应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 05_0507_11

Steiner 选择和算子的集值扩张( )理论结果

皮佐尔 特尔文, 米古尔 拉皮兹 迪亚兹

(西班牙 奥威索大学, s/ n 33007 奥威索, 西班牙)

(张石生推荐)

摘要: 提出了一种从连续函数空间到连续集值函数空间中扩张算子的方法 这种扩张是通过 Steiner 集值函数选择法得到的 此外, 还研究了其性质及该类算子序列的收敛特性 在文章的第( ) 部分, 还将给出在逼近理论中的一些应用

关 键 词: 集值扩张; Steiner 选择; 算子

中图分类号: O177 91 文献标识码: A

引 言

本文的主要目的是: 说明如何利用选择法将在连续函数空间中定义的算子, 扩张成一个定义在连续集值函数空间中的算子

首先, 按通常概念: 设 E 是一个 Polish 空间, X 为在E 的某些多维子空间中取值的连续函数, 且设 T 是一个在E_值连续函数空间中的算子 然后取 X 的映象为具有Castaing 表示的映象集的集值函数, 该映象集为X 的Castaing 表示的算子T 的映象集合 很显然, 这一结构取决于所选择的 Castaing 表示: 若取 $E = \mathbf{R}$, X 设为常值且不是单值的, 则 X 具有常值函数的 Castaing 表示, 同时还具有至少一个连续但非常值函数的表示 为了看出不同的表示产生不同的像(即使对线性连续算子也例外) 这只要取 T 为到常值函数子空间上的正交投影

其次, 可采用两种不同的方法: 一种是采用所有连续选择类型, 另一种是采用一个判定法来确定表示的每一集值函数的选择类型 例如, 第一种是通过将所有可积选择 合并(putting together) 的方法, 来定义 Aumann 积分 对于第二种, 本文将进行探讨, 多维空间的元素参数化并利用此参数集搜索选择的类型来 表示(represent) 每一集值函数 研究中, 取所有连续选择作为集值函数的 表示式(representatives) 在许多情形下可能不合理或不恰当 但因选择仅在整体上是连续的, 这就简化了对原函数 X 的研究, 对于缺少的选择和 X 相关的性质就可不必研究了 很多情况, 是为了尽可能多地表示 X 的特性(常数的特性, Lipschitz 特性, 等等) 由于此结果, 表示算子 T 的特性也可能失败 另一个关键就是相对于选择的有关 X 的一些特

收稿日期: 2001_05_20; 修订日期: 2001_11_28

基金项目: 西班牙 FPI 基金资助课题(98_71701353) ; DGES 基金资助课题(PB98_1534) ; DGESIC 基金资助课题(PB97_1286)

注: 原文为英文, 由陈兴芜 译, 张石生 校

性, 对于所有连续选择来说, 可能不真实, 但的确已是够了 例如, 将看到 X(不须连续) 可由与 X 同样光滑一致(在连续模和达到一般常数方面) 的选择类型所 填充(filled) 若考虑 X 的所有选择甚至连续的 X 的所有连续均匀选择, 这类特性(例如相关的逼近理论, 其中根据涉及的函数的连续模给出的许多结论和不等式) 将不可能获得 所有这一切说明采用适当的参数化方法来扩张算子是非常有意义的

本文在由凸体的 Steiner 质心建立的一些选择的基础上, 选定了已知的参数化方法 Steiner 质心可认为是物体的质量中心 由于 Steiner 选择的优良特性, 通常将其作为获得 Lipschitz 质量选择的常用工具 利用 Steiner 选择, $\mathbf{R}^n$ 的每一个非空紧凸子集的参数化, 可用 $\mathbf{R}^n$ 的闭单位球作为参数集来进行 该球的紧性是在许多扩张算子的重要特性的基础上建立起来的 此外, 也可对其更基本的意义进行研究 本文第 4 节中, 在比较了度量投影和广义的 Steiner 质心[1] 的基础上, 对参数化方法, 作了进一步的正面和反面说明

尽管不能在后面的文章中清楚地全面反映出来, 但我们还是尽量多地列出它们的一些优良特性:

) 参数集合是紧的

) Hausdorff 意义下的收敛等价于在参数集中选定的选择的一致收敛性

) X 的 Hausdorff 连续性(相应的 Lipschitz 性质) 等价于选定的选择的等度连续性的(相应的一致的 Lipschitz 性质)

) 选定的选择与 X 一样的光滑

本文结构如下: 预备概念和结果放在第 1 节, 并在第 2 节中加以应用, 以研究选定的选择类型和定义的扩张算子, 并研究它们特性 命题 2 5 证明了扩张算子是保持 Lipschitz 性质的; 而在命题 2 6 中, 得出了一个变换函数的 Castaing 表示 第 3 节研究当原算子是线性和范数有界时, 这些算子序列的收敛性 最后, 在第 4 节, 对所得结论作了一些说明

1 预 备 知 识

本文以后总设(,) 是一个紧拓扑空间, 而 $C(\ , \mathbf{R}^n)$ 表示连续函数 f: $\mathbf{R}^n$ 的连续函数的类 在该类中, 假定拓扑由上确界范数(记为) 导出

设 $\mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$ 表 $\mathbf{R}^n$ 的一类非空紧子集, $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ 是凸体的子类, 而 B 表示集合 $\{x\ \ \mathbf{R}^n: |x|\ \ 1\}$, 其中 $|\ |$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Euclidean 范数

