

文章编号: 1000-0887(2002) 05-0489-08

高阶(2+ 1) 维 Broer_Kaup 方程 的局域相干结构*

张解放, 刘宇陆

(上海大学, 上海应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(本刊编委刘宇陆来稿)

摘要: 利用推广的齐次平衡方法, 研究高阶(2+ 1) 维 Broer_Kaup 方程的局域相干结构. 首先基于推广的齐次平衡方法, 给出这个模型的一个非线性变换, 并把它变换成一个线性化的方程. 然后从线性化方程出发, 构造出一个分离变量的拟解. 由于拟解中不仅含有两个 y 的任意函数, 而且还有 $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_k, k_j, l_k\}$ 和 $\{N, M, L\}$ 这些参数可以任意选取, 因此合适的选择这些函数和参数, 可以得到新的相当丰富的孤子结构. 方法直接而简单, 可推广应用一大类(2+ 1) 维非线性物理模

关键词: 扩展齐次平衡法; 高阶 Broer_Kaup 方程; (2+ 1) 维; 孤子解; dromion 解

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

孤子是基于一类非线性物理模型的一个复杂数学结构^[1]. 随着对(1+ 1) 维非线性物理模型的孤子结构的研究和理解的深入, 高维非线性可积模型的似孤子结构的研究引起了物理学家和数学家的极大兴趣. 由于 Boiti, Leon, Martina 和 Pempinelli 的开拓性工作^[2], 近十多年来, 关于在(2+ 1) 维非线性物理模型中, 在各方向上都是指数衰减的, 被称为 dromion 的局域孤子解的研究受到了人们的高度注意和想象. 至今不仅已获得一大类(2+ 1) 维非线性可积模型的 dromion 解结构, 如(2+ 1) 维 DS 方程^[1,2], (2+ 1) 维 KP 方程^[3], (2+ 1) 维 NNV 方程^[4], (2+ 1) 维破裂孤子方程^[5], (2+ 1) 维长耗散波方程^[6], (2+ 1) 维标量非线性 Schrodinger 方程^[7], 而且(3+ 1) 维非线性 KdV 型方程^[8]和 MKP 方程^[9]的似 dromion 解结构也被给出. 最近, 还进一步发现了(2+ 1) 维非线性 KdV 方程^[10], (2+ 1) 维破裂孤子方程^[11], (2+ 1) 维长耗散波方程和标量非线性 Schrödinger 方程^[12]等广义 dromion 解结构. 通常, dromion 解由两个及以下的非平行直线隐形孤子形成, 如 DS 方程^[1,2], NNV 方程^[4], 它们的 dromion 解有两个垂直的隐形孤子所形成, 而 KP 方程^[3], dromion 解则由两个非垂直的隐形孤子所形成. 对于某些非线性物理模型, 如 DS 方程^[1,2], NNV 方程和反对称 NNV 方程^[4], dromion 解可以存在于物理场本身, 而对于某些非线性物理模型, 如 KP 方程和破裂孤子方程^[2]则 dromion 解只对某种势场才存在. 一般

* 收稿日期: 2001_07_03; 修订日期: 2001_11_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872043)

作者简介: 张解放(1959—), 男, 教授;

刘宇陆(1959—), 男, 教授, 博士.

而言, dromion 解存在于两个非平行直线孤子的交叉点上, 其后人们又进一步发展, 某些高维非线性物理模型的 dromion 解, 如(2+ 1) 维 KdV 方程^[10], (2+ 1) 维破裂孤子方程^[11]、(2+ 1) 维长耗散波方程^[12]和(2+ 1) 维 Schrödinger 方程^[13]和(2+ 1) 维耗散长波方程^[14], 不仅可以由一些垂直的或非垂直的隐形孤子构成, 也可以由一些曲线孤子构成。最近, 楼森岳等利用分离变量方法, 得到了(2+ 1) 维 KdV 方程^[15], (2+ 1) 维 NNV 方程^[16]、非线性 Schrödinger 方程^[17]具有两个任意函数的相当丰富的局域相干结构, 而且还发现, 合适地选择这些函数, 局域相干结构可以是多 dromion 解, 多 lump 解, 振荡型 dromion 解, 环孤子解, 运动和静止呼吸子解, 似瞬子解。而且 dromion 解既可以存在于一些直线孤子的交叉点上, 也可以存在于一些曲线孤子的交叉点或最临近点上, 而且呼吸子在形状和幅度上都进行了呼吸。

