应用数学和力学, 第 23 卷 第 5 期(2002 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 05_0477_06

含约束非线性动力系统的分岔分类*

吴志强, 陈予恕

(天津大学 力学与工程测试系, 天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 讨论含约束非线性动力系统分岔的分类· 研究表明, 约束分岔的转迁集, 除分岔集、滞后集和双极限点集外, 还有三种转迁集是它特有的· 在此基础上提出了一种约束分岔问题的奇异性分类方法·

关 键 词: 约束; 分岔; 奇异性; 非线性动力系统

中图分类号: O322 文献标识码: A

引 言

随着非线性科学理论在应用方面的研究逐步深入, 工程技术动力学问题的分岔得到越来越广泛的研究· 特别是系统周期解分岔, 由于有广泛深刻的工程背景, 得到了大量的研究· 国内外同行都作了许多有意义的工作, 如 Bogoliubov 和 Mitropolsky[1]、Nayfefh 和 Mook[2]·

天津大学在参数激励系统的周期解分岔方面作了一系列细致的工作· 陈予恕与 Langford[3] 合作, 首先将 LS 方法和奇异性分析方法引入到非线性振动系统的研究, 丰富了人们对此类系统中的存在的周期解分岔模式的认识, 形成了一套完整的分析方法(CL 方法)· 在随后工作中, 对此类系统的共振周期解分岔进行了分析, 如[4~ 6]·

单自由度非线性系统的共振周期解分岔往往通过其振幅 u 满足的方程来来描述· 通常称该方程为分岔方程, 一般可写为:

$$g(u, \lambda; \alpha) = 0, \tag{1}$$

其中 u, λ, α 分别为状态变量、分岔参数、辅助参数(或开折参数)·

对分岔方程(1) , 可按照 Golubitsky 和 Scheffer 的奇异性理论方法[7] 进行深入细致的研究· 然而在实际问题中, 状态变量的变化往往受到限制, 我们称之为约束· 对这种带有约束的分岔问题, 如何进行奇异性分析, 目前还少见报道·

非线性动力学系统中广泛存在的周期解分岔, 因其振幅总是非负的, 因而本质上是一种约束分岔问题·

在不同的问题中, 约束的形式也多种多样· 常见的有:

* 收稿日期: 2001_06_22; 修订日期: 2002_01_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大 19990510) ; 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020316)

作者简介: 吴志强(1968—) , 男, 山西文水人, 副教授, 博士.

单边约束

$$u \geqslant \beta, \tag{c1}$$

其中 β 是约束特征参数• 比如周期解分岔研究中, 周期解振幅应该是非负的; 化学反应分岔中的浓度、温度等变量• 这是一种最简单最普遍的约束•

间隙约束

$$\beta_1 \leqslant u \leqslant \beta_2, \tag{c2}$$

其中 $\beta_i (i = 1, 2)$ 为约束特征参数• 在各类高速旋转的柔性转子及各类碰撞型共振机械中[8], 为保证安全或达到某种工作特性的要求, 常装有限幅器, 此种约束形式可用 (c2) 表示•

实际上, 在多自由度系统的周期解分岔的研究中, 也同样会遇到约束问题• Langford 和 Zhan[9]在研究 1: 1 强内共振系统的周期解分岔时, 讨论了带有约束(c1) 的分岔问题• 杨彩霞等人[10] 在 1: 2 内共振系统的研究中也得到了类似的约束分岔问题• Leblanc 和 Langford[11] 在研究 1: 2 内共振系统的 Hopf 分岔时, 利用解析几何的一些结论讨论了形如

$$-\frac{1}{\delta}[\sigma_2 \lambda^2 + (\sigma_1 + 1)\lambda u - \eta\lambda + \mu u] \geqslant 0$$