空间 $\mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$ 赋以由 Minkowski 加法和纯量乘法所给出的线性结构, 即: $A+\ E=\{a+e\,|\,a\ \ A, e\ \ E\}$, $A=\{\ a\,|\,a\ \ A\}$, 对一切 $A, E\ \ \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$, 且 $\ \ \mathbf{R}$

给定 $A, E\ \ \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$, 在 A 和 E 之间 Hausdorff 距离定义为

$$d_H(A, E) = \max\left\{\sup_{a\ A}\inf_{e\ E}|a-e|, \sup_{e\ E}\inf_{a\ A}|a-e|\right\},$$

则 $(\mathscr{K}(\mathbf{R}^n), d_H)$ 是一个完备可分离的度量空间, 且 $(\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n), d_H)$ 是一闭子空间(见 Debreu [2])

如果 $A\ \ \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$, 它的大小记为 $A_{\mathscr{K}}$, 定义为:

$$A_{\mathscr{K}} = d_H(\{0\}, A) = \sup_{x\ A}|x|$$

这种度量具有如下一些熟知的性质:

) $d_H(\mathrm{co}A, \mathrm{co}E)\ \ d_H(A, E)$,

) $d_H(A, E) = \inf\{ > 0 \mid A \quad E + \quad B, E \quad A + \quad B)$,

) $d_H(\{a\}, \{b\}) = | a - b |$,

) $d_H(\{a_i\}_{i \quad I}, \{b_i\}_{i \quad I}) \quad \sup_{i \quad I} | a_i - b_i |$,

) $d_H(aA, bA) \quad | a - b | \quad A \quad \mathscr{K}$

其中 $A, E \quad \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$, $a, b \quad \mathbf{R}$, co 表示凸包, $\mathbf{I}$ 是指标集, $\{a_i\}_{i \quad \mathbf{I}}, \{b_i\}_{i \quad \mathbf{I}} \quad \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$

在 $\mathbf{R}^n$ 的单位球面 S^{n-1} 上借助于支撑函数 $: \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n) \quad C(S^{n-1}, \mathbf{R})$, 可以把 $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ 嵌入连续实函数的 Banach 空间 $C(S^{n-1}, \mathbf{R})$ 中, 且 $K \mid \quad (\ , K): S^{n-1} \quad \mathbf{R}$, $(r, K) = \sup_{a \quad \mathscr{K}} r, a$ 为 , 是 $\mathbf{R}^n$ 中纯量积 这样可得到: 对于一切 $A, E \quad \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$, 有

$d_H(A, E) = \quad (\ , A) - \quad (\ , E)$

设 $(\ , \mathscr{A})$ 是可测空间, 若它是 $\mathscr{A}\_\mathscr{B}_{d_H}$ 可测的, 则集值函数 $X: \quad \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$ 称为可测的, 其中 $\mathscr{B}_{d_H}$ 表示在 $\mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$ 中的 Borel 域 显然, 在 中, 若 $\mathscr{A}$ 是 Borel 域, 则任何连续集值函数也是可测的

另一方面, 若 $X: \quad \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$ 是一个集值函数, 则 $\mathrm{co}X: \quad \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ 定义为: $\mathrm{co}X(t) = \mathrm{co}(X(t))$ 对一切 t

用 $C(\ , \mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$ (相应地 $C(\ , \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)))$ 表示一类连续集值函数 $X: \quad \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$ (相应地, $X: \quad \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)))$

在 $C(\ , \mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$ 中, 我们可以考虑由下式定义的 D_H 度量:

$D_H(X, Y) = \sup_t d_H(X(t), Y(t))$,

其中 $X, Y \quad C(\ , \mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$

由 Hausdorff 度量的特性可得出这种度量的几个性质:

) $D_H(\mathrm{co}X, \mathrm{co}Y) \quad D_H(X, Y)$;

) $D_H(X, Y) = \inf\{ > 0 | X(t) \quad Y(t) + \quad B, Y(t) \quad X(t) + \quad B, \quad t \quad \}$;

) $D_H(\{f(\ )\}, \{g(\ )\}) = \quad f - g \quad$, 对于所有 $f, g \quad C(\ , \mathbf{R}^n)$;

) $D_H(\{f_i(\ )\}_{i \quad \mathbf{I}}, \{g_i(\ )\}_{i \quad \mathbf{I}}) \quad \sup_{i \quad \mathbf{I}} \quad f_i - g_i \quad$;

) $D_H(fA, gA) \quad f - g \quad A \quad \mathscr{K}$

其中, $X, Y \quad C(\ , \mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$, $A \quad \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$, co 表示凸包, $f, g, f_i, g_i \quad C(\ , \mathbf{R}^n)$, $\mathbf{I}$ 是指标集, $\{f_i(\ )\}_{i \quad \mathbf{I}}, \{g_i(\ )\}_{i \quad \mathbf{I}} \quad C(\ , \mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$

给定 $X \quad C(\ , \mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$, 用 $X \quad _C$ 表示值

$D_H(X, \{0\}) = \sup_t \quad X(t) \quad \mathscr{K}$

假定 $(\ , \mathscr{A})$ 是一个可测空间, 且 $X: \quad \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$ 可测 一族可测函数 $\{f_m\}_{m \quad N}$ 满足 $f_m: \quad \mathbf{R}^n$ 且 $X(t) = \mathrm{cl}\{f_m(t)\}_m \quad t \quad$ (cl 表闭包) 称为 X 的 Castaing 表示