寻求非线性物理模型的孤子解已创立了许多行之有效的方法, 如逆散射变换方法、双线性方法、Bäcklund 和 Drboux 变换方法、对称约化方法等等。其中近年来建立的齐次平衡方法也是一种相当有效的方法^[18]。这种方法提供了一种构造非线性物理模型准确解的便利的分析技术, 已被推广用来得到非线性物理模型的多孤子解^[19]、dromion 解^[20]和自 Bäcklund 变换^[21], 本文将进一步利用推广的齐次平衡法研究高阶(2+ 1) 维 Broer_Kaup 方程

$$H_t = -4[H_{xx} + H^3 - 3HH_x + 3H\partial_y^{-1}G_x + 3\partial_y^{-1}(GH_x)]_x, \quad (1)$$

$$G_t = -4[G_{xx} + 3G_xH + 3H^2G + 3G\partial_y^{-1}G_x]_x \quad (2)$$

的丰富的局域相干结构。方程(1)和(2)可用对称约束 KP 方程中约化得到^[22], 并且该方程已在统计物理、等离子体物理和非线性光纤通信等许多科技领域中得到应用。

1 高阶(2+ 1) 维 Broer_Kaup 方程的线性化

根据推广的齐次平衡方法, 我们假定方程(1)和(2)的形式解取其为下列形式

$$H = f(w)_x, \quad (3)$$

$$G = f(w)_{xy}, \quad (4)$$

其中 $f(w)$, $w(x, y, t)$ 为待定函数。

把(3)和(4)代入方程(1)和(2), 得到

$$f_{xt} = -4[f_{xxx} + f_x^3 + 3\partial_y^{-1}(f f_{xy})_x]_x, \quad (5)$$

$$f_{xyt} = -4[f_{xxy} + 3f_{xy}f_x + 3f_x^2f_{xy} + 3f_{xy}f_{xx}]_x, \quad (6)$$

二次化简后有

$$f_t = -4f_{xxx} - 4f_x^3 - 12f_x f_{xx}. \quad (7)$$

把 $f(w)$ 代入可得

$$f'(w_t + 4w_{xxx}) + 4(f \ominus + f'^3 + 3f'f \ominus w_x^3 + 12f''w_x w_{xx} + 12f'^2 w_x w_{xx}) = 0 \quad (8)$$

我们令方程(8)中 w_x^3 前的系数为零, 可得到一个 $f(w)$ 所满足的常微分方程

$$f \ominus + 3f'f'' + f'^3 = 0, \quad (9)$$

从方程(9)可求得一组特解

$$f(w) = \ln w. \quad (10)$$

因此进一步有

$$f'^2 = -f''. \quad (11)$$

利用(9) - (11), 方程(7)化为关于一个 $w(x, y, t)$ 所满足的偏微分方程

$$w_t + 4w_{xxx} = 0 \tag{12}$$

由此可见方程 (1) 和 (2) 经过变换 (3) 和 (4) 后可线性化。

2 高阶 (2+ 1) 维 Broer_Kaup 方程的变量分离解

从线性化方程 (12), 我们可构造 $w(x, y, t)$ 如下形式的拟解

$$w(x, y, t) = 1 + Y_1(y) + Y_2(y)F(x, t), \tag{13}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F(x, t) &= \sum_{i=1}^N a_i \exp(\xi_i) + \sum_{j=1}^M b_j \sin(\varphi_j) \exp(\eta_j) + \sum_{k=1}^L c_k \sinh(\phi_k) \exp(\zeta_k), \\ \xi_i &= \alpha x - 4\alpha^3 t + \xi_{0i}, \quad \varphi_i = k_j x + 4(k_j^3 - 2k_j^2 \beta_j) t + \varphi_{0j}, \\ \eta_j &= \beta_j x - 4(\beta_j^3 - 2k_j \beta_j^2) t + \eta_{j0}, \quad \phi_k = l_k x + 4(l_k^3 + 2l_k \gamma_k^2) t + \phi_{0k}, \\ \zeta_k &= \gamma_k x - 4(\gamma_k^3 + 2\gamma_k l_k) t + \zeta_{k0} \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

