的理论知，如果 Ω 是 R^2 中适当光滑的有界区域，则方程(14) ~ (19)存在唯一的解序列 $(\boldsymbol{v}_n, Z_n, z_{bn}, S_n) \in W^{1,\infty}(0, T; W^{2,\infty}(\Omega)^2 \cap Y_1) \times W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\Omega) \cap Y_2) \times W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\Omega) \cap Y_2) \times W^{1,\infty}(0, T; W^{2,\infty}(\Omega) \cap Y_3)$. 那么，由 Hilbert 空间的弱紧致性知，$\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $W^{1,\infty}(0, T; W^{2,\infty}(\Omega)^2 \cap Y_1)$ 中存在一个弱收敛并弱 * 收敛序列(由于解序列在 $W^{1,\infty}(\Omega)$ 中)，$\{S_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $W^{1,\infty}(0, T; W^{2,\infty}(\Omega) \cap Y_3)$ 中存在一个弱收敛并弱 * 收敛序列，$\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{z_{bn}\}_{n=1}^\infty$ 在 $W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\Omega) \cap Y_2)$ 中也分别存在中存在一个弱收敛并弱 * 收敛序列(不妨仍然分别记为 $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1}^\infty \{S_n\}_{n=1}^\infty$, $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{z_{bn}\}_{n=1}^\infty$)，即存在 $\boldsymbol{v} \in W^{1,\infty}(0, T; W^{2,\infty}(\Omega)^2 \cap Y_1)$, $S \in W^{1,\infty}(0, T; W^{2,\infty}(\Omega) \cap Y_3)$ 满足 $S|_{\partial\Omega_2} = S_0$, Z 和 $z_b \in W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\Omega) \cap Y_2)$ 使得

$$\boldsymbol{v}_n \xrightarrow{w, w^*} \boldsymbol{v}, S_n \xrightarrow{w, w^*} S, Z_n \xrightarrow{w, w^*} Z, z_{bn} \xrightarrow{w} z_b \qquad (n \to \infty). \tag{20}$$

由于一个弱收敛并弱 * 收敛序列必然强收敛，因此有

$$\|Z_n - Z\|_{1,\infty} \to 0, \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}\|_{1,\infty} \to 0, \|S_n - S\|_{1,\infty} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{21}$$

从而，有

$$\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{v}_n \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \ \lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{v}_{n-1} \cdot \nabla S_n, \psi) = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla S, \psi), \tag{22}$$

$$\lim_{n\to\infty}(Z_n \mathrm{div}\boldsymbol{v}_{n-1}, \phi) = (Z \mathrm{div}\boldsymbol{v}, \phi), \tag{23}$$

而且存在正的常数 M_0、M_1、M_2 和 M_3 使得

$$M_0 \leqslant Z \leqslant M_1, \|\nabla \boldsymbol{v}\|_{0,\infty} \leqslant M_2, \|\nabla S\|_{0,\infty} \leqslant M_3. \tag{24}$$

用任意的 $\chi(t) \in C^1([0, T])$, $\chi(T) = \chi(0) = 0$ 乘(14) ~ (17)并在$[0, T]$上积分，再由分部积分可得

$$-\int_0^T[(Z_n,\phi\chi')-\chi(Z_n\mathrm{div}\boldsymbol{v}_{n-1},\phi)\mathrm{d}t]=0\qquad(\forall\phi\in Y_2),\tag{25}$$

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\{(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{w}\chi')-\chi[(\boldsymbol{v}_n\cdot\nabla\boldsymbol{v}_{n-1},\boldsymbol{w})-f(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{w})+g(Z_n+z_{bn},\mathrm{div}\boldsymbol{w})-\\&\quad A(\nabla\boldsymbol{v}_n,\nabla\boldsymbol{w})-C_D(|\boldsymbol{v}_{n-1}|\boldsymbol{v}_n/Z_{n-1},\boldsymbol{w})]\}\mathrm{d}t=\\&\quad-\int_0^T\chi[\langle Z_0+z_{b0},\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3}-\langle\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{w}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3}]\mathrm{d}t\qquad(\forall\boldsymbol{w}\in Y_1),\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\{(S_n,\psi\chi')-\chi[(\boldsymbol{v}_{n-1}\cdot\nabla S_n,\psi)-\varepsilon(\nabla S_n,\nabla\psi)-\alpha\omega(S_n-S^*)/Z_{n-1},\psi)-\\&\quad\kappa\langle S_n-S^{**},\psi\rangle_{\partial\Omega_1}-\langle M,\psi\rangle_{\partial\Omega_1}]\}\mathrm{d}t\qquad(\forall\psi\in Y_{03}),\end{aligned}\tag{27}$$

$$-\int_0^T(z_{bn},\eta\chi')\mathrm{d}t=\int_0^T\chi\Big[\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S_n-S^*,\eta)-(h_1\mathrm{div}\boldsymbol{v}_1,\eta)\Big]\mathrm{d}t\qquad(\forall\eta\in Y_2),\tag{28}$$

$$(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{w})=(Z_n-Z^0,\phi)=(S_n-S^0,\psi)=(z_{bn}-z_b^0,\eta)=0\qquad(t=0),\tag{29}$$

$$\langle S_n,\psi\rangle_{\partial\Omega_2}=\langle S_0,\psi\rangle_{\partial\Omega_2}\qquad(t\in[0,T]).\tag{30}$$

