

文章编号: 1000-0887(2002) 05-0453-06

有限条法分析板在移动车载作用下的动响应^{*}

程远胜¹, 张佑², 区达光²

(1. 华中科技大学 交通科学与工程学院, 武汉 430074; 2. 香港大学 土木系)

(本刊编委张佑 来稿)

摘要: 提出了一个模拟移动车辆和矩形板相互作用的板_车条。用板_车条模拟直接与车辆相接触的板条部分; 用传统的板有限条模拟未直接受车辆作用的板条部分。分析中, 每辆车理想化为一个具有上、下部质量块, 由弹簧和阻尼器连接的单足动力系统。计算示例表明, 用该方法分析得到的结果与已有结果很吻合。

关键词: 板; 移动车辆; 动响应; 有限条法
中图分类号: O326; U441 **文献标识码:** A

引 言

梁类型的结构在移动车载作用下的动响应已得到广泛的研究。然而, 板在移动车载作用下的动响应研究尚未受到足够的注意。文献[1~4]分别用有限元法分析了板在移动车辆作用下的动响应。文献[5]用结构阻抗法研究了板的动响应, 将移动载荷和板视为一个整体结构系统的组成部分, 并用有限元法计算影响函数。文献[6]亦利用结构阻抗法求解了类似的问题, 但采用有限条法计算影响函数。在各种数值方法中, 有限元法无疑是功能最强、用途最广的方法。然而, 精细的划分经常导致方程数量多和矩阵带宽大的问题, 使得解题费用高。有限条法通常使得方程数量少和矩阵带宽小, 对于两端简支矩阵板尤其如此。因此, 当可应用时有限条法较有限元法分析费用低。结构阻抗法亦是分析板_车相互作用问题的有效方法。因为该方法分开处理板模型和车模型, 改变板模型不影响车模型, 反之亦然。

本文用有限条法分析板在移动车辆作用下的动响应。两种类型的有限条, 即板_车条和传统板条用来模拟受移动车载作用的板。板_车条由传统板条及作用其上的车辆组成。因板_车相互作用已在条的水平上予以了考虑, 因此, 传统的有限条组装过程可用来形成整个板_车系统的运动方程。

1 理论与公式

考虑一块两端简支, 受 N 个移动车辆作用的矩形薄板。用一系列的矩形板条分割该板。不含任何车辆的板条用传统板条模拟而载有车辆的板条用板_车条来模拟。图 1 给出了一个宽为 b , 长为 l 的板_车条。它由传统板条及作用在该板条上的车辆组成。设有 N_v 个移

* 收稿日期: 2001_03_27; 修订日期: 2001_11_28

作者简介: 程远胜(1962—), 男, 湖北武汉人, 副教授, 博士, 系主任。

动车辆直接作用在板条上。每辆车由上、下两个质量块及连接它们的弹簧和阻尼器组成。用 m_{v_2} 、 m_{v_1} 、 k_{v_i} 和 c_{v_i} 分别表示第 i 辆车的上、下质量块的质量、连接质量块的弹簧的刚性系数和阻尼器的阻尼系数。质量 m_{v_2} 、 m_{v_1} 的垂向位移用 y_{i2} 和 y_{i1} 表示, 它们相对于质量块的垂向静力平衡位置且向下为正。

设 $w(\xi, \eta, t)$ 表示 t 时刻, 点 (ξ, η) 处的板条垂向位移(向下为正), 其可表示为

$$w(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^r \{N\}_m^T \{ub\}_m = \{N\}^T \{ub\}, \quad (1)$$

式中 r 是板条纵向位移函数级数的项数, $\{N\}_m$ 和 $\{ub\}_m$ 分别是对应于位移函数第 m 项, 含有形函数和结线位移参数的列向量。显然, $\{N\}_m$ 是位置 (ξ, η) 的函数; $\{ub\}_m$ 是时间 t 的函数, 向量 $\{N\}_m$ 和 $\{ub\}_m$ 用其第 i 个元素表示为

$$\{N\}_m = \{N_i\}, \quad (2)$$

$$\{ub\}_m = \{u_{bi}\} \quad (i = 1, 2, \dots, s \times n_e), \quad (3)$$

式中 s 是一个板条所含结线的数目, n_e 是每个结线的自由度数。文献[7]给出了各种类型板条的 $\{N\}_m$ 和 $\{ub\}_m$ 表达式。对于低阶(LO2)混合板条, 列向量 $\{N\}_m$ 和 $\{ub\}_m$ 分别为

