应用数学和力学,第 23 卷 第 5 期(2002 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于 一类反应扩散方程解的熄灭现象 一文的注记

陈松林

(安徽工业大学 数理系,安徽 马鞍山市 243002)

文 一类反应扩散方程解的熄灭现象 (见: 应用数学和力学, 2001, 22(11): 1217 1220) 的引理 1 在发表时没有严格证明, 现给出其严格证明:

引理 假设 $y(t)$ 0 是下面微分不等式的一个解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + Cy^{k/2} + 2\ y \quad 0 \\ y(0) \quad 0 \quad (\text{给定}) \end{cases} \qquad t \quad 0,$$

这里 k $(1, 2)$, $C >$ 0 是常数, 则有如下指数衰减估计:

$$y(t) \quad \left[\left(y(0)^{(2-k)/2} + \frac{C}{2}\right)\mathrm{e}^{(k-2)\ t} - \frac{C}{2}\right]^{2/(2-k)} \qquad (t \quad [0, T_0));$$

$$y(t) \quad 0 \qquad (t \quad [T_0, + \quad)),$$

其中 $T_0 = \dfrac{1}{(2-k)}\ln\left(1 + \dfrac{2}{C}y^{(2-k)/2}(0)\right)$

证明 考虑 Bernoulli 方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + Cy^{k/2} + 2\ y = 0 \\ y(0) > 0 \quad \text{给定} \end{cases} \qquad t > 0$$

注意到下面的事实:

$$y_1(t) = \left[\left(y(0)^{(2-k)/2} + \frac{C}{2}\right)\mathrm{e}^{(k-2)\ t} - \frac{C}{2}\right]^{2/(2-k)} \qquad (t \quad [0, T_0));$$

和 $\qquad y_2(t) \quad 0 \qquad (t \quad T_0, + \quad))$

均为 Bernoulli 方程的解; 同时根据 T_0 的选取以及 Bernoulli 方程便知 $y_1(T_0) = 0$ 意味着 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=T_0} = 0$(这是问题的关键), 于是构造函数

$$y(t) = \begin{cases} \left[\left(y(0)^{(2-k)/2} + \dfrac{C}{2}\right)\mathrm{e}^{(k-2)\ t} - \dfrac{C}{2}\right]^{2/(2-k)} & (t \quad [0, T_0)), \\ 0 \qquad (t \quad T_0, + \quad)) \end{cases}$$

不难验知它是 Bernoulli 方程满足初始条件 $y(0) > 0$ 且属于 $C^1[0, + \quad)$ 的光滑解 于是我们分别取上下解为上述 $y(t)$ 和 $\underline{y}(t)$ 0, 再根据比较定理就获得了引理的证明