在(25)~(30)中取 $n\to\infty$ 的极限,再用分部积分,并根据 $\chi(t)$ 的任意性,再由(22)和(23)可知(20)的$(\boldsymbol{v},Z,z_b,S)$满足问题(Ⅰ). 也就是说问题(Ⅰ)至少存在一个解.

设 $(\boldsymbol{v}^*,Z^*,z_b^*,\bar{S})$ 是问题(Ⅰ)的另一个有界的解,即满足问题(Ⅰ)和(13),则有

$$(Z_t-Z_t^*,\phi)+(Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}-Z^*\mathrm{div}\boldsymbol{v}^*,\phi)=0\qquad(\forall\phi\in Y_2),\tag{31}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}_t-\boldsymbol{v}_t^*,\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\cdot\nabla\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{w})+f(\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*),\boldsymbol{w})-\\&\quad g(Z+z_b-Z^*-z_b^*,\mathrm{div}\boldsymbol{w})+A(\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*),\nabla\boldsymbol{w})+\\&\quad C_D(|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}/Z-|\boldsymbol{v}^*|\boldsymbol{v}^*/Z,\boldsymbol{w})=0\qquad(\forall\boldsymbol{w}\in Y_1),\end{aligned}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}&(S_t-\bar{S}_t,\psi)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla S-\boldsymbol{v}^*\cdot\nabla\bar{S},\psi)+\varepsilon(\nabla(S-\bar{S}),\nabla\psi)+\\&\quad\alpha\omega(S/Z-\bar{S}/Z^*,\psi)+\alpha\omega(S^*/Z^*-S^*/Z,\psi)+\\&\quad\kappa\langle S-\bar{S},\psi\rangle_{\partial\Omega_1}=0\qquad(\forall\psi\in Y_{03}),\end{aligned}\tag{33}$$

$$(z_{bt}-z_{bt}^*,\eta)=\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S-\bar{S},\eta)\qquad(\forall\eta\in Y_2),\tag{34}$$

$$\boldsymbol{v}(\cdot,0)=\boldsymbol{v}^*(\cdot,0),Z(\cdot,0)=Z^*(\cdot,0),S(\cdot,0)=\bar{S}(\cdot,0),z_b(\cdot,0)=z_b^*(\cdot,0),\tag{35}$$

$$S|_{\partial\Omega_2}=\bar{S}|_{\partial\Omega_2}.\tag{36}$$

在(31)中取 $\phi=Z-Z^*$,并由(13)、Hölder 不等式和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|Z-Z^*\|_0^2\leqslant|(Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}-Z^*\mathrm{div}\boldsymbol{v}^*,Z-Z^*)|=\\&\quad|(Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}-Z^*\mathrm{div}\boldsymbol{v}+Z^*\mathrm{div}\boldsymbol{v}-Z^*\mathrm{div}\boldsymbol{v}^*,Z-Z^*)|\leqslant\\&\quad M_2\|Z-Z^*\|_0^2+M_1\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_0\|Z-Z^*\|_0\leqslant\\&\quad C\|Z-Z^*\|_0^2+\theta_0\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_0^2,\end{aligned}\tag{37}$$

其中 θ_0 和下面用到的 $\theta_i(i=1,2,\cdots)$,都是可以任意选择的小正常数. 积分该不等式由 Gronwall 引理可得

$$\|Z-Z^*\|_0^2\leqslant C\theta_0\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_{L^2(L^2)}^2.\tag{38}$$

利用(13)、Hölder 不等式和 Cauchy 不等式有

$$
\begin{aligned}
&|(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\cdot\nabla\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)|=\\
&\quad|(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}^*\cdot\nabla\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\cdot\nabla\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)|\leqslant\\
&\quad M_2\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_0^2+CM_2\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_0\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_0\leqslant\\
&\quad C\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_0^2+\theta_1\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_0^2,
\end{aligned}\tag{39}
$$