的约束分岔, 分岔方程次数为 2• 此种形式的约束可一般化为

$$h(u, \lambda; \alpha, \beta) \geqslant 0, \tag{c3}$$

其中 β 为约束特征常数•

由此可见, 约束分岔问题在工程非线性动力系统分岔研究中具有普遍性, 因此有关的研究不仅具有重要的理论意义, 而且具有重要的工程参考价值•

作为约束分岔问题研究的第一步, 本文研究最普遍的约束(c1) 的影响• 除特别说明外, 下文所除约束分岔均指由(1) 和(c1) 组成的约束分岔问题, 而将仅由方程(1) 描述的分岔称为非约束分岔• 本文首先在第 1 节阐述方法的核心思想和解法, 然后第 2 节通过几个具体的例子来说明约束分岔问题的计算方法, 最后在第 3 节给出结论•

1 核心思想及方法

本节按分岔方程(1) 是否具有对称性分两种情况讨论约束分岔问题的奇异性分析•

1 对称约束分岔问题

所谓对称(约束) 分岔问题是指其分岔方程具有如下的对称性

$$g(-u, \lambda; \alpha) = g(u, \lambda; \alpha)$$

或 $$g(-u, \lambda; \alpha) = -g(u, \lambda; \alpha)•$$

所谓非对称(约束) 分岔问题, 是指其分岔方程不具有上述对称性•

若分岔方程具有上述对称性, 则分岔图关于 $u = 0$ 对称, 因而约束分岔图等价当且仅当相应的分岔图等价• 因此, 在此情形下, 摄动保持的约束分岔的类型与摄动保持的分岔的类型一一对应, 即约束存在与否, 不会影响转迁集的计算• 这也真是为什么不少文献虽然讨论的是约束分岔, 但又极少明确提到' 约束" 一词的原因•

2 非对称约束分岔问题

若令

$$u = x^2• \tag{2}$$

则约束分岔问题转化为

$$g(x^2, \lambda; \alpha) = 0, \quad u = x^2 \geqslant 0 \tag{3}$$

由于约束条件自然满足，实际上通过变换(2)将关于 u 的约束分岔问题转换成关于 x 的非约束对称分岔问题

$$G(x, \lambda; \alpha) \overset{\text{def}}{=} g(x^2, \lambda; \alpha) = 0 \tag{4}$$

可以证明：若约束分岔问题的两约束分岔图 (λ, x) 不等价，则与之相应非约束分岔(4)问题的分岔图也必不等价． 也即，约束分岔问题的转迁集都包含在相应的无约束分岔问题(4)的转迁集当中． 因此，只要求得了分岔问题(4)的转迁集也就确定出了约束分岔问题的所有可能转迁集．

根据定义(4)，有如下表示：

$$G_x = g_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2xg_u, \quad G_\lambda = g_\lambda, \quad G_{xx} = 2g_u + 4x^2 g_{uu}. \tag{5}$$

结合转迁集的定义[7]，不难得出：

分岔集 $G = G_x = G_\lambda = 0$

$$G_x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{或 } g_u = 0 \tag{6}$$

因此分岔集包含两部分：

$$(\mathrm{B\,I})\begin{cases} g(0, \lambda; \alpha) = 0, \\ g_\lambda(0, \lambda; \alpha) = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{B\,II})\begin{cases} g(u, \lambda; \alpha) = 0, \\ g_u(u, \lambda; \alpha) = 0, \\ g_\lambda(u, \lambda; \alpha) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

滞后集 $G = G_x = G_{xx} = 0$

由(6)知，滞后集也包含两部分：

$$(\mathrm{H\,I})\begin{cases} g(0, \lambda; \alpha) = 0, \\ g_u(0, \lambda; \alpha) = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{H\,II})\begin{cases} g(u, \lambda; \alpha) = 0, \\ g_u(u, \lambda; \alpha) = 0, \\ g_{uu}(u, \lambda; \alpha) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