可以定义一个非常有用的映象和 Steiner 形心: $_n: \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n) \quad \mathbf{R}^n$, 它由下式定义

$$_n(A) = n \quad _{S^{n-1}} \quad (p, A) p \quad (\mathrm{d}p)$$

式中 $(\ , A)$ 是 A 的支撑函数, 是单位球面 S^{n-1} 上的 Lebesgue 测度

Steiner 形心的性质

) $_n(A) \quad A$,

) $|\ {}_n(A) - {}_n(C)|\ \ nd_H(A, C)$,

) ${}_n(-A) = -{}_n(A)$,

) 对于一切 A, C $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ 和 , $\mathbf{R}$, ${}_n(A + C) = {}_n( ) + {}_n(C)$,

(见, 例如, Aubin 和 Frankowska[3])

借助于Steiner形心的性质, 我们可得每一个 A $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ 的Steiner参数化法 首先, 我们必须考虑由下式定义的映象 $P: \mathbf{R}^n$ $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$:

$$P(x, A) = A \quad (\{x\} + 2\inf_{a\ A} |x - a|\ B)$$

该映象满足 $d_H(P(x, A), P(y, C))$ $5(d_H(A, C) + |x - y|)$, 这一不等式称为相交引理(见[3]) 按此方法, 给出 A $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$, 借助 ${}_n(P(A\ \ {}_{\mathscr{K}}a, A))$ 可得到 A 的Steiner参数化, 且 a B, 显然,

$$A = \left\{ {}_n(P(A\ \ {}_{\mathscr{K}}a, A))\right\}_{a\ \ B}$$

因此, 若 X: $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ 是个集值函数, 借助于族 f_a^X: $\mathbf{R}^n$ 可得出 X 的Steiner参数化, 其中 $f_a^X(t) = {}_n(P(X(t)\ \ {}_{\mathscr{K}}a, X(t)))$ 显然, 对于一切 t , 有

$$X(t) = \left\{f_a^X(t)\right\}_{a\ \ B}$$

给定一个概率空间(, $\mathscr{A}$, P) 中一可测函数 X: $\mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$ 称为可积有界的, 如果 X ${}_{\mathscr{K}}$是 $L^1(P)$ 类的(见 Aumann[4], Debreu[2]或Hiai 和 Umegaki[5])

若 X 是可积有界的, X 的 Aumann 积分(或 X 的期望值)(记为 $X\,dP$) 由下式定义

$$X\,dP = \left\{ f\,dP \mid f: \quad \mathbf{R}^n, f \quad X \text{ a.s.}[P], f \quad L^1(P)\right\},$$

(见 Aumman[4], Debreu[2]或Hiai 和Umegaki[5])

众所周知的结果是, 在前述条件下, X 的Aumann积分属于 $\mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$, 此外, 若 X 是凸值的 a.s. $[P]$, 则 Aumann 积分属于 $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$

在 $C(, \mathbf{R}^n)$ 中, 我们用 $\mathscr{K}C(, \mathbf{R}^n))$ 表示一类紧集 在 $\mathscr{K}C(, \mathbf{R}^n))$ 中, 将Hausdorff度量用 d_H 表示, 并定义为:

$$d_H(A, E) = \max\left\{\sup_{f\ \ A}\inf_{g\ \ E} \ f - g\ , \sup_{f\ \ E}\inf_{g\ \ A} \ f - g\ \right\},$$

其中 A, E $\mathscr{K}C(, \mathbf{R}^n))$

这一度量以后将用到的一性质是: $d_H(\{f_i\}_{i\ \ \mathbf{I}}, \{g_i\}_{i\ \ \mathbf{I}})$ $\sup_{i\ \mathbf{I}}\ f_i - g_i\ $,

其中 $\mathbf{I}$ 是指标集和 $\{f_i\}_{i\ \ \mathbf{I}}, \{g_i\}_{i\ \ \mathbf{I}}$ $\mathscr{K}C(, \mathbf{R}^n))$

2 在连续集值函数空间中的算子

在本节中, 我们将介绍在 $C(, \mathbf{R}^n)$ 中给定一个算子如何构造 $C(, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 中的算子 第一个结果指出了 族 $\{f_a^X\}_{a\ \ B}$ 的某些基本特性

命题2 1 设 X $C(, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 则有:

) f_a^X $C(, \mathbf{R}^n)$, 对一切 a B,

) $\{f_a^X\}_{a\ \ B}$ $\mathscr{K}C(, \mathbf{R}^n))$

证明 首先仅考虑:

$$|f_a^X(t) - f_a^X(t\ )|\ \ nd_H(P(X(t)\ \ {}_{\mathscr{K}}a, X(t)),$$

$$P(X(t) \quad \mathscr{K} a, X(t))) $$
$$5n(d_H(X(t), X(t)) + | a | \, | X(t) \quad \mathscr{K} - X(t) \quad \mathscr{K} |)$$
$$10 n d_H(X(t), X(t))$$

这就证明了)

对),给定 $X \quad C(\quad , \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 考虑映象 $_X: B \quad C(\quad , \mathbf{R}^n)$, 它由 $_X(a) = f_a^X$ 定义

则 $_X$ 是连续的, 因为:

$$_X(a) - \ _X(b) \quad = \quad f_a^X - f_b^X \quad = \sup_t | f_a^X(t) - f_b^X(t) |$$
$$5n(| \ X(t) \quad \mathscr{K} a - \ X(t) \quad \mathscr{K} b |)$$
$$5n \ | a - b | \sup_t \ X(t) \quad \mathscr{K} =$$
$$5n \ | a - b | \quad X \quad _C$$

因 $\left\{f_a^X\right\}_{a \quad B} = \ _X(B)$, B 为紧的, 则得到的函数族 $\left\{f_a^X\right\}_{a \quad B}$ 是紧的