而且再由(38)有

$$
\begin{aligned}
&|(|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}/Z-|\boldsymbol{v}^*|\boldsymbol{v}^*/Z,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)|=\\
&\quad|(|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}/Z-|\boldsymbol{v}^*|\boldsymbol{v}/Z+|\boldsymbol{v}^*|\boldsymbol{v}/Z-\\
&\quad|\boldsymbol{v}^*|\boldsymbol{v}/Z^*+|\boldsymbol{v}^*|\boldsymbol{v}/Z^*-|\boldsymbol{v}^*|\boldsymbol{v}^*/Z^*,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)|\leqslant\\
&\quad C\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_0^2+\left|\left(\frac{|\boldsymbol{v}^*|\boldsymbol{v}(Z^*-Z)}{ZZ^*},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\right)\right|\leqslant\\
&\quad C\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_0^2+\theta_2\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_{L^2(L^2)}^2,
\end{aligned}\tag{40}
$$

其中 $\theta_2=C\theta_0$. 在(32)中取 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*$,由 Hölder 不等式、Cauchy 不等式、(39)、(40),并注意到$(\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)=0$, 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_0^2+A\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_0^2\leqslant\\
&\quad C\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_0^2+\frac{A}{4}\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_0^2+\frac{g^2}{2A}(\|Z-Z^*\|_0^2+\\
&\quad\|z_b-z_b^*\|_0^2)+\theta_1\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_0^2+\theta_2\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_{L^2(L^2)}^2.
\end{aligned}\tag{41}
$$

从 0 到 $t\in[0,T]$ 积分这个不等式,让 θ_0、θ_1、θ_2 足够地小使得 $\theta_1+T\theta_2+g^2C\theta_0/(2A)\leqslant A/4$,并由 Gronwall 引理和(38)可得

$$
\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_0^2+A\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_{L^2(L^2)}^2\leqslant C\|z_b-z_b^*\|_{L^2(L^2)}^2,\tag{42}
$$

$$
\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_{L^2(L^2)}^2+A\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_{L^2(L^2)}^2\leqslant C\|z_b-z_b^*\|_{L^2(L^2)}^2.\tag{43}
$$

在(33)中取 $\psi=S-\bar{S}$, 由(13)、Hölder 不等式和 Cauchy 不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S-\bar{S}\|_0^2+\varepsilon\|\nabla(S-\bar{S})\|_0^2+\kappa\|S-\bar{S}\|_{0,\partial\Omega_1}\leqslant\\
&\quad|(\boldsymbol{v}\cdot\nabla S-\boldsymbol{v}^*\cdot\nabla S+\boldsymbol{v}^*\cdot\nabla S-\boldsymbol{v}^*\cdot\nabla\bar{S},S-\bar{S})+\\
&\quad\alpha\omega(S/Z-\bar{S}/Z^*,S-\bar{S})-\alpha\omega(S^*/Z-S^*/Z^*,S-\bar{S})|\leqslant\\
&\quad\theta_3\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_0^2+\theta_4\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_0^2+(\varepsilon/2)\|\nabla(S-\bar{S})\|_0^2+\\
&\quad\theta_5\|Z-Z^*\|_0^2+C\|\nabla(S-\bar{S})\|_0^2.
\end{aligned}\tag{44}
$$

积分这个不等式并利用 Gronwall 引理、(38)和(43)可得

$$
\begin{aligned}
&\|S-\bar{S}\|_0^2+\varepsilon\|\nabla(S-\bar{S})\|_{L^2(L^2)}^2\leqslant\\
&\quad C\theta_3\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*\|_{L^2(L^2)}^2+C\theta_4\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^*)\|_{L^2(L^2)}^2+\\
&\quad C\theta_5\|Z-Z^*\|_{L^2(L^2)}^2\leqslant\theta_6\|z_b-z_b^*\|_{L^2(L^2)}^2,
\end{aligned}\tag{45}
$$

其中 $\theta_6=C(\theta_3+\theta_4+\theta_0\theta_5)$. 在(34)中取 $\eta=z_b-z_b^*$, 并利用 Hölder 不等式和 Cauchy 不等式可得

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z_b-z_b^*\|_0^2\leqslant C\|z_b-z_b^*\|_0^2+\theta_7|S-\bar{S}|_0^2.\tag{46}
$$

积分这个不等式,并由(44)和 Gronwall 引理可得

$$
\|z_b-z_b^*\|_{L^2(L^2)}\leqslant C\theta_6\theta_7\|z_b-z_b^*\|_{L^2(L^2)}.\tag{47}
$$

让 θ_6、θ_7 足够地小使得 $C\theta_6\theta_7 \leqslant 1/2$ 可得 $z_b = z_b^*$. 因此,由(43)、(45) 和(38) 可得 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^*$、$S = \bar{S}$ 和 $Z = Z^*$. 这就证明了问题(Ⅰ)的解是唯一的. 定理 1 证毕.