$$\{N\}_m = \begin{Bmatrix} [1 - 3(\xi/b)^2 + (\xi/b)^3] Y_{1m}(\eta) \\ \xi [1 - 2(\xi/b) + (\xi/b)^2] Y_{1m}(\eta) \\ [3(\xi/b)^2 - 2(\xi/b)^3] Y_{2m}(\eta) \\ \xi [(\xi/b)^2 - (\xi/b)] Y_{2m}(\eta) \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

$$\{ub\}_m = \{w_{1m}(t) \quad \theta_{1m}(t) \quad w_{2m}(t) \quad \theta_{2m}(t)\}^T, \quad (5)$$

式中 $Y_{jm}(\eta)$ 是对应于级数第 m 项, 结线 j (对于低阶板条, $j = 1, 2$) 处的纵向位移函数。 $w_{jm}(t)$ 和 $\theta_{jm}(t)$ 则分别是对应于级数第 m 项, 在结线 j 处的位移和转角参数。

对于两端简支的矩形板, 纵向位移函数是正弦级数; 对更为复杂的情况, 如剖面突变的板, 文献[8]给出了确定纵向位移函数的方法。

设 $\xi_i = b_i$ 和 $\eta_i = \eta_{c_i}(t)$ 表示第 i 辆车的横向和纵向位置, 定义一个 $(rsn_e) \times N_v$ 阶的矩阵 $[N_c]$ 如下:

$$[N_c] = \begin{bmatrix} [N_c]_{11} & [N_c]_{12} & \dots & [N_c]_{1N_v} \\ [N_c]_{21} & [N_c]_{22} & \dots & [N_c]_{2N_v} \\ \vdots & & & \vdots \\ [N_c]_{r1} & [N_c]_{r2} & \dots & [N_c]_{rN_v} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其子矩阵 $[N_c]_j$ 为

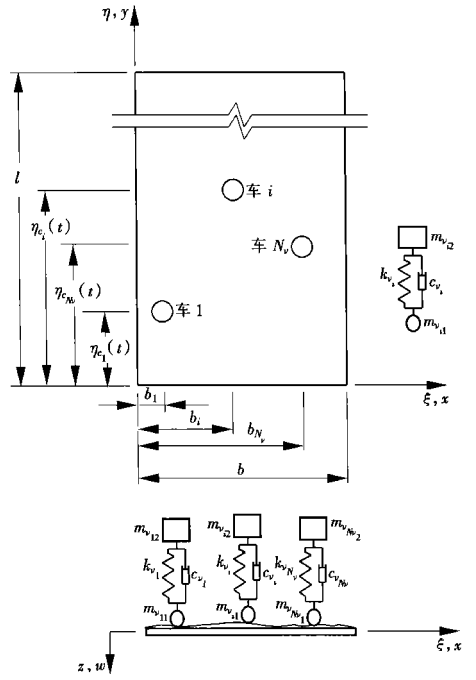


图1 一个典型的板_车条

$$[N_c]_j = \left\{ N(\xi_j, \eta_j) \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, N_v) \quad (7)$$

设 $r_c(\xi, \eta)$ 表示板上表面的不平顺度, 列向量 $\{r_c\}$ 的元素为车与板条接触点处板的
不平顺度值。移动车辆和板条在接触点处满足下列关系式:

$$\{y_1\} = [N_c]^T \{u_b\} + \{r_c\}, \quad (8)$$

$$\{y_2\} = [N_c]^T \{\dot{u}_b\} + [v][N_c]^T_{,\eta} \{u_b\} + [v]\{r_c\}_{,\eta} \quad (9)$$

$$\{\dot{y}_1\} = [N_c]^T \{\ddot{u}_b\} + 2[v][N_c]^T_{,\eta} \{\dot{u}_b\} + [a][N_c]^T_{,\eta} \{u_b\} + [v]^2 [N_c]^T_{,\eta\eta} \{u_b\} + [a]\{r_c\}_{,\eta} + [v]^2 \{r_c\}_{,\eta\eta} \quad (10)$$

这里矩阵 $[a]$ 和 $[v]$ 的元素分别是车辆的加速度和速度。它们为对角阵, 即

$$[a] = \text{diag}[a_i], \quad [v] = \text{diag}[v_i] \quad (i = 1, 2, \dots, N_v) \quad (11 \sim 12)$$