双极限点集 $G(x_i, \lambda; \alpha) = G_x(x_i, \lambda; \alpha) = 0 (i = 1, 2; x_1 \neq x_2)$

$$(\mathrm{DL\,I})\begin{cases} g(0, \lambda; \alpha) = 0, \\ g(u, \lambda; \alpha) = g_u(u, \lambda; \alpha) = 0, \\ (u \neq 0), \end{cases} \qquad (\mathrm{DL\,II})\begin{cases} g(u_i, \lambda; \alpha) = 0, \\ g_u(u_i, \lambda; \alpha) = 0, \ (i = 1, 2) \\ (u_1 \neq u_2) \end{cases}$$

$$(\mathrm{DL\,III})\begin{cases} G(x_i, \lambda; \alpha) = 0, \\ G_x(x_i, \lambda; \alpha) = 0, \ (i = 1, 2). \\ (x_1 = -x_2) \end{cases}$$

由此可以发现，分岔问题 $G(x, \lambda; \alpha) = 0$ 与分岔问题 $g(u, \lambda; \alpha) = 0$ 相比，新增转迁集为(BⅠ)、(HⅠ)、(DLⅠ)、(DLⅢ)，其中(DLⅢ)显然不是约束分岔的转迁集． 因此，只要求出相应非约束分岔问题(1)的转迁集以及(BⅠ)、(HⅠ)和(DLⅠ)，就求出了约束分岔问题的所有可能的转迁集．

若约束分岔问题的分岔方程是普适开折，则位于约束区域中的分岔点集、滞后点集、双极限点集、(BⅠ)、(HⅠ)、以及满足 $u > 0$ 的(DLⅠ)就构成了约束分岔问题的约束转迁集． 若约束分岔问题的分岔方程不是普适开折，则需在此基础上进一步验证这些集合两侧的约束图是否等价，若等价则该集合不是约束转迁集，反之则是．

下节通过几个具体的例子说明本文法的实用性和有效性．

2　应用举例

例 1　$g = x^4 + \alpha_0\lambda x^2 + \lambda^2 + \alpha_1 x\lambda + \alpha_4 \quad (\alpha_0 > 2)$•

正规形 $x^4 + \alpha_0\lambda x^2 + \lambda^2$ 是余维 5 的[12]•　今选其一种双参数开折 g 作为例子进行研究•经计算 $g = 0$ 对应的分岔集 B、滞后集 H、双极限点集 DL 分别包括:

$$B_1: \alpha_4 = 0,$$

$$B_2^{\pm}: \alpha_4 = \frac{1}{128}\frac{(\alpha_0^4 - 80\alpha_0^2 - 128 \pm \sqrt{\alpha_0^2(\alpha_0^2 + 32)^3})\alpha_1^4}{(\alpha_0^2 - 4)^3};$$

$$H: \alpha_4 = -\frac{243}{256}\frac{\alpha_1^4(\alpha_0^2 + 12)}{\alpha_0^6},$$

$$DL: \alpha_1 = 0 \text{ 且 } \alpha_4(\alpha_0^2 - 4) \geqslant 0 \text{•}$$

约束分岔问题(1)可能的转迁集还包括(见图 1):

$$B\text{Ⅰ}: \alpha_4 = 0,$$

$$H\text{Ⅰ}_1: \alpha_4 = 0,$$

$$H\text{Ⅰ}_2: \alpha_1 = 0, \text{ 且 } \alpha_4 \leqslant 0,$$

$$DL\text{Ⅰ}: \alpha_4 = \frac{729\alpha_1^4}{\alpha_0^6} \text{•}$$

计算各区域中的约束分岔图发现, 区域 J、A、B 中的分岔图的拓扑结构相同, 因此区域 A 与 J、A 与 B 的边界不是转迁集, 应当去掉; 基于同样原因, 区域 D_1 与 C、D_2 与 E 之间的边界也应当去掉•　最终得到约束分岔问题的转迁集和分岔图(见图 2)•