2　包含泥沙冲淤的浅水方程的混合有限元解的存在性及其误差分析

设 $\mathscr{T}_h$ 是剖分单元为 $K_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 的拟一致三角形剖分[13~14],并记 $\mathrm{diam}(K_i) = h_i$ 和 $h = \max\{h_i; i = 1,2,\cdots,k\}$. 定义三个有限元空间 $Y_{1h} \subset Y_1$、$Y_{2h} \subset Y_2$ 和 $Y_{3h} \subset Y_3$ 如下:

$$Y_{1h} = \{\boldsymbol{w}_h \in Y_1 \cap C^0(\bar{\Omega})^2;\ \boldsymbol{w}_h|_K \in \boldsymbol{P}_{m+1}(K)^2, \forall K \in \mathscr{T}_h\};\tag{48}$$

$$Y_{2h} = \{\phi_h \in Y_2;\ \phi_h|_K \in P_m(K), \forall K \in \mathscr{T}_h\};\tag{49}$$

$$Y_{3h} = \{\psi_h \in Y_3 \cap C^0(\bar{\Omega});\ \psi_h|_K \in \boldsymbol{P}_{m+1}(K), \forall K \in \mathscr{T}_h\};\tag{50}$$

其中 $m \geqslant 0$ 是整数,$P_m(K)$ 表示次数不超过 m 的多项式空间. 那么,问题(Ⅰ)的混合有限元解可叙述为:

问题(Ⅰ$_h$)　求 $(\boldsymbol{v}_h, Z_h, z_{bh}, S_h):[0,T] \to Y_{1h} \times Y_{2h} \times Y_{2h} \times Y_{3h}$ 使得 $S_h|_{\partial\Omega_2} = S_0$ 满足

$$(Z_{ht}, \phi_h) + (Z_h \mathrm{div}\boldsymbol{v}_h, \phi_h) = 0 \qquad (\forall \phi_h \in Y_{2h});\tag{51}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}_{ht}, \boldsymbol{w}_h) + (\boldsymbol{v}_h \cdot \nabla \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) + f(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) - g(Z_h + z_{bh}, \mathrm{div}\boldsymbol{w}_h) +\\ &\quad A(\nabla \boldsymbol{v}_h, \nabla \boldsymbol{w}_h) + C_D(|\boldsymbol{v}_h|\boldsymbol{v}_h/Z_h, \boldsymbol{w}_h) =\\ &\quad -\langle Z_0 + z_{b0}, \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{n}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3} + \langle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \boldsymbol{w}_h\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3} \qquad (\forall \boldsymbol{w}_h \in Y_{1h}),\end{aligned}\tag{52}$$

$$\begin{aligned}&(S_{ht}, \psi_h) + (\boldsymbol{v}_h \cdot \nabla S_h, \psi_h) + \varepsilon(\nabla S_h, \nabla \psi_h) + \alpha\omega((S_h - S^*)/Z_h, \psi_h) +\\ &\quad \kappa\langle S_h - S^{**}, \psi_h\rangle_{\partial\Omega_1} + \langle M, \psi_h\rangle_{\partial\Omega_1} = 0 \qquad (\forall \psi_h \in Y_{03h}),\end{aligned}\tag{53}$$

$$(z_{bht}, \eta_t) = \frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S_h - S^*, \eta_h) - (h_1 \mathrm{div}\boldsymbol{v}_1, \eta_h) \qquad (\forall \eta_h \in Y_{2h}),\tag{54}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x},0) = P_v\boldsymbol{v}^0, Z_h(\boldsymbol{x},0) = r_h Z^0,\\ S_h(\boldsymbol{x},0) = R_h S^0, z_{bh}(\boldsymbol{x},0) = r_h z_b^0 \qquad (\boldsymbol{x} \in \Omega),\end{cases}\tag{55}$$

其中 $Y_{03h} = Y_{03} \cap Y_{3h}$, $S_h|_{\partial\Omega_2} = S_0$ 表示满足(A_5) 的函数 S_0 在 $\bar{\Omega}$ 上的插值并在 $\partial\Omega_2$ 上满足此不等式,P_h 表示从 Y_1 到 Y_{1h} 内的 L^2 投影,即对于任意的 $\boldsymbol{w} \in Y_1$ 都满足

$$(\boldsymbol{w} - P_h\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_h) = 0 \qquad (\forall \boldsymbol{w}_h \in Y_{1h});\tag{56}$$

又,r_h 表示从 Y_2 到 Y_{2h} 内的 L^2 投影,即对于任意的 $\phi \in Y_2$ 都满足

$$(\phi - r_h\phi, \phi_h) = 0 \qquad (\forall \phi_h \in Y_{2h});\tag{57}$$

最后,R_h 表示从 Y_3(或 Y_{03}) 到 Y_{3h}(或 Y_{03h}) 内的 L^2 投影,即对于任意的 $\psi \in Y_3$(或 Y_{03h}) 都满足

$$(\psi - R_h\psi, \psi_h) = 0 \qquad (\forall \psi_h \in Y_{3h}\text{或 } Y_{03});\tag{58}$$