根据车、板条的运动方程和由方程(8)~(10)定义的约束条件, 可得到板_车条的运动方程为^[9]

$$\begin{bmatrix} [m_b] + [m_{11}] & [0] \\ [0] & [m_{v2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_b\} \\ \{\dot{y}_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [c_b] + [c_{11}] & [c_{12}] \\ [c_{21}] & [c_v] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_b\} \\ \{y_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_b] + [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_v] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_b\} \\ \{y_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p_b\} + \{f_b\} \\ \{f_{v2}\} \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

$$\text{式中: } [m_{11}] = [N_c][m_{v1}][N_c]^T, \quad (14)$$

$$[c_{11}] = 2[N_c][m_{v1}][v][N_c]^T_{,\eta} + [N_c][c_v][N_c]^T \quad (15)$$

$$[c_{12}] = -[N_c][c_v], \quad [c_{21}] = -[c_v][N_c]^T, \quad (16 \sim 17)$$

$$[k_{11}] = [N_c][m_{v1}][a][N_c]^T_{,\eta} + [N_c][m_{v1}][v]^2 [N_c]^T_{,\eta\eta} + [N_c][c_v][v][N_c]^T_{,\eta} + [N_c][k_v][N_c]^T, \quad (18)$$

$$[k_{12}] = -[N_c][k_v], \quad (19)$$

$$[k_{21}] = -[c_v][v][N_c]^T_{,\eta} - [k_v][N_c]^T, \quad (20)$$

$$\{f_b\} = [N_c] \left(\{f_w\} - [k_v]\{r_c\} - [c_v][v]\{r_c\}_{,\eta} - [m_{v1}][a]\{r_c\}_{,\eta} - [m_{v1}][v]^2 \{r_c\}_{,\eta\eta} \right), \quad (21)$$

$$\{f_{v2}\} = [c_v][v]\{r_c\}_{,\eta} + [k_v]\{r_c\}, \quad (22)$$

$$\{f_w\} = \{f_{wi}\} = \left\{ (m_{vi1} + m_{vi2})g \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N_v), \quad (23)$$

$$[m_{v2}] = \text{diag}[m_{vi2}], \quad [c_v] = \text{diag}[c_{vi}], \quad [k_v] = \text{diag}[k_{vi}] \quad (i = 1, 2, \dots, N_v), \quad (24 \sim 26)$$

$[m_b]$, $[c_b]$ 和 $[k_b]$ 分别是板条的质量、阻尼和刚度矩阵; $\{u_b\}$, $\{\dot{u}_b\}$ 和 $\{\ddot{u}_b\}$ 分别是板条结线的位移、速度和加速度向量; $\{p_b\}$ 是外载荷向量; $\{y_2\}$, $\{\dot{y}_2\}$ 和 $\{\ddot{y}_2\}$ 为车辆上部质量块的位移、速度和加速度向量, g 是重力加速度。如果阻尼设为 Rayleigh 类型的阻尼, 则矩阵 $[c_b]$ 可容易地从矩阵 $[m_b]$ 和 $[k_b]$ 得到。对于低阶(LO2)混合板条, 其刚度子矩阵 $[k_b]_{mn}$ 和质量子矩阵 $[m_b]_{mn}$ 分别为^[6]

$$[k_b]_{mn} = \frac{1}{420b^3} \times \int_0^l \begin{bmatrix} k_{b11} & k_{b12} & k_{b13} & k_{b14} \\ k_{b21} & k_{b22} & k_{b23} & k_{b24} \\ k_{b31} & k_{b32} & k_{b33} & k_{b34} \\ k_{b41} & k_{b42} & k_{b43} & k_{b44} \end{bmatrix} dy, \quad (27)$$

