应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2002) 06_0604_07

非线性中立双曲型时滞偏微分方程解的振动性质*

刘安平[1], 何猛省[2]

(1. 中国地质大学 数理系, 武汉 430074; 2. 武汉理工大学 数理系, 武汉 430070)

(周焕文推荐)

摘要: 讨论一类多滞量非线性中立双曲型时滞偏微分方程解的振动性质, 应用积分不等式和泛函微分方程的某些结果, 获得了其一切解振动的一系列充分条件• 结论充分表明了时滞量的决定性作用, 指出了其与普通双曲型偏微分方程质的差异•

关 键 词: 中立; 时滞; 双曲型; 振动; 非线性
中图分类号: O175.27 文献标识码: A

非线性时滞偏微分方程在工程学、生物学、医学、物理学、化学等学科中有广泛的应用, 其解的振动性质已得到一些判别振动的充分条件及充要条件[1~13]• 本文将讨论下列多滞量非线性中立双曲型时滞偏微分方程(1), 在非线性边界条件(2)及边界条件(3)下解的振动性质, 获得了一系列其一切解振动的充分条件• 结论充分表明了时滞量的决定性作用•

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u(t,x)+p(t)u(t-\mu(t),x)] = {}& a(t)h(u)\Delta u+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)h_i(u(t-\tau_i(t),x))\Delta u(t-\tau_i(t),x)- \\ & \sum_{j=1}^{n}b_j(t,x)f_j(u(t-\sigma_j(t),x)) \qquad (t,x)\in \mathbf{R}_+\times\Omega = G,\end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(t,x,u) \qquad (t,x)\in \mathbf{R}_+\times\partial\Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+cu = 0 \qquad (t,x)\in \mathbf{R}_+\times\partial\Omega, \tag{3}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 是有界域, $G=\mathbf{R}_+\times\Omega$, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑•

以下是基本假设:

H1) $a(t), a_i(t), \tau_i(t), \sigma_j(t), \mu(t)\in C(\mathbf{R}_+,(0,+\infty))$, $0<\tau_i(t)<\tau$, $0<\sigma_j(t)<\sigma$; $0\leqslant\mu(t)\leqslant\mu$; $\tau, \sigma, \mu=$ const, $i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,n$; $b_j(t,x)\in C(\mathbf{R}_+\times\Omega,(0,+\infty))$• $c=$ const >0• $p(t)\in C^2(\mathbf{R}_+)$, $-1\leqslant p(t)<0$•

---

* 收稿日期: 2000_09_25; 修订日期: 2001_12_26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071026)
作者简介: 刘安平(1961—), 男, 湖北人, 教授, 硕士.

H2) $h'(u), h_i'(u), f_j(u) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $uh(u)g(t,x,u) < 0$• $uh_i(u)g(t,x,u) < 0$• $uh_i'(u) \geqslant 0$, $uh'(u) \geqslant 0$• $g(t,x,u)$ 连续• 对 $u \neq 0, f_j(u)/u \geqslant C_j = \text{const} > 0$•

古典解 $u(t,x) \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$ 称为在 G 内是振动的, 是指对每个 $T > 0$, 存在点 $(t_0, x_0) \in [T, +\infty) \times \Omega$, 使 $u(t_0, x_0) = 0$; 否则称非振动的•

以下是本文的基本定理:

定理 1 设基本假设 H1)、H2) 满足, 对某个 $j_0 \in \{1, \dots, n\}$, $p_{j_0} \geqslant p_0 = \text{const} > 0$; 且有 $s \in \{1, \dots, n\}$, $\theta \in (0,1)$, 使 $\sigma_s(t) - (1+\theta)\mu(t) > 0$,

$$\liminf_{t\to\infty} C_s \theta p_s(t)\mu(t)(\sigma_s(t) - (1+\theta)\mu(t)) > \frac{1}{e}, \tag{4}$$

则问题(1)、(2) 的一切解在 G 内是振动的• 这里 $p_j(t) = \min\limits_{x\in\bar{\Omega}} b_j(t,x)$, $x \in \Omega$•

证明 用反证法• 设 $u(t,x)$ 是问题(1)、(2) 的一个非振动解• 则存在 $t_0 \geqslant T$, 当 $(t,x) \in [t_0, +\infty) \times \Omega$ 时, 不失一般性, 设 $u(t,x) > 0$, $u(t-\mu, x) > 0$, 且 $u(t-\tau_i, x) > 0$, $u(t-\sigma_j, x) > 0$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$•

将(1) 对 x 在 Ω 上积分有

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\int_\Omega u\,dx + p(t)\int_\Omega u(t-\mu, x)\,dx\right] =$$
$$a\int_\Omega h(u)\Delta u\,dx + \sum_{i=1}^m a_i \int_\Omega h_i(u(t-\tau_i, x))\Delta u(t-\tau_i, x)\,dx -$$
$$\sum_{j=1}^n \int_\Omega b_j f_j(u(t-\sigma_j, x))\,dx• \tag{5}$$

由 Green 公式及边界条件有:

$$\int_\Omega h(u)\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} h(u)\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_\Omega h'(u)\,|\,\mathrm{grad}\,u\,|^2 dx =$$
$$\int_{\partial\Omega} h(u)g(t,x,u)ds - \int_\Omega h'(u)\,|\,\mathrm{grad}\,u\,|^2 dx \leqslant 0,$$

$$\int_\Omega h_i(u(t-\tau_i, x))\Delta u(t-\tau_i, x)\,dx \leqslant 0•$$

由条件 H2), 容易得到:

$$\int_\Omega b_j f_j(u(t-\sigma_j, x))\,dx \geqslant C_j p_j(t)\int_\Omega u(t-\sigma_j, x)\,dx•$$