易知,算子 P_h、r_h 和 R_h 满足下面的逼近性质[13~15]:

$$\|\boldsymbol{w} - P_h\boldsymbol{w}\|_s \leqslant Ch^{r-s}\|\boldsymbol{w}\|_r \qquad (\boldsymbol{w} \in H^r(\Omega)^2; s = 0,1;\ s \leqslant r < m+2),\tag{59}$$

$$\|\phi - r_h^r\phi\|_s \leqslant Ch^{r-s}\|\phi\|_r \qquad (\phi \in H^r(\Omega)^2; s = 0,1;\ s \leqslant r \leqslant m+1),\tag{60}$$

$$\|\psi - R_h^R\psi\|_s \leqslant Ch^{r-s}\|\psi\|_r \qquad (\psi \in H^r(\Omega); s = 0,1;\ s \leqslant r \leqslant m+2),\tag{61}$$

为了分析问题(Ⅰ$_h$)的混合有限元解的存在性及其误差估计,还需要对 Z_h 和$\boldsymbol{v}_h$ 作类似于[2] 中的、物理上合理的有界性假定,即存在不仍赖于 h 的正的常数 C_0、C_1 和 C_2 使得

$$C_0 \leqslant Z_h \leqslant C_1;\ \|\boldsymbol{v}_h\|_{L^\infty(W^{1,\infty})} \leqslant C_2.\tag{62}$$

定理 2　在定理 1 和(62)的假定下,问题(I_h)存在唯一的解.

证明　由于问题 (I_h) 是一个常微分方程组,所以由 Carathéodory 定理可知,其在 $[0,t_h]$, $t_h \leqslant T$ 上存在一组局部的最大解. 在(53) 中取 $\psi_h = S_h - S_0$, 并利用假定(62)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi_h\|_0^2+\varepsilon\|\psi_h\|_0^2+\kappa\|\psi_h\|_{0,\partial\Omega_1}^2+\frac{\alpha\omega}{C_1}\|\psi_h\|_0^2\leqslant$$
$$|(\boldsymbol{v}_h\nabla(\psi_h+S_0),\psi_h)|+\frac{\alpha\omega}{C_0}|(S_0-S^*,\psi_h)|+|(S_{0t},\psi_h)|+$$
$$\varepsilon(\nabla S_0,\psi_h)+\kappa|\langle S_0-S^*,\psi_h\rangle_{\partial\Omega_1}|+|\langle M,S_h\rangle_{\partial\Omega_1}|\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\psi_h\|_0^2+C\|\psi_h\|_0^2+C\|S_0-S^*\|_{0,\partial\Omega_1}^2+CM+$$
$$\frac{\kappa}{2}\|\psi_h\|_{0,\partial\Omega_1}^2+C\|S_{0t}\|_0^2+C\|\nabla S_0\|_0^2. \tag{63}$$

积分这个不等式并利用 Gronwall 引理可得

$$\|S_h\|_0^2+\varepsilon\|\nabla S_h\|_{L^2(L^2)}^2+\kappa\|\nabla S_h\|_{L^2(L^2(\partial\Omega_1))}^2\leqslant$$
$$2(\|\psi_h\|_0^2+\varepsilon\|\nabla\psi_h\|_{L^2(L^2)}^2+\kappa\|\psi_h\|_{L^2(L^2(\partial\Omega_1))}^2+$$
$$\|S_0\|_0^2+\varepsilon\|\nabla S_0\|_{L^2(L^2)}^2+\kappa\|\nabla S_0\|_{L^2(L^2(\partial\Omega_1))}^2)\leqslant$$
$$C\|S_0-S^*\|_{L^2(L^2(\partial\Omega_1))}^2+CM+C\|S^0\|_0^2+$$
$$C\|S_{0t}\|_0^2+C\|\nabla S_0\|_0^2\equiv M_3. \tag{64}$$

在(54)中取 $\eta_h = z_{bh}$, 并同(64)可有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z_{bh}\|_0^2\leqslant C\|z_{bh}\|_0^2+M_4^2. \tag{65}$$

积分(65),又用 Gronwall 引理可得

$$\|z_{bh}\|_0^2\leqslant 2CTM_4^2+C\|z_b^0\|_0^2\equiv M_5. \tag{66}$$

由(62)、(64)和(66)可知,问题 (I_h) 的局部解可延拓为$[0,T]$上的整体解. 与定理 1 的证明方法同理,可证明问题(I_h) 的解是唯一的. 定理 2 证毕.