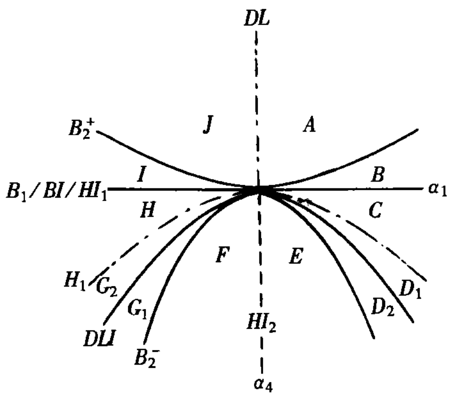

图 1　可能的约束转迁集

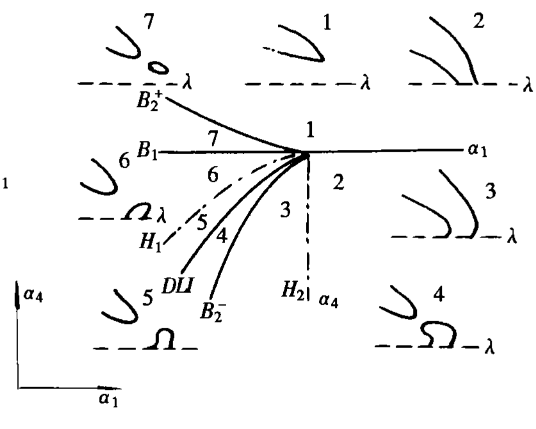

图 2　约束分岔的转迁集和分岔图

例 2　$g = u^2 + \alpha_0\lambda u + \lambda^2 + \alpha_2 u + \alpha_4 \quad (\alpha_0 > 2)$•

分岔问题 $g = 0$ 的转迁集包括(见图 3):

1　分岔集 B: $\alpha_4 = -\dfrac{1}{\alpha_0^2 - 4}\alpha_2^2$,

2　滞后集 H: Φ(空集),

3　双极限点 DL: Φ(空集)•

相应约束分岔问题的转迁集还可能包括(见图 3)

4　BⅠ: $\alpha_4 = 0$,

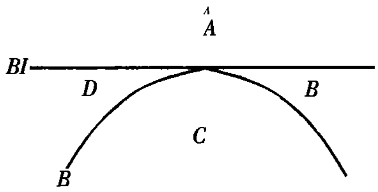

图 3　候选转迁集

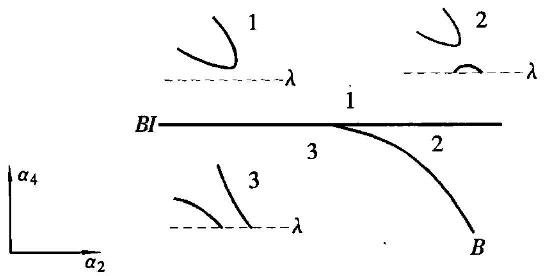

图 4　约束分岔的转迁集和分岔图

5　HⅠ: Φ(空集),

6　DLⅠ: Φ(空集)•

由于区域 C、D 中的约束分岔图拓扑结构相同, 因此它们之间的边界不是约束分岔问题的转迁集•　于是该约束分岔问题的转迁集和分岔图为图 4•

例 3　$g = x^3 + \lambda^2 + \alpha + \beta x + \gamma x\lambda$　($\gamma > 0$)([7, p206])

分岔 $g = 0$ 的转迁集包括:

1　B: $432\alpha^2 - \alpha\gamma^2(\gamma^4 - 72\beta) - \beta^2(\gamma^4 - 64\beta) = 0$,

2　H: $\alpha\gamma^2 + \beta^2 = 0$,　$\alpha \leqslant 0$,

3　DL: Φ•

相应的约束分岔问题, 还可能包含下列转迁集:

4　BⅠ: $\alpha = 0$,

5　HⅠ = DLⅠ = Φ•

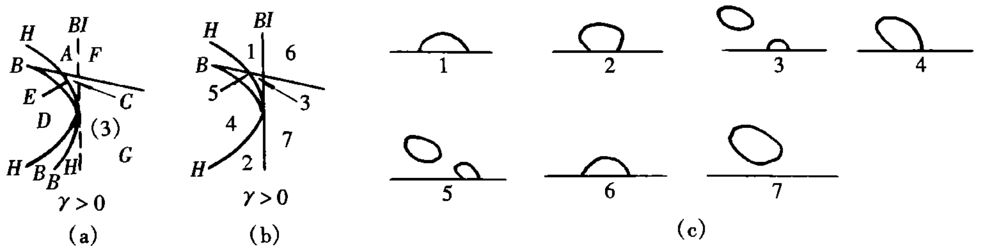

图 5　转迁集和保持性约束分岔图

比较发现, 图 5(a) 中只有区域 B 和 H 中的约束分岔图是拓扑等价的, 因而它们的边界不是约束转迁集, 将它从所有可能的转迁集中去掉, 就得到了约束转迁集图 5(b)•　这些集合将开折参数平面 (α, β) 分成若干区域, 每个区域中的约束分岔图是等价的(见图 5(c))•