其中

$k_{b11} = 5\ 040D_x Y_{1m} Y_{1n} -$ $504b^2 D_1 Y_{1m} Y_{1n} -$ $504b^2 D_1 Y_{1m} Y_{1n} +$ $156b^4 D_y Y_{1m} Y_{1n} +$ $2\ 016b^2 D_{xy} Y_{1m} Y_{1n},$	$k_{b12} = 2\ 520bD_x Y_{1m} Y_{1n} -$ $462b^3 D_1 Y_{1m} Y_{1n} -$ $42b^3 D_1 Y_{1m} Y_{1n} +$ $22b^5 D_y Y_{1m} Y_{1n} +$ $168b^3 D_{xy} Y_{1m} Y_{1n},$	$b_{b13} = -5\ 040D_x Y_{1m} Y_{2n} +$ $504b2D_1 Y_{1m} Y_{2n} +$ $504b^2 D_1 Y_{1m} Y_{2n} +$ $54b^4 D_y Y_{1m} Y_{2n} -$ $2\ 016b^2 D_{xy} Y_{1m} Y_{2n},$	$k_{b14} = 2\ 520bD_x Y_{1m} Y_{2n} -$ $42b^3 D_1 Y_{1m} Y_{2n} -$ $42b^3 D_1 Y_{1m} Y_{2n} -$ $13b^5 D_y Y_{1m} Y_{2n} +$ $168b^3 D_{xy} Y_{1m} Y_{2n},$
$k_{b21} = 2\ 520bD_x Y_{1m} Y_{1n} -$ $462b^3 D_1 Y_{1m} Y_{1n} -$ $42b^3 D_1 Y_{1m} Y_{1n} +$ $22b^5 D_y Y_{1m} Y_{1n} +$ $168b^3 D_{xy} Y_{1m} Y_{1n},$	$k_{b22} = 1\ 680b^2 D_x Y_{1m} Y_{1n} -$ $56b^4 D_1 Y_{1m} Y_{1n} -$ $56b^4 D_1 Y_{1m} Y_{1n} +$ $4b^6 D_y Y_{1m} Y_{1n} +$ $224b^4 D_{xy} Y_{1m} Y_{1n},$	$k_{b23} = -2\ 520bD_x Y_{1m} Y_{2n} +$ $42b^3 D_1 Y_{1m} Y_{2n} +$ $42b^3 D_1 Y_{1m} Y_{2n} +$ $13b^5 D_y Y_{1m} Y_{2n} -$ $168b^3 D_{xy} Y_{1m} Y_{2n},$	$k_{b24} = 840b^2 D_x Y_{1m} Y_{2n} +$ $14b^4 D_1 Y_{1m} Y_{2n} +$ $14b^4 D_1 Y_{1m} Y_{2n} -$ $3b^6 D_y Y_{1m} Y_{2n} -$ $56b^4 D_{xy} Y_{1m} Y_{2n},$
$k_{b31} = -5\ 040D_x Y_{2m} Y_{1n} +$ $504b^2 D_1 Y_{2m} Y_{1n} +$ $504b^2 D_1 Y_{2m} Y_{1n} +$ $54b^4 D_y Y_{2m} Y_{1n} -$ $2\ 016b^2 D_{xy} Y_{2m} Y_{1n},$	$k_{b32} = -2\ 520bD_x Y_{2m} Y_{1n} +$ $42b^3 D_1 Y_{2m} Y_{1n} +$ $42b^3 D_1 Y_{2m} Y_{1n} +$ $13b^5 D_y Y_{2m} Y_{1n} -$ $168b^3 D_{xy} Y_{2m} Y_{1n},$	$k_{b33} = 5\ 040D_x Y_{2m} Y_{2n} -$ $504b^2 D_1 Y_{2m} Y_{2n} -$ $504b^2 D_1 Y_{2m} Y_{2n} +$ $156b^4 D_y Y_{2m} Y_{2n} +$ $2\ 016b^2 D_{xy} Y_{2m} Y_{2n},$	$k_{b34} = -2\ 520bD_x Y_{2m} Y_{2n} +$ $462b^3 D_1 Y_{2m} Y_{2n} +$ $42b^3 D_1 Y_{2m} Y_{2n} -$ $22b^5 D_y Y_{2m} Y_{2n} -$ $168b^3 D_{xy} Y_{2m} Y_{2n},$
$k_{b41} = 2\ 520bD_x Y_{2m} Y_{1n} -$ $42b^3 D_1 Y_{2m} Y_{1n} -$ $42b^3 D_1 Y_{2m} Y_{1n} -$ $13b^5 D_y Y_{2m} Y_{1n} +$ $168b^3 D_{xy} Y_{2m} Y_{1n},$	$k_{b42} = 840b^2 D_x Y_{2m} Y_{1n} +$ $14b^4 D_1 Y_{2m} Y_{1n} +$ $14b^4 D_1 Y_{2m} Y_{1n} -$ $3b^6 D_y Y_{2m} Y_{1n} -$ $56b^4 D_{xy} Y_{2m} Y_{1n},$	$k_{b43} = -2\ 520bD_x Y_{2m} Y_{2n} +$ $462b^3 D_1 Y_{2m} Y_{2n} +$ $42b^3 D_1 Y_{2m} Y_{2n} -$ $22b^5 D_y Y_{2m} Y_{2n} -$ $168b^3 D_{xy} Y_{2m} Y_{2n},$	$k_{b44} = 1\ 680b^2 D_x Y_{2m} Y_{2n} -$ $56b^4 D_1 Y_{2m} Y_{2n} -$ $56b^4 D_1 Y_{2m} Y_{2n} +$ $4b^6 D_y Y_{2m} Y_{2n} +$ $224b^4 D_{xy} Y_{2m} Y_{2n},$