定理 3　在定理 1 和 2 的假定下,如果问题(Ⅰ)的解 $(\boldsymbol{v},Z,z_b,S)\in H^{m+2}(\Omega)^2\times H^{m+1}(\Omega)\times H^{m+1}(\Omega)\times H^{m+2}(\Omega)$, 那么下面误差估计成立:

$$\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(L^2)}+|\nabla(S-S_h)|_{L^2(L^2)}\leqslant Ch^{m+1}, \tag{67}$$
$$\|Z-Z_h\|_{L^2(L^2)}+|z_b-z_{bh})|_{L^2(L^2)}\leqslant Ch^{m+1}, \tag{68}$$

证明　在问题(Ⅰ)中取 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_h$、$\phi=\phi_h$、$\psi=\psi_h$ 和 $\eta=\eta_h$ 并与问题(I_h)相减可得下面的误差方程:

$$(Z_t-Z_{ht},\phi)+(Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}-Z_h\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h,\phi)=0\qquad(\forall\phi_h\in Y_{2h}), \tag{69}$$
$$(\boldsymbol{v}_t-\boldsymbol{v}_{ht},\boldsymbol{w}_h)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)+f(\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h),\boldsymbol{w}_h)-$$
$$g(Z+z_b-Z_h-z_{bh},\mathrm{div}\boldsymbol{w}_h)+A(\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h),\nabla\boldsymbol{w}_h)+$$
$$C_D(|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}/Z-|\boldsymbol{v}_h|\boldsymbol{v}_h/Z_h,\boldsymbol{w}_h)=0\qquad(\forall\boldsymbol{w}_h\in Y_{1h}), \tag{70}$$
$$(S_t-S_{ht},\psi_h)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla S-\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla S_h,\psi_h)+\varepsilon(\nabla(S-S_h),\nabla\psi_h)+$$
$$\alpha\omega(S/Z-S_h/Z_h,\psi_h)-\alpha\omega(S^2/Z-S^*/Z_h,\psi_h)+$$
$$\kappa\langle S-S_h,\psi_h\rangle_{\partial\Omega_1}=0\qquad(\forall\psi_h\in Y_{03h}), \tag{71}$$
$$(z_{bt}-z_{bht},\eta_h)=(\alpha\omega/\rho_1)(S-S_h,\eta_h)\qquad(\forall\eta_h\in Y_{2h}). \tag{72}$$

由(69)、(57)、Hölder 不等式、Cauchy 不等式、(62)和(13)可有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|Z-Z_h\|_0^2 &= (Z_t-Z_{ht},Z-Z_h)= \\
&(Z_t-r_hZ_t,Z-r_hZ)+(Z_t-Z_{ht},r_hZ-Z_h)= \\
&(Z_t-r_hZ_t,Z-r_hZ)-(Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}-Z_h\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h,r_hZ-Z_h)\leqslant \\
&(Z_t-r_hZ_t,Z-r_hZ)+(Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}-Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h+Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h-Z_h\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h,Z-r_hZ)+ \\
&(Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}-Z\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h+Z_h\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h-Z_h\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h,Z_h-Z)\leqslant \\
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|Z-r_hZ_h\|_0^2+ \\
&C\|Z-Z_h\|_0^2+\theta_8\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_0^2+C\|Z-r_hZ\|_0^2. \qquad (73)
\end{aligned}$$

从 0 到 $t\in[0,T]$ 积分(73),并用 Gronwall 引理和(60)可得

$$\|Z-Z_h\|_0^2\leqslant Ch^{2(m+1)}+C\theta_8\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(L^2)}^2. \qquad (74)$$

由(70)、(56)、Hölder 不等式、Cauchy 不等式、(62)、(13)和(74),而且与(39)~(41)同理可有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\|_0^2 &= (\boldsymbol{v}_t-\boldsymbol{v}_{ht},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)= \\
&(\boldsymbol{v}_t-P_h\boldsymbol{v}_t,\boldsymbol{v}-P_h\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}_t-\boldsymbol{v}_{ht},P_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)= \\
&(\boldsymbol{v}_t-P_h\boldsymbol{v}_t,\boldsymbol{v}-P_h\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla\boldsymbol{v}_h,P_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)- \\
&f(\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h),P_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)-A(\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h),\nabla(P_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h))+ \\
&g(Z+z_b-Z_h-z_{bh},\mathrm{div}(P_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h))- \\
&C_D(|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}/Z-|\boldsymbol{v}_h|\boldsymbol{v}_h/Z_h,P_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\leqslant \\
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{v}-P_h\boldsymbol{v}\|_0^2-\frac{A}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_0^2+C\|\nabla(\boldsymbol{v}-P_h\boldsymbol{v})\|_0^2+ \\
&C\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\|_0^2+C\|\boldsymbol{v}-P_h\boldsymbol{v}\|_0^2+C\|z_b-z_{bh}\|_0^2+ \\
&Ch^{2(m+1)}+C\theta_8\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(L^2)}^2. \qquad (75)
\end{aligned}$$