命题 2 2 让我们考察由 $(X) = \left\{f_a^X\right\}_{a \quad B}$ 给出的映象 $: C(\quad , \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)) \quad \mathscr{K}(C(\quad , (\mathbf{R}^n))$, 则 是 Lipschitzian 的而且是一对一的

证明 在 $C(\quad , \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 中给定 X 和 Y, 因 $\left\{f_a^X\right\}$ 和 $\left\{f_a^Y\right\}$ 分别是 X 和 Y 的 Steiner 参数化, 于是有

$$d_H(\ (X), \ (Y)) = d_H(\left\{f_a^X\right\}_{a \quad B}, \left\{f_a^Y\right\}_{a \quad B})$$
$$\sup_{a \quad B} \ f_a^X - f_a^Y \quad = \sup_{a \quad B} \sup_t | f_a^X(t) - f_a^Y(t) |$$
$$\sup_t 10 n d_H(X(t), Y(t)) = 10 n D_H(X, Y)\#$$

这就证明了 R 的 Lipschitz 性质#

关于一一性我们有 $R(X) = R(Y)$, 当且仅当 $\left\{f_a^X\right\}_{a I B} = \left\{f_a^Y\right\}_{a I B}$, 这表明 $X(t) = \left\{f_a^X(t)\right\}_{a I B} = \left\{f_a^Y(t)\right\}_{a I B} = Y(t)$, 对一切 $t \ I \ 8$, 故 $X = Y\#$

命题 213 设映象 $T: C(8, \mathbf{R}^n) \ y \ C(8, \mathbf{R}^n)$ 是连续的, 且 $X \ I \ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 则有:

) $\left\{Tf_a^X\right\}_{a I B} \ I \ \mathscr{K}(C(8, \mathbf{R}^n))$,

) $\left\{(Tf_a^X(t)\right\}_{a I B} \ I \ \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$, 对一切 $t \ I \ 8\#$

证明 因 T 和 Q_X 是连续的, 而且 B 是紧的, 我们有 $\left\{(Tf_a^X)(t)\right\}_{a I B} = T . Q_X(B)$, 就证明了)#

关于), 我们只须考察由 $X_t(f) = f(t)$ 给出的投影映射: $X_t: C(8, \mathbf{R}^n) \ y \ \mathbf{R}^n$, $t \ I \ 8$, 显然, 这些映象是连续的, 且 $\left\{(Tf_a^X)(t)\right\}_{a I B} = X_t(\left\{Tf_a^X\right\}_{a I B})\#$

在以下的定义中, 我们将在 $C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 中引进一个算子, 在 $C(8, \mathbf{R}^n))$ 中构造一个算子# 本文的目标将集中研究/扩张0 算子#

定义 211 设 $T: C(8, \mathbf{R}^n) \ y \ C(8, \mathbf{R}^n)$ 是连续的, 且 $X \ I \ (8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))\#$ 我们用 $T^* X = \mathrm{co}\left\{Tf_a^X(\#)\right\}_{a I B}$ 来定义 $T^*: C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)) \ y \ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))\#$

命题 214 在上述条件下, 算子 T^* 是适定的, 即当 X 为连续时, $T^* X$ 属于 $C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))\#$

证明 应该注意的是因 对一切 $t \ I \ 8$, $\left\{(Tf_a^X)(t)\right\}_{a I B} \ I \ \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$, 故显然, 对所有 $t \ I \ 8$, $T^* X(t)$ 属于 $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)\#$ 另外:

$$d_H(T^* X(t), T^* X(tc)) = d_H(\mathrm{co}\left\{ Tf_a^X(t)\right\}_{a I B}, \mathrm{co}(\left\{ Tf_a^X(tc)\right\}_{a I B}) [$$
$$d_H(\left\{ Tf_a^X(t)\right\}_{a I B}, \left\{ Tf_a^X(tc)\right\}_{a I B}) [\sup_{a I B} | Tf_a^X(t) - Tf_a^X(tc) | \#$$

因$\left\{ Tf_a^X(t)\right\}_{a I B}$是紧的, 故由 Ascoli_Arzela 定理得知它是等度连续的# 证毕#

关于 T^* 的定义, 应该指出, 即使在 T 是线性的情况下, 集合$\left\{ Tf_a^X(t)\right\}_{a I B}$不必是凸的#这由下面的例子即可得知:

例 211 假定 $X: [0, 1] y \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^2)$ 由 $X(t) = \left\{(x, y) I \mathbf{R}^2 | 0 [x [t, 0 [y [1 - t\right\}$ 给出, 且假定线性算子 T 为 1_Bernstein 逼近, 即 $B_1: C(8, \mathbf{R}^2) y C(8, \mathbf{R}^2)$ 且 $B_1 f(t) = (1- t)f(0) + tf(1)$# 在这种情况下, 我们有

$$\left\{ B_1 f_a^X\left(\frac{1}{2}\right)\right\}_{a I B} = \frac{1}{2}\left\{ f_a^X(0) + f_a^X(1)\right\}_{a I B}\#$$

因

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{ f_{(0,1)}^X(0) + F_{(0,1)}^X(1)\right),$$
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left\{ f_{(1,0)}^X(0) + f_{(1,0)}^X(1)\right\}$$

和

$$\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) I \frac{1}{2}\left\{ f_a^X(0) + f_a^X(1)\right\}_{a I B},$$