则 $Y_1(y), Y_2(y)$ 为变量 y 的任意函数, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, k_j, l_k$ 是任意常数。把 (13) 和 (10) 代入方程 (3) 和 (4), 便得到方程 (1) 和 (2) 的解为

$$H(x, y, t) = \frac{Y_2 F_x}{Y_1 + Y_2 F}, \tag{15}$$

$$G(x, y, t) = \frac{Y_1 Y_{2y} F_x - Y_{1y} Y_2 F_x}{(Y_1 + Y_2 F)^2}. \tag{16}$$

从解 (15) 和 (16) 可知, 由于引入了二个 y 的任意函数, 还有 $\{\alpha, \beta, \gamma, k, l\}$ 和 $\{N, M, L\}$ 这些参数可以任意选取, 使得 (2+ 1) 维 Broer_Kaup 方程的孤子解具有相当丰富的结构。

3 一些特殊局部域相干解

下面我们给出一些有意义的情况。

图 1 为选取

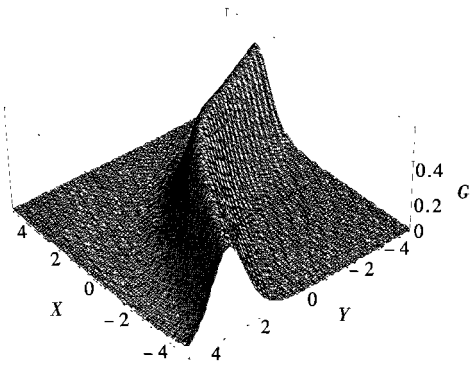


图 1

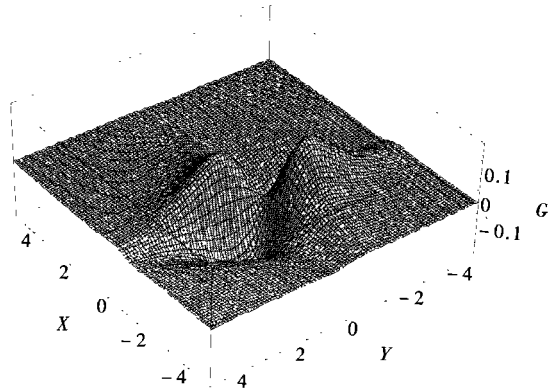


图 2

$$Y_1 = 1, \quad Y_2 = \exp(y) + \exp(3y), \quad F(x, t) = \frac{1}{5}(\exp(x - 4t) + \exp(2x - 32t))$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的 dromion 解。

图 2 为选取

$$Y_1 = \cosh(y^2), \quad Y_2 = y^2, \quad F(x, t) = \exp(x - 4t) + \sin(x + 4t) + \cosh(x - 4t)$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的 dromion 解•

图 3 为选取

$$Y_1 = 1, Y_2 = \exp(2y), F(x, t) = \exp(2x - 32t)$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的 dromion 解•

图 4 为选取

$$Y_1 = 1, Y_2 = \exp(y), F(x, t) = \cosh(x - 4t)$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的 dromion 解•

图 5 为选取

$$Y_1 = \exp(y), Y_2 = \operatorname{sech}(y^2), F(x, t) = \exp(x - 4t) + \sin(x + 4t) + \cosh(x - 3t)$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的 dromion 解•

图 6 为选取

$$Y_1 = \cosh(y), Y_2 = \cosh(y), F(x, t) = \exp(x - 4t) + \sin(x + 4t) + \cosh(x - 4t)$$