从 0 到 $t\in[0,T]$ 积分这个不等式,取 $CT\theta_8=A/4$,并利用(59)可得

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\|_0^2+\frac{A}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(L^2)}^2\leqslant \\
&Ch^{2(m+1)}+C\int_0^t\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\|_0^2\mathrm{d}s+C\|z_b-z_{bh}\|_{L^2(L^2)}^2. \qquad (76)
\end{aligned}$$

再利用 Gronwall 引理可得

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\|_0^2+A\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(L^2)}^2\leqslant Ch^{2(m+1)}+C\|z_b-z_{bh}\|_{L^2(L^2)}^2. \qquad (77)$$

由(58)、(71)、Hölder 不等式、Cauchy 不等式、(62)和(13),并与(44)~(45)同理可有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S-S_h\|_0^2 &= (S_t-S_{ht},S-S_h)= \\
&(S_t-R_hS_t,S-R_hS)+(S_t-S_{ht},R_hS-S_h)= \\
&(S_t-R_hS_t,S-R_hS)-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla S-\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla S_h,R_hS-S_h)- \\
&\varepsilon(\nabla(S-S_h),\nabla(R_hS-S_h))-\alpha\omega(S/Z-S_h/Z_h,R_hS-S_h)+ \\
&\alpha\omega(S^*/Z-S^*/Z_h,R_hS-S_h)-\kappa\langle S-S_h,R_hS-S_h\rangle_{\partial\Omega_1}\leqslant \\
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S-R_hS\|_0^2-\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla(S-S_h)\|_0^2+\theta_9\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_0^2+ \\
&C\|\nabla(S-R_hS)\|_0^2+C\|S-S_h\|_0^2+\theta_{10}\|Z-Z_h\|_0^2. \qquad (78)
\end{aligned}$$

从 0 到 $t\in[0,T]$ 积分(78),由(61)、(74)、(77)、Gronwall 引理可得

$$\|S-S_h\|_0^2+\varepsilon\|\nabla(S-S_h)\|_{L^2(L^2)}^2\leqslant Ch^{2(m+1)}+\theta_{11}\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_{L^2(L^2)}^2. \qquad (79)$$

其中 $\theta_{11} = C(\theta_9 + \theta_{8_{10}})$. 由(72)、(57)、Hölder 不等式、Cauchy 不等式和(79)可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| z_b - z_{bh} \|_0^2 = (z_{bt} - z_{bht}, z_b - z_{bh}) = \\
&\quad (z_{bt} - r_h z_{bt}, z_b - r_h z_b) + (z_{bt} - z_{bht}, r_h z_b - z_{bh}) = \\
&\quad (z_{bt} - r_h z_{bt}, z_b - r_h z_b) + \frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S - S_h, r_h z_b - z_{bh}) \leqslant \\
&\quad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| z_b - r_h z_b \|_0^2 + \theta_{11}\| S - S_h \|_0^2 + C\| z_b - r_h z_b \|_0^2 + C\| z_b - z_{bh} \|_0^2 \leqslant \\
&\quad Ch^{2(m+1)} + C\theta_{11}\theta_{12}\| \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) \|_{L^2(L^2)}^2 + \\
&\quad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| z_b - r_h z_b \|_0^2 + C\| z_b - r_h z_b \|_0^2.
\end{aligned}
\tag{80}
$$

从 0 到 $t \in [0, T]$ 积分(80),由(60)、Gronwall 引理可得

$$
\| z_b - z_{bh} \|_0^2 \leqslant Ch^{2(m+1)} + C\theta_{11}\theta_{12}\| \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) \|_{L^2(L^2)}^2. \tag{81}
$$

将(81)代入(77)可得

$$
\begin{aligned}
&\| \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h \|_0^2 + A\| \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) \|_{L^2(L^2)}^2 \leqslant \\
&\quad Ch^{(m+1)} + C\theta_{11}\theta_{12}\| \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) \|_{L^2(L^2)}^2.
\end{aligned}
\tag{82}
$$

在(82)中让 θ_{11} 和 θ_{12} 足够地小使得 $C\theta_{11}\theta_{12} \leqslant A/2$ 可得

$$
\| \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h \|_0^2 + \| \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) \|_{L^2(L^2)}^2 \leqslant Ch^{2(m+1)}. \tag{83}
$$

由(74)、(79)、(81)和(83)可得(67)和(68). 定理 4 证毕.