故它不是凸的#

在下列命题中, 将证明扩张算子承袭了算子的连续性和 Lipschitz 特性#

命题 215 在定义 211 的条件下, 算子 T^* 是连续的, 若 T 为 Lipschitz 的, 则 T^* 也为 Lipschitz 的#

证明 设 $X, Y I C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 则有:

$$D_H(T^* X, T^* Y) = D_H(\mathrm{co}\left\{ Tf_a^X(\#)\right\}, \mathrm{co}\left\{ Tf_a^Y(\#)\right\}) [$$
$$D_H(\left\{ Tf_a^X(\#)\right\}, \left\{ Tf_a^Y(\#)\right\}) [\sup_{a I B} + Tf_a^X - Tf_a^Y + \#$$

因对一切 $a I B$ 有 $+f_a^X - f_a^Y + [10nD_H(X, Y)$, 且 T 是连续的, 因此 T^* 也是连续的#

此外, 若 T 为 Lipschitz 的, 则

$$D_H(T^* X, T^* Y) [\sup_{a I B} + Tf_a^X - Tf_a^Y + [\sup_{a I B} M + f_a^X - f_a^Y + [$$
$$10nMD_H(X, Y),$$

其中 M 是 T 的 Lipschitz 常数#

在下列命题中, 我们介绍一个集值函数 $T^* X$ 的 Castainig 表示#

命题 216 设 $T: C(8, \mathbf{R}^n) y C(8, \mathbf{R}^n)$ 是连续的, $X I C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 而 D 是 B 的可数的稠密子集, 则

$$\left\{ \mathop{E}_{i=1}^{nc} \mathrm{K}_i Tf_{a_i}^X | a_i I D, K_i I Q H [0, 1], \mathop{E}_{i=1}^{nc} \mathrm{K}_i = 1\right\}$$

是 $T^* X$ 的连续函数 Castaing 表示, 其中 $nc = \max\left\{ n, 2\right\}$#

证明 显然: 族$\left\{ \mathop{E}_{i=1}^{nc} \mathrm{K}_i Tf_{a_i}^X | a_i I D, K_i I Q H [0, 1], \mathop{E}_{i=1}^{nc} \mathrm{K}_i = 1\right\}$ 是一可数的连续函数族#

设 $y I T^* X(t)$, 因 $T^* X(t) = \mathrm{co}\left\{ Tf_a^X(t)\right\}_{a I B}$, 且$\left\{ Tf_a^X(t)\right\}_{a I B} = X_t . T . Q_X(B)$ 是连通的, 故对某些 $\mathrm{L}_i I Q H [0, 1]$, $\mathop{E}_{i=1}^{nc} \mathrm{L}_i = 1$ 和 $b_i I B$ 有 $y = \mathop{E}_{i=1}^{nc} \mathrm{K}_i Tf_{b_i}^X(t)$# (见 Valentine[6])

在前一族中,取 $\mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} \mathrm{K}_i Tf^X_{a_i}$, 则对一切 $t\ I\ 8$, 有:

$$| \mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} \mathrm{L}_i Tf^X_{b_i}(t) - \mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} \mathrm{K}_i Tf^X_{a_i}(t) | [| \mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} \mathrm{L}_i (Tf^X_{b_i}(t) - Tf^X_{a_i}(t)) | +$$

$$| \mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} (L_i - K_i) Tf^X_{a_i}(t) | [$$

$$\mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} \mathrm{L}_i + Tf^X_{b_i} - Tf^X_{a_i} + + \mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} | L_i - K_i | + Tf^X_{a_i} + \#$$

任给定 E > 0, 取 $a_i\ I\ D$, 使得

$+ Tf^X_{b_i} - Tf^X_{a_i} + < \dfrac{E}{2nc}$ 这是可能的, 因为

$+ f^X_{b_i} - f^X_{a_i} + [\ 5n | a_i - b_i | + X +_C$ 且 T 是连续的#

另外, 对某一 $M\ I\ \mathbf{R}$, 因 $+ Tf^X_{a_i} + [\ M(i = 1, , , nc)$ 故只要考察: $K_i\ I\ Q\ H[0, 1]$, $\mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} \mathrm{K}_i = 1$, 且 $| K_i - L_i | < \dfrac{E}{4M(nc - 1)}(i = 1, , , nc - 1)\left(故\ | K_{nc} - L_{nc} | < \dfrac{E}{4M}\right)$ 即可, 因此可得:

$$\left| \mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} \mathrm{L}_i Tf^X_{b_i}(t) - \mathop{E}\limits_{i=1}^{nc} \mathrm{K}_i Tf^X_{a_i}(t) \right| [\ E\#$$

因这一结果与 $t\ I\ 8$ 的选择无关, 所以证明了此结果#

下面的结果说明了所引入的算子的一些基本特性#

命题 217 在定义 211 的条件下, 我们得到:

) 若 $X\ I\ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ 使得 $X = \left\{f(\#)\right\}$, $f\ I\ C(8, \mathbf{R}^n)$, 则 $T^* X = \left\{Tf(\#)\right\}$,

) 对于一切 $f\ I\ C(8, \mathbf{R}^n)$, 若 $Tf = g$, $g\ I\ C(8, \mathbf{R}^n)$, 则对一切 $X\ I\ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 有: $T^* X = \left\{g(\#)\right\}$,

) 对于一切 $f\ I\ C(8, \mathbf{R}^n)$ 和某些 $t\ I\ 8$, 若 $Tf(t)\ I\ C$, $C < \mathbf{R}^n$ 是凸的, 则对于一切 $X\ I\ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 有 $T^* X(t) < C$,

) 对于一切 $f\ I\ C(8, \mathbf{R}^n)$ 和某些 $t\ I\ 8$, 若 $Tf(t) = f(t)$, 则对一切 $X\ I\ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 有: $T^* X(t) = X(t)$,