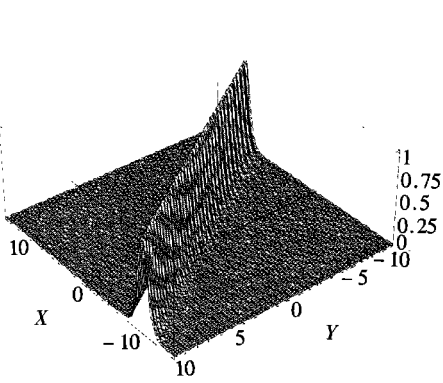


图 3

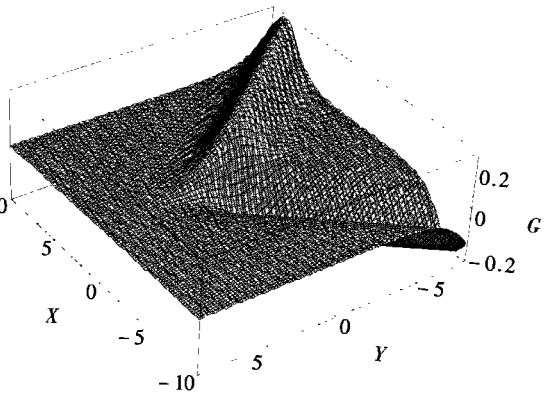


图 4

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的 dromion 解•

图 7 为选取

$$Y_1 = 1, Y_2 = \cosh(\sin y), F(x, y) = \exp(x - 4t) + \sin(x + 4t) + \cosh(x - 4t)$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的 dromion 解•

如果取 $Y_1(y), Y_2(y), F(x, t)$ 为下述形式:

$$F(x, y, t) = \exp(2p), \quad Y_1 = 1, \quad Y_2 = \exp(2q) \quad (17)$$

将(17)式代入(16)式后, (16)式变为

$$G(x, y, t) = p_x q_y \operatorname{sech}^2(p + q) \quad (18)$$

从(18)容易看出一族平行于 X 轴的直线孤子 q_y 、一族平行于 Y 轴的直线孤子 p_x 和一族曲线孤子 $\operatorname{sech}^2(p + q)$ 诱导了各种各样的多 dromion 解•

图 8 为选取

$$p = x - 4t - 5, \quad q = y^2$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的 dromion 解•

如果选取

$$Y_1 = 1 + a_2 E(y), \quad Y_2 = a_1 + A E(y) \quad (19)$$

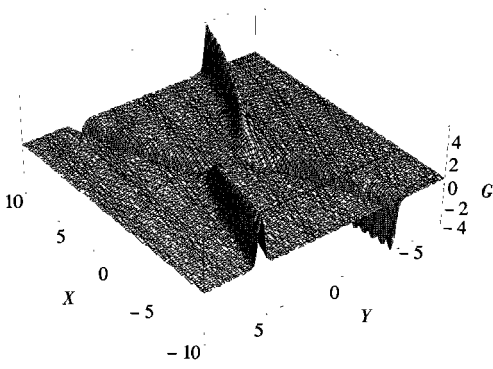


图 5

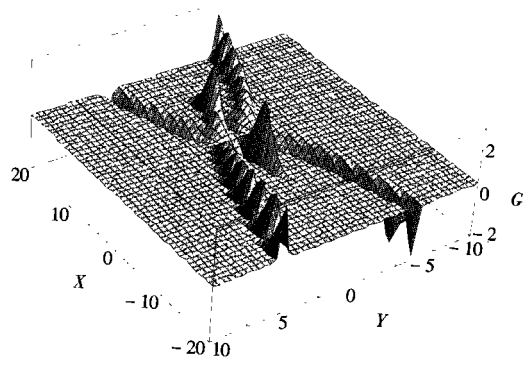


图 6

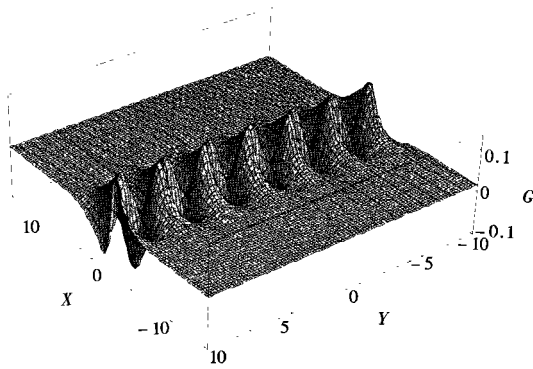


图 7

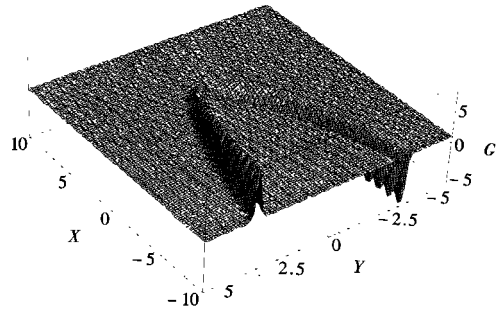


图 8

其中 a_1, a_2, A 是任意常数, 则解(16) 变成

$$G(x, y, t) = \frac{2E_y F_x (a_1 a_2 - A)}{(1 + a_1 F + a_2 E + AFE)^2} \quad (20)$$