3　小　　结

约束分岔问题, 在非线性共振动力系统周期解研究中具有很大的普遍性•　但尚未引起人们足够的重视•

作为约束分岔问题研究的第一步, 本文讨论了最常见的约束分岔, 其状态变量是非负的•　其它类型的约束分岔问题将是我们下一步研究的内容•

本文研究指出, 对不具有轴对称的分岔, 约束对约束转迁集、进而对保持性分岔的类型有很大的影响; 而对具有轴对称的分岔, 约束没有影响•

研究还表明,除相应非约束分岔问题的分岔集、滞后集、双极限点集外,约束分岔的转迁集还包括另外三种类型,文中分别记为 BⅠ、HⅠ、DLⅠ·

由于转迁集将开折参数空间分成若干单连通域,且每个区域中约束分岔图是拓扑等价的,因而只要确定出转迁集也就完成了对约束分岔的分类· 因此本文实际上提出了一种研究约束分岔的方法· 本文的例子说明,该方法是实用和有效的·

[参 考 文 献]

[1] Bogoliubov N N, Mitropolsky Y A. A Symptotic Method in the Theory of Nonlinear Oscillation [M]. New York: Gordon and Breach, 1961.

[2] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: John Wiley and Sons, 1979.

[3] 陈予恕, W F Langford. 非线性马休方程的亚谐分岔解[J]. 力学学报, 1988, **20**(6): 522—632.

[4] 陈予恕, 梅林涛. 非线性参数振动系统的共振分岔解[J]. 中国科学 A, 1990, **23**(12): 1467—1476.

[5] 陈予恕, 徐鉴. Van der Pol_Duffing_Mathieu 系统在主参数共振时的分岔解的普适性分类[J]. 中国科学 A 辑, 1995, **25**(12): 1287—1297.

[6] CHEN Yu_shu, Andrew Y T Leung. Bifurcation and Chaos in Engineering [M]. London: Springer_Verlag, 1998.

[7] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory Vol. Ⅰ [M]. New York: Sringer_Verlag, 1985.

[8] 闻邦椿, 顾家柳, 夏松波, 等. 高等转子动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2000.

[9] Langford W F, Zhan K. Dynamics of strong 1:1 resonance in Vortex_induced vibration[A]. In: Paidoussis M P, Akylas T, Abraham P B Ed. Fundamental Aspects of Fluid_Structure Interactions [C]. PVP_Vol. 247, 1992.

[10] 杨彩霞. 高维不对称非线性动力系统的 1:2 内共振 Hope 分岔及高余维奇异性分析[D]. 博士学位论文. 天津: 天津大学, 2000.

[11] Leblanc V G, Langford W F. Classification and unfoldings of 1:2 resonant Hopf bifurcation[J]. Arch Rational Mech Anal, 1996, **136**(4): 305—357.

[12] 陈芳启. 若干非线性问题[R]. 天津: 天津大学博士后出站报告, 2000.

Classification of Bifurcations for Nonlinear Dynamical Problems With Constraints

WU Zhi_qiang, CHEN Yu_shu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

Abstract: Bifurcation of periodic solutions widely existed in nonlinear dynamical systems is a kind of constrained one in intrinsic quality because its amplitude is always non_negative. Classification of the bifurcations with the type of constraint was discussed. All its six types of transition sets are derived, in which three types are newly found and a method is proposed for analyzing the constrained bifurcation.

Key words: constraint; bifurcation; singularity; nonlinear dynamical problem