) 若 T 是恒等算子, 则 T^* 也恒等算子,

) 对于一切 $f\ I\ C(8, \mathbf{R}^n)$ 和某些 $t, tc\ I\ 8$, 若 $Tf(t) = Tf(tc)$, 则对一切 $X\ I\ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 有: $T^* X(t) = T^* X(tc)$,

) 对于一切 $X\ I\ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 和 K \ 0 有: $T^*(\mathrm{K}X) = \mathrm{K}T^* X$,

) 若 T 为线性和连续的, 则对一切 $X, Y\ I\ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 有:

$$D_H(T^* X, T^* Y) [\ 10n + T + D_H(X, Y),$$

) 若 T 是线性和连续的, 则对于一切 $X\ I\ C(8, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 有: $+ T^* X +_C [\ + T + + X +_C\#$

关于 T^* 的线性问题, 该算子在算子 T 为线性的情况下不必是线性的#

例 212 现在我们考虑 $L = [0, 1] @ \left\{0\right\}$ 和 $K = \left\{0\right\} @ [0, 1]$, 定义 $X, Y: [0, 1]\ y\ \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^2)$, 且 $X = K$ 和 $Y = L$, 并考虑 T 为 1_Bernstein 逼近, 则有:

$$B^*_1 X\left(\frac{1}{2}\right) = K \text{ 和 } B^*_1 Y\left(\frac{1}{2}\right) = L,$$

故当 $(1,1)\in B_1^*(X+Y)\left(\frac{1}{2}\right)$ 时, 有

$$B_1^*X\left(\frac{1}{2}\right)+B_1^*Y\left(\frac{1}{2}\right)=[0,1]\times[0,1].$$

应该指出一般来说, $\int_\Omega T^*X\,\mathrm{d}P=\mathrm{co}\left\{\int_\Omega Tf_a^X\,\mathrm{d}P\right\}_{a\in B}$ 是不成立的, 这由下面的例子可以看出, 尽管因对于一切 $t\in\Omega$ 和 $a\in B$, 有 $Tf_a^X(t)\in T^*X(t)$ 故显然有 $\mathrm{co}\left\{\int_\Omega Tf_a^X\,\mathrm{d}P\right\}_{a\in B}\subset\int_\Omega T^*X\,\mathrm{d}P$.

例 2.3　现在我们考虑 $L=[0,1]\times\{0\}$ 和 $K=\{0\}\times[0,1]$, 用 $X(t)=tL+(1-t)K$, 定义 $X:[0,1]\to\mathcal{K}_c(\mathbf{R}^2)$. 假定 T 为恒等映象, $(\Omega,\mathcal{A},p)$ 为概率空间, 取 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{A}$ 为 $[0,1]$ 中的 Borel σ-域, 且 $P(\{0\})=\frac{1}{2}$, $P(\{1\})=\frac{1}{2}$, 则有

$$\int_\Omega T^*X\,\mathrm{d}P=\int_\Omega X\,\mathrm{d}P=\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}L=\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right],$$

其中 $\mathrm{co}\left\{\int_\Omega Tf_a^X\,\mathrm{d}P\right\}_{a\in B}=\mathrm{co}\left\{\frac{1}{2}f_a^X(0)+\frac{1}{2}f_a^X(1)\right\}_{a\in B}$, 但不等于 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

3　关于算子序列的收敛性

在本节中, 将分析第 2 节中所定义算子序列的收敛性. 我们将对几种形式的收敛性着重研究 $C(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 中线性算子序列和扩张算子序列的收敛性之间的关系.

正如例子 2.2 中所看的那样, 算子 T^* 不必是线性的. 因此, 为研究这类算子序列的收敛性, 就不能应用线性算子收敛性的一些已知结果.

定理 3.1　设 $T_m: C(\Omega,\mathbf{R}^n)\to C(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 是线性连续算子序列, 使得 $\{\|T_m\|\}_m$ 是有界的. 设 $T: C(\Omega,\mathbf{R}^n)\to C(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 是线性连续算子, 且设 $S: C(\Omega,\mathcal{K}_c(\mathbf{R}^n))\to C(\Omega,\mathcal{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 是连续的, 则成立:

(i1) 对于一切 $f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$, 若 $\|T_mf-Tf\|\to 0$, 则对于一切 $X\in C(\Omega,\mathcal{K}_c(\mathbf{R}^n))$, $D_H(T_m^*X,T^*X)\to 0$,

(i2) 对于一切 $f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$, 和 $t\in\Omega$, 若 $|T_mf(t)-Tf(t)|\to 0$, 则对于一切 $X\in C(\Omega,\mathcal{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 和 $t\in\Omega$, 都有: $d_H(T_m^*X(t)-T^*X(t))\to 0$.

(i3) 若 $\|T_m-T\|\to 0$, 则 $\sup_{\|X\|_C\le 1}D_H(T_m^*X,T^*X)\to 0$;

(ii1) 对于一切 $X\in C(\Omega,\mathcal{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 若 $D_H(T_m^*X,SX)\to 0$, 则存在线性连续映射 $s: C(\Omega,\mathbf{R}^n)\to C(\Omega,\mathbf{R}^n)$, 使得对一切 $f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 和 $s^*=S$, 有: $\|T_mf-sf\|\to 0$,

(ii2) 对于一切 $X\in C(\Omega,\mathcal{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 和 $t\in\Omega$, 若 $d_H(T_m^*X(t),SX(t))\to 0$ 则存在线性连续映射 $s: C(\Omega,\mathbf{R}^n)\to C(\Omega,\mathbf{R}^n)$, 使得对一切 $f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 和 $t\in\Omega$, 有 $|T_mf(t)-sf(t)|\to 0$, 且 $s^*=S$.