图9为选取

$$F = \exp(2x - 32t) + \sin(x + 4t), \quad E = \cosh(y^2) \quad (a_1 = 1, a_2 = 2, A = 1)$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 1$ 时刻的局域相干解。

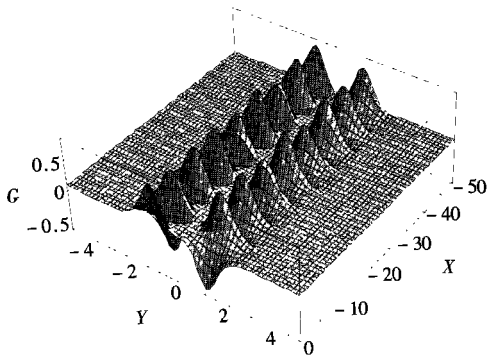


图 9

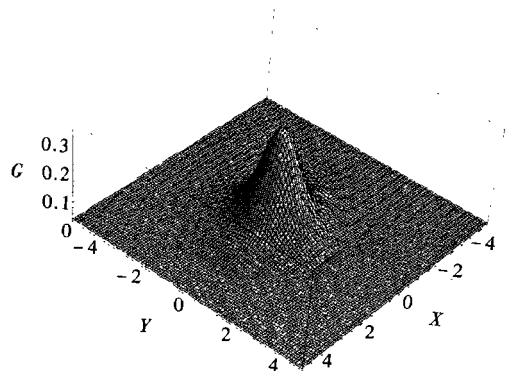


图 10

图 10 为选取

$$F = \exp(2x - 32t), \quad E = \exp(2y) \quad (a_1 = 1, a_2 = 2, A = 1)$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的局域相干解。

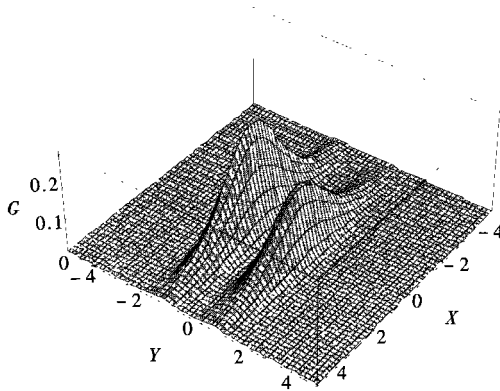


图 11

图 11 为选取

$$F = \exp(2x - 32t), \quad E = \exp(y^3) \quad (a_1 = 1, a_2 = 2, A = 1)$$

时场 $G(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的局域相干解。

4 结 论

我们利用推广的齐次平衡方法, 首先将高阶 $(2+1)$ 维 Broer_Kaup 方程线性化, 然后从线性化方程出发, 构造出分离变量解。由于拟解中不仅含有两个 y 的任意函数, 而且还有 $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, k_j, l_k\}$ 和 $\{N, M, L\}$ 这些参数可以任意选取, 因此合适的选择这些函数和参数, 可以得到许多新的相当丰富的孤子结构。

齐次平衡方法已经得到广泛的应用[18~21], 这里我们又进一步拓展了应用。这种方法对其他高维的非线性物理模型的推广值得深入研究。

[参 考 文 献]

- [1] Boiti M, Leon J J P, Martina L, et al. Scattering of localized solitons in the plane[J]. Phys Lett A, 1988, **132**(8,9): 432—439.
- [2] Fokas A S, Santini P M. On the simplest integrable equation in $2+1$ [J]. Physica D, 1990, **44**(1): 99—104; Hietarinta J, Hirota R. Multidromion solutions to the Davey-Stewartson equation[J]. Phys Lett A, 1990, **145**(5): 237—244.
- [3] Hietarinta J. One-dromion solutions for generic classes of equations[J]. Phys Lett A, 1990, **149**(2,3): 113—117.
- [4] Radha R, Lakshmanan M. Singularity analysis and localized coherent structures in $(2+1)$ -dimensional generalized Korteweg-de Vries equations[J]. J Math Phys, 1994, **35**(9): 4746—4756.
- [5] Radha R, Lakshmanan M. Dromion like structures in the $(2+1)$ -dimensional breaking soliton equation[J]. Phys Lett A, 1995, **197**(1): 7—12.
- [6] Radha R, Lakshmanan M. Exotic coherent structures in the $(2+1)$ -dimensional long dispersive wave equation[J]. J Math Phys, 1997, **38**(2): 292—299.
- [7] Radha R, Lakshmanan M. A new class of induced localized structures in the $(2+1)$ -dimensional scalar nonlinear Schrödinger equations[J]. J Phys A, 1997, **30**: 3229—3232.