附注　(3)和(4)中的经验函数 S^* 可取为如下:

$$
S^* = \gamma(|\boldsymbol{v}|/gZ\omega)^{\tau}, \tag{84}
$$

其中 γ 和 τ 是经验常数. 这样,用定理 1 ~ 3 同样的论证方法可得到同样的结论. 此外,如果 $m > 0$,可以将有限元空间取为 $Y_{2h} \subset C^0(\bar{\Omega})$,那么问题(Ⅰ$_h$)在$[0, t_h]$, $t_h \leqslant T$上存在一个连续的局部最大解. 进一步,容易证明

$$
\begin{cases}
C_0 \leqslant Z_h \leqslant C_1, \ \| \boldsymbol{v}_h \|_{0,\infty} \leqslant C_3, \ \| \nabla \boldsymbol{v}_h \|_{L^\infty(L^2)} \leqslant C_4, \\
\| S_h \|_{0,\infty} \leqslant C_5, \ \| \nabla S_h \|_{L^\infty(L^2)} \leqslant C_6,
\end{cases}
\tag{85}
$$

其中 C_0、C_1、C_3、C_4、C_5 和 C_6 是与 h 无关的常数. 因此,这个$[0, t_h]$, $t_h \leqslant T$上连续的局部最大解可延拓为$[0, T]$上的整体连续解. 这样,可以用(85)替换假定(62),并能得到定理 2 ~ 3 同样的结果.

到此,我们已经分析了包含泥沙冲淤的完全非线性浅水方程的广义解和半离散化的混合有限元解的存在唯一性,并导出了半离散化的混合有限元解的最优阶估计. 关于问题(Ⅰ$_h$)沿着特征方向离散时间的全离散化方法将在本问题的第(Ⅱ)部分讨论. 我们将证明这种全离散化的混合有限元法具有很好的收敛性.

[参 考 文 献]

[1]　Bermúdez A, Rodríguez C, Vilar M A. Solving shallow water equations by a mixed implicit finite element method[J]. *IMA J Numer Anal*, 1991, **11**(1): 79—97.

[2]　Chipada S, Dawson C N, Martinez M L, *et al*. Finite element approximations to the system of shallow water equations Ⅰ: Continuous-time a priori error estimates[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1998, **35**(2): 692—711.

[3]　Agoshkov V I, Ovchinnikov E, Quarteroni A, *et al*. Recent developments in the numerical simulation of shallow water equations Ⅱ: Temporal discretization[J]. *Math Models Methods Appl Sci*, 1994, **55**(4): 533—566.

[4] Agoshkov V I, Quarteroni A, Saleri F. Recent developments in the numerical simulation of shallow water equation Ⅰ: Boundary conditions[J]. *Appl Numer Math*, 1994, **15**(1): 175—200.

[5] Gray W G. A finite element study of tidal flow data for the north sea and English channel[J]. *Adv Water Res*, 1989, **12**(1): 143—154.

[6] Gray W G, Drolet J, Kinnmark I P E. A simulation of tidal flow in the southern part of the north sea and English channel[J]. *Adv Water Res*, 1987, **10**(1): 131—137.

[7] GUO Dong-jian, ZENG Qing-cun, ZHU Jiang, *et al*. Long-term computational modelling research on river sedimentation and delta evolution[J]. *Climatic and Environmental Research*, 1996, **1**(1): 30—37.

[8] ZENG Qing-cun. Silt sedimentation and relevant engineering problem—an example of natural cybernetics[A]. ICIAM95 held in Hamburg, In: *Proceeding of the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, Akademie Verlag, 1995, 463—487.

[9] ZHU Jiang, ZENG Qing-cun, GUO Dong-jian, *et al*. Sensitivity analysis of hydraulic/sediment transport numerical model[J]. *J Sediment Research*, 1998, **1**(2): 89—96.

[10] Adams R A. *Sobolev Spaces*[M]. New York: Academic Press, 1975.

[11] 忻孝康,刘儒勋,蒋伯诚.计算流体动力学[M].长沙:国防科技大学出版社,1989.

[12] Girault V, Raviart P A. *Finite Element Approximations of the Navier-Stokes Equations*[M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1979.

[13] Ciarlet P G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.

[14] 罗振东.有限元混合法理论基础及其应用,发展与应用[M].济南:山东教育出版社,1996.

[15] Brezzi F, Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*[M]. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.

Mixed Finite Element Methods for the Shallow Water Equations Including Current and Silt Sedimentation (Ⅰ)—The Continuous-Time Case

LUO Zhen-dong[1,2], ZHU Jiang[2], ZENG Qing-cun[2], XIE Zheng-hui[2]

(1. *Department of Mathematics, Capital Normal University, Beijing* 100037, *P. R. China*;

2. *Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100029, *P. R. China*)

Abstract: An initial-boundary value problem for shallow equation system consisting of water dynamics equations, silt transport equation, the equation of bottom topography change, and of some boundary and initial conditions is studied, the existence of its generalized solution and semidiscrete mixed finite element(MFE) solution was discussed, and the error estimates of the semidiscrete MFE solution was derived. The error estimates are optimal.

Key words: mixed finite element method; shallow water equation; error estimate; current and silt sedimentation