(ii3) 对一切 $X\in C(\Omega,\mathcal{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 若 $\sup_{\|X\|_C\le 1}D_H(T_m^*X,SX)\to 0$, 则存在线性连续的映射 $s: C(\Omega,\mathbf{R}^n)\to C(\Omega,\mathbf{R}^n)$, 使得 $\|T_m-s\|\to 0$ 且 $s^*=S$.

证明　关于 (i1), 有

$$D_H(T_m^*X,T^*X)\le\sup_{a\in B}\|T_mf_a^X-Tf_a^X\|,$$

这在命题 2.5 中已见到。

假定它不趋于 0。则将存在 $\varepsilon > 0$ 和序列 $\{m_l\}_l \subset \mathbf{N}$, $\{a_l\}_l \subset B$, 且对于序列中一切 $l \in \mathbf{N}$, 有 $\| T_{m_l} f^X_{a_l} - T f^X_{a_l} \| \geq \varepsilon$。

因 B 是紧的则存在 $\{a_l\}_l$ 的收敛子序列(仍以 $\{a_l\}_l$ 记之), 使得 $a_l \to a \in B$, 则对一切 $l \in \mathbf{N}$, 有

$$\varepsilon \le \| T_{m_l} f^X_{a_l} - T f^X_{a_l} \| \le \| T_{m_l} f^X_{a_l} - T_{m_l} f^X_a \| + \| T_{m_l} f^X_a - T f^X_a \| + \| T f^X_a - T f^X_{a_l} \|.$$

但 $\| T_{m_l} f^X_{a_l} - T_{m_l} f^X_a \| \le \| T_{m_l} \| \| f^X_{a_l} - f^X_a \|$, 因 $\{ \| T_{m_l} \| \}_l$ 是有界的, 且 $\| f^X_{a_l} - f^X_a \| \le 5n | a_l - a | \| X \|_C$, 故其趋于 0。

另外, 因 $f^*_a \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$ 故 $\| T_{m_l} f^X_a - T f^X_a \|$ 趋于 0。

最后, 我们有: $\| T f^X_a - T f^X_{a_l} \| \le \| T \| \| f^X_{a_l} - f^X_a \|$ 故它也趋于 0。因此这是一个矛盾, 故有

$$D_H(T^*_m X, T^* X) \le \sup_{a \in B} \| T_m f^X_a - T f^X_a \| \to 0.$$

i.2) 的证明类似于 i.1)。

关于 i.3), 若 $\| X \|_C = \sup_{t \in \Omega} \| X(t) \|_{\mathscr{K}} \le 1$, 则对于一切 $a \in B$, 因对一切 $t \in \Omega$, $f^X_a(t) \in X(t)$, 可推得 $\| f^X_a \| \le 1$, 从而

$$\sup_{\| X \|_C \le 1} D_H(T^*_m X, T^* X) \le \sup_{\| X \|_C \le 1} \sup_{a \in B} \| T_m f^X_a - T f^X_a \| \le \sup_{\| f \| \le 1} \| T_m f - T f \| = \| T_m - T \|,$$

这就证明了该结果。

关于 ii.1), 由假设, 有 $D_H(T^*_m X, SX) \to 0$, 特别有 $D_H(T^*_m \{f(\cdot)\}, S\{f(\cdot)\}) \to 0$。我们定义 $s: C(\Omega, \mathbf{R}^n) \to C(\Omega, \mathbf{R}^n)$, $sf = g$, 使得对于一切 $t \in \Omega$, $\{g(t)\} = S\{f(\cdot)\}(t)$。

s 是适定的, 首先, $S\{f(\cdot)\}(t)$ 实际上是一单点集, 因为按照 Hausdoff 度量 $S\{f(\cdot)\}(t) = \lim_{m \to \infty} T^*_m \{f(\cdot)\}(t)$, 而且 $T^*_m \{f(\cdot)\}(t) = \{T_m f(t)\}$。此外, $| sf(t) - sf(t') | = d_H(S\{f(\cdot)\}(t), S\{f(\cdot)\}(t'))$, 因此, 由 $S\{f(\cdot)\}$ 的连续性知 s 取连续值。

类似地易知 $\| T_m f - sf \|$ 趋于 0, 因此 s 是线性的。另一方面因 S 是连续的, 故 s 也是连续的。

仅需研究 $s^* = S$。由 i.1), 对于一切 $X \in C(\Omega, \mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$, 有 $D_H(T^*_m X, s^* X) \to 0$, 且, 因极限是唯一的, 得到 $s^* = S$, 因而证明了 ii.1)。

ii.2) 和 ii.3) 的证明类似于 ii.1)。

注意, 在 i.3) 和 ii.3) 中, $\{ \| T_m \| \}_m$ 的有界性假设是多余的。

一个重要的特殊情况是: $T_m: C(\Omega, \mathbf{R}^n) \to C(\Omega, \mathbf{R}^n)$ 是线性和正值的。则 $\{T_m\}_m$ 是连续和范数有界的。这样就得到了相同的结论。

下面给出前面定理的两个推论。

推论 3.2 设 $T: C(\Omega, \mathbf{R}^n) \to C(\Omega, \mathbf{R}^n)$ 是线性连续算子且 $T_m: C(\Omega, \mathbf{R}^n) \to C(\Omega, \mathbf{R}^n)$ 是线性连续算子序列, 使得 $\{ \| T_m \| \}_m$ 是有界的, 且对一切 $f \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$, 有 $\| T_m f - T f \| \to 0$。设 $X_m, X \in C(\Omega, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, $m \in \mathbf{N}$, 若 $D_H(X_m, X) \to 0$,