- [8] Lou S Y, Dromion_like structures in a (3+1)-dimensional KdV-type equation[J]. J Phys A, 1996, **29**: 5989—6001.
- [9] Ruan H Y, Lou S Y. Higher-dimensional dromion structures: Jimbo-Miwa-Kadomtsev-Petviashvili system[J]. J Math Phys, 1997, **38**(6): 3123—3136.
- [10] Lou S Y. Generalized dromion solutions of the (2+1)-dimensional KdV equation[J]. J Phys A, 1995, **28**: 7227—2732.
- [11] Lou S Y. On the dromion solutions of the potential breaking soliton equation[J]. Commun Theor, 1996, **26**(4): 487—492.
- [12] Radha R, Lakshmanan M. Generalized dromions in the (2+1)-dimensional long dispersive wave (2LDW) and scalar nonlinear Schrödinger(NLS) equations[J]. Chaos Solitons & Fractals, 1999, **10**: 1821—1824.
- [13] ZHANG Jie_fang. Generalized dromions of the (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equations [J]. Communication in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2001, **6**(1): 50—53.
- [14] ZHANG Jie_fang. A simple soliton solution method for the (2+1)-dimensional long dispersive wave equations[J]. Acta Physica Sinica (Overseas Edition), 1999, **8**(2): 326—330.
- [15] Lou S Y. On the coherent structures of the Nizhnik-Novikov-Veselov equation[J]. Phys Lett A, 2000, **277**: 94—100.
- [16] Lou S Y, Ruan H Y. Revisitation of the localized excitations of the (2+1)-dimensional KdV equation [J]. J Phys A: Math Gen, 2001, **34**: 305—316.
- [17] RUAN Hang_yu, CHEN Yi_xin. Ring solitons, dromions, breathers and instantons of the NLS equation[J]. Acta Physica Sinica, 2001, **50**(4): 586—591.
- [18] WANG Ming_liang. The solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. Phys Lett A, 1995, **199**: 169—172.
- [19] ZHANG Jie_fang. Multiple solitons of long liquid wave equations[J]. Acta Physica Sinica, 1999, **47**(9): 1416—1420; Multi-soliton solutions of the dispersive long wave equation[J]. Chin Phys Lett, 1999, **16**(1): 659—661.
- [20] ZHANG Jie_fang. Bäcklund transformation and multisoliton-like solution of the (2+1)-dimensional dispersive long wave equations[J]. Commun Theor Phys, 2000, **33**(4): 577—582.
- [21] FANG Een_gui, ZHANG Hong_qing. Solitary wave solution of nonlinear wave equation[J]. Acta Physica Sinica, 1997, **46**(1): 1254—1259.
- [22] LOU Sen_yue, WU Xing_biao. Broer-Kaup systems from Darboux transformation related symmetry constraints of KP equation[J]. Commun Theor Phys, 1998, **29**(1): 145—148.

Localized Coherent Structures of the $(2+1)$ - Dimensional Higher Order Broer_Kaup Equations

ZHANG Jie_fang, LIU Yu_lu

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: By using the extended homogeneous balance method, the localized coherent structures are studied. A nonlinear transformation was first established, and then the linearization form was obtained based on the extended homogeneous balance method for the higher order $(2+1)$ -dimensional Broer_Kaup equations. Starting from this linearization form equation, a variable separation solution with the entrance of some arbitrary functions and some arbitrary parameters was constructed. The quite rich localized coherent structures were revealed. This method, which can be generalized to other $(2+1)$ -dimensional nonlinear evolution equation, is simple and powerful.

Key words: higher order Broer_Kaup equation; $(2+1)$ -dimension; coherent structure; homogeneous balance method