$$[mb]_{mn} = \int_0^a \rho h \begin{bmatrix} \frac{13b}{35} Y_{1m} Y_{1n} & \frac{11b^2}{210} Y_{1m} Y_{1n} & \frac{9b}{70} Y_{1m} Y_{2n} & -\frac{13b^2}{420} Y_{1m} Y_{2n} \\ \frac{11b^2}{210} Y_{1m} Y_{1n} & \frac{b^3}{105} Y_{1m} Y_{1n} & \frac{13b^2}{420} Y_{1m} Y_{2n} & -\frac{b^3}{140} Y_{1m} Y_{2n} \\ \frac{9b}{70} Y_{2m} Y_{1n} & \frac{13b^2}{420} Y_{2m} Y_{1n} & \frac{13b}{35} Y_{2m} Y_{2n} & -\frac{11b^2}{210} Y_{2m} Y_{2n} \\ -\frac{13b^2}{420} Y_{2m} Y_{1n} & -\frac{b^3}{140} Y_{2m} Y_{1n} & -\frac{11b^2}{210} Y_{2m} Y_{2n} & \frac{b^3}{105} Y_{2m} Y_{2n} \end{bmatrix} dy \quad (28)$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}, \quad (29)$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}, \quad (30)$$

$$D_1 = \frac{\mu_x E_y h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)} = \frac{\mu_y E_x h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}, \quad (31)$$

$$D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12}, \quad (32)$$

这里 ρ 表示质量密度, E_x 和 E_y 表示横向和纵向的弹性模数, h 为板厚, G_{xy} 是剪切模数, μ_x 和 μ_y 分别为横向和纵向的泊松比。

从方程(13)~(26)可知,板车条的矩阵是时变和非对称的。值得指出的是,上述推导并未涉及特定的板条。因此,所得到的板车条的公式具有一般性,可应用于任何类型的传统板条。

依本文方法,仅两种类型的板条用来模拟板车系统。它们是传统的板条和所推导的板车条。因为车与板条间的相互作用已在条的水平上给予了考虑,因此,利用传统的有限条组装过程,所有条的矩阵可组装形成整个板车系统的运动方程。于是 Newmark β 法或类似的技术可用来求解整个系统的运动方程。

2 计算示例

考虑一个长 $l_b = 20$ m, 宽 $b_w = 10$ m, 厚 $h = 1$ m 的两端简支各向异性矩形板。其质量密度 $\rho = 90$ kg/m³, 单位长度的横向弯曲刚度 $D_x = 6.131 \times 10^4$ kNm²/m; 单位宽度的纵向弯曲刚度 $D_y = 6.131 \times 10^6$ kNm²/m; 单位宽度的扭转刚度 $D_{xy} = 1.181 \times 10^5$ kNm²/m; 单位宽度的耦合刚度 $D_1 = 9.196 \times 10^3$ kNm²/m。板(不含车)的一阶频率 ω_1 为 203.64 rad/s。车模拟成一个弹簧支持的质量块,即推导中涉及的车下部质量块和阻尼器在算例分析中忽略了。三个无量纲参数分别是速度参数 $\alpha = v\pi/(\omega_1 l_b)$, 车、板质量比 $\kappa = m_2/(\rho l_b b_w h)$ 和车、板频率比 $\phi = \omega_c/\omega$, 其中车的自然频率 ω_c 等于 $\sqrt{(k/m_2)}$ 。