令 $v(t) = \int_\Omega u(t,x)\,dx$, 则 $v(t) > 0$ 且由以上各式可得:

$$\frac{d^2}{dt^2}[v(t) + p(t)v(t-\mu)] + \sum_{j=1}^n C_j p_j(t)v(t-\sigma_j) \leqslant 0 \qquad (t \geqslant t_0)• \tag{6}$$

由(6) 令

$$w(t) = v(t) + p(t)v(t-\mu), \tag{7}$$

有

$$w''(t) + \sum_{j=1}^n C_j p_j(t)v(t-\sigma_j) \leqslant 0 \qquad (t \geqslant t_0), \tag{8}$$

由此得 $w''(t) \leqslant 0$, 即 $w'(t)$ 是单调下降的, 从而有 $\lim\limits_{t\to\infty} w'(t) = L$• 下面对 L 进行讨论•

(i) 如果 $L = -\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} w(t) = -\infty$, 再由(7) 式可知 $v(t)$ 无界; 所以存在序列 $\{t_k: k \to \infty, t_k \to \infty\}$, 使 $w(t_k) < 0$, $v(t_k) = \max v(r)$, $r \in [t_0, t_k]$• 因此得 $w(t_k) = v(t_k)$

$+\ p(t_k)v(t_k-\mu(t_k)) \geqslant v(t_k)[1+p(t_k)] \geqslant 0$. 这与 $w(t_k)<0$ 矛盾.

(ii) 如果 $L\neq 0$, 有限. 则将(8)从 t_0 到 t 积分有

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}C_j p_j(r)v(r-\sigma_j(r))\,\mathrm{d}r \leqslant w'(t_0)-w'(t)$$

或

$$\int_{t_0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}C_j p_j(r)v(r-\sigma_j(r))\,\mathrm{d}r \leqslant w'(t_0)-L.$$

所以存在 k_0, 有 $\liminf_{t\to\infty} v(t-\sigma_{k_0})=0$, 因而必有 $\liminf_{t\to\infty} v(t)=0$. 又因为 $-1\leqslant p(t)<0$, 所以由(7)有 $w(t)\leqslant v(t)$, 从而 $\lim_{t\to\infty} w(t)\leqslant \liminf_{t\to\infty} v(t)=0$. 如果 $\lim_{t\to\infty} w(t)=L_1<0$, 则同上面的证明一样, 存在 t_k 使 $w(t_k)\geqslant 0$, 矛盾. 所以 $\lim_{t\to\infty} w(t)=0$. 再由 $w'(t)$ 是单调减少的, 可得 $\lim_{t\to\infty} w'(t)=0$, 即 $L=0$.

又由(7)、(8)式, 当 t 充分大时有:

$$w''(t)\leqslant -\sum_{j=1}^{n}C_j p_j(t)v(t-\sigma_j)\leqslant -C_s p_s(t)v(t-\sigma_s)\leqslant$$
$$-C_s p_s(t)(-w(t-(\sigma_s-\mu))).$$

根据 Taylor 公式展开有:

$$w(t-(\sigma_s-\mu))=w(t-(\sigma_s-(1+\theta)\mu)-\theta\mu)=w(t-\rho_s-\mu\theta)=$$
$$w(t-\rho_s)+w'(t-\rho_s)(-\mu\theta)+\frac{w''(\xi)}{2}(-\mu\theta)^2,$$

其中 $\rho_s=\sigma_s-(1+\theta)\mu>0$, 因此得到:

$$-w(t-(\sigma_s-\mu))\geqslant w'(t-\rho_s)(\mu\theta). \tag{9}$$

利用这个结果, 并令 $w'(t)=y(t)$ 可得:

$$y'(t)+p_s(t)y(t-\rho_s)\leqslant 0 \qquad t\geqslant t_1, \tag{10}$$

其中 $p_s(t)=C_s\mu p_s(t)\theta$, t_1 充分大, 所以 $y(t)=w'(t)>0$ 是(10)式的最终正解. 又从条件(4)知 $\liminf_{t\to\infty} p_s(t)\rho_s(t)>1/\mathrm{e}$, 根据[14]的引理 3 知 $y'(t)+p_s(t)y(t-\rho_s)=0$, $t\geqslant t_1$ 的每个解都是振动的. 而且由(4)式, 对充分大的 t 有:

$$\sigma p_s(t)=\sigma C_s\mu p_s(t)\theta\geqslant(\sigma_s-(1+\mu)\theta)C_s\mu p_s(t)\theta>1/\mathrm{e},$$

故有

$$\int_0^{\infty}p_s(t)\,\mathrm{d}t=\infty.$$

再根据[15], 微分不等式(10)无最终正解. 导致矛盾. 证毕.

进一步地还可以得到以下定理:

定理 2 设条件(4)以下列条件替换, 则定理 1 结论仍然成立.

$$\liminf_{t\to\infty} C_s\theta\int_{t-\rho_s}^{t}p_s(s)\mu(s)\,\mathrm{d}s>\frac{1}{\mathrm{e}}. \tag{11}$$

定理 3 设条件(4)以下列条件替换, 则定理 1 结论仍然成立.

$$\limsup_{t\to\infty} C_s\theta\int_{t-\rho_s}^{t}p_s(s)\mu(s)\,\mathrm{d}