则:

$$\lim_{m\to\infty} D_H(T^*_m X_m, T^* X) = 0。$$

推论3.3 设$(\Omega, \mathscr{A}, P)$是一概率空间, 设$T_m: C(\Omega, \mathbf{R}^n) \to C(\Omega, \mathbf{R}^n)$是一线性连续算子序列, 使得$\{\| T_m \|\}_m$是有界的, 且对一切$f \in C(\Omega, \mathbf{R}^n)$, $\| T_m f - f \| \to 0$。设$X_m, X \in C(\Omega, \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, $m \in \mathbf{N}$, 若$D_H(X_m, X) \to 0$, 则我们有

- $d_H\left(\int_\Omega T^*_m X_m \mathrm{d}P, \int_\Omega X \mathrm{d}P\right) \to 0$,
- $D_H\left(T^*_m\left(\int_\Omega X_m \mathrm{d}P\right), \int_\Omega X \mathrm{d}P\right) \to 0$,
- $D_H\left(\int_\Omega T^*_m X_m \mathrm{d}P, T^*_m\left(\int_\Omega X_m \mathrm{d}P\right)\right) \to 0$。

4 结论与说明

在本文中, 我们已证明, 通过基于超空间适当的参数化法可以把算子扩张到集值情况。我们特别选取的是Steiner型参数化方法。本文中许多结果是基于球的紧性且在选择的选取过程中是按照一致Lipschitz法得到的。大家自然会问将这一结果推广到无限维空间或较大集合的超空间的可能性, 以及所选参数化方法的影响。我们将简单讨论。

如果我们要求参数集合是紧的, 参数化是连续的, 显然仅需要参数化紧集。略去第一种假设, 则易于讨论所有闭凸子集。在$\mathbf{R}^n$中, 因对一切闭凸集$A \in \mathbf{R}^n$, $A = \{R_n(P(x, A))\}_{x\in\mathbf{R}^n}$, 则可使用Steiner型参数化方法。然而, 因Steiner质心映象不是连续的, Steiner型参数化方法在无限维空间中不适用[7]。

另外在强凸自反空间(在一些紧性条件下, 见[3]的p.362)中的闭凸子集的连续参数化, 可由度量投影得到。因而参数集合是全空间。注意得不到选择的一致Lipschitz性。

这些参数化方法均能保证算子的线性特性。在最近的文章中, Dentcheva的[1]已提出了另一种基于Steiner质心映象的$\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$的参数化单元的方法, 其最重要的特点是如果原映象线性的, 则逐次扩张的算子也将是线性的。

设$\mathscr{M}$为在B中的一类概率分布, B具有连续可微密度, 则, 对于一切$A \in \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$,

$$A = \mathrm{cl}\left\{\int m(\partial\sigma(p, A))\,\mu(\mathrm{d}p)\right\}_{\mu\in\mathscr{M}}$$

此处, m和∂表示“最小范数元(minimal_norm element)”和“次微分(subdifferential)”映象(见[3, p.366])。当μ为单位质量的Lebesgue测度, 就可得出集合A的Steiner质心。

Dentcheva给出了一个Lipschitz特性[1], 但它不是一致的。作者还未发现一个明确的方式来改进或简化该参数集, 以便得到一致的Lipschitz性。

除参数化的选择外, 待解决的重要问题如下:

- 是否可以扩大本文的范围用可测空间, 例如L^p空间, 代替连续函数空间?
- 从定理3.1的证明中, 可以看出对扩张算子的收敛性来说, 线性性不是一个本质的假设。有趣的是, 确定最大的一类算子, 使得原算子扩张算子的收敛性是等价的。
- 本文的结果应用于极限算子不同于恒等算子和积分算子。

[参 考 文 献]

[1] Dentcheva D. Differentiable selections and Castaing representations of multifunctions[J]. J Math

Anal Appl, 1998, **223:** 371) 396.

[2] Debreu G. Integration of correspondences. In: Proc Fifth Berkeley Symp Math Statist Prob[C]. Berkeley: Univ of California Press, 1967, 351) 372.

[3] Aubin J P, Frankowska H. Set_valued analysis[A]. Systems &Control: Foundations &Applications [C]. Boston: Birkh user Boston, Inc, 1990.

[4] Aumann R J. Integrals of set_valued functions[J]. J Math Anal Appl, 1965, **12:** 1) 12.

[5] Hiai F, Umegaki H. Integrals conditional expectations, and martingales of multivalued functions[J]. J Multivar Anal, 1977, **7:** 149) 182.

[6] Valentine F A. Convex Sets[C]. Robert Ed. New York: Krieger Publishing Company, Inc, 1976.

[7] Vitale R A. The steiner point in infinite dimensions[J]. Istael J Math, 1985, **52:** 245) 250.

Set_Valued Extension of Operators via Steiner Selections( )) Theoretical Results

TER#N, PEDRO, L PEZ_DIAZ, MIGUEL

(Facultad de Ciencias, Universidad de Oviedo, C/Calvo Sotelo, s/n 33007 Oviedo Spain)

Abstract: A way to extend operators in spaces of continuous functions to spaces of continuous set_valued functions is proposed. This extension is developed through the Steiner selections of the set_valued functions. Their properties and characteristics of the convergence of sequences of operators of this class are studied. In Part of this series some applications to approximation theory will be shown.

Key words: set_valued extension; steiner selection; operator