算例分析中,级数取 10 项,板条数亦取为 10 且为等宽度的板条。三个无量纲参数分别取为 $\alpha = 0.15$, $\kappa = 0.5$ 和 $0.1 \leq \phi \leq 1.2$, 车辆假定沿板的中心线行进。结果表达中规格化的板中心点动位移指的是板中心点最大动位移与由同一辆车作为静载荷作用在板中心点产生的该点静位移之比。图 2 给出了规格化的最大板中心点动位移随参数 ϕ 变化的情况。从该图可知,用本文方法分析得到的结果与用结构阻抗方法分析得到的结果一致。

3 结论

本文提出了一个板车条用于分析板在移动车辆作用下的动响应。一个板车条由一个传统板条及作用在该板条上的车辆组成。因板、车相互作用,板车条的矩阵是时变和非对称的。由于板、车相互作用已在条的水平上予以了考虑,因此,传统的有限条组装技术可用来形成整个板车系统的运动方程。用本方法分析得到的结果与已有结果一致。

[参 考 文 献]

- [1] Wu J S, Lee M L, Lai T S. The dynamic analysis of a flat plate under a moving load by the finite element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(4): 743—762.
- [2] Taheri M R, Ting E C. Dynamic response of plate to moving loads: finite element method[J]. Computers & Structures, 1990, 34(3): 509—521.

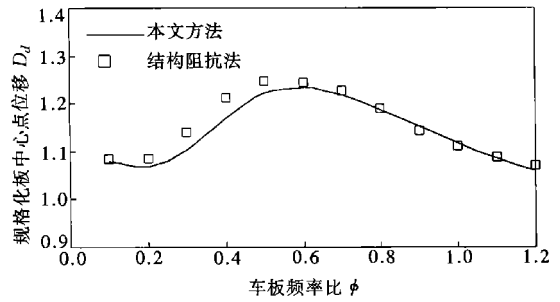


图 2 两端简支各向异性矩形板在一个车辆沿其中心线行进作用下规格化板中心点的位移 ($\kappa = 0.5, \alpha = 0.15$)

- [3] Yener M, Chompooming K. Numerical method of lines for analysis of vehicle_bridge dynamic interaction[J]. *Computers & Structures*, 1994, **53**(5): 709—726.
- [4] Humar J L, Kashif A H. Dynamic response analysis of slab_type bridges[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1995, **121**(1): 48—62.
- [5] Taheri M R, Ting E C. Dynamic response of plate to moving loads: structural impedance method[J]. *Computers & Structures*, 1989, **33**(6): 1379—1393.
- [6] Zheng D Y. Vibration and stability analysis of plate_type structures under moving loads by analytical and numerical methods[D]. Ph D Thesis. Hong Kong: The University of Hong Kong, 1999.
- [7] Cheung Y K, Tham L G. Finite Strip Method [M]. Boca Raton: CRC Press, 1998.
- [8] Au F T K, Zheng D Y, Cheung Y K. Vibration and stability of nonuniform beams with abrupt changes of cross_section by using C^1 modified beam vibration functions[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 1999, **23**(1): 19—34.
- [9] Cheng Y S. Vibration analysis of bridges under moving vehicles and trains[D]. Ph D Thesis. Hong Kong: The University of Hong Kong, 2000.

Dynamic Response of Plates Due to Moving Vehicles Using Finite Strip Method

CHENG Yuan_sheng¹, Y K CHEUNG², F T K AU²,

(1. Faculty of Traffic Science and Engineering, Huazhong University
of Science and Technology, Wuhan 430074, P R China;

2. Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong, Pokfulam
Road, Hong Kong, P R China)

Abstract: Dynamic response of beam_like structures to moving vehicles has been extensively studied. However, the study on dynamic response of plates to moving vehicles has so far received but scant attention. A plate_vehicle strip for simulating the interaction between a rectangular plate and moving vehicles was described. For the portion of strips that are in direct contact with the moving vehicles, the plate_vehicle strips were employed. Conventional plate finite strips were used to model the portion of strips that are not directly under the action of moving vehicles. In the analysis, each moving vehicle is idealized as a one_foot dynamic system with the unsprung mass and sprung mass interconnected by a spring and a dashpot. The numerical results obtained from the proposed method agree well with available results.

Key words: plate; moving vehicle; dynamic response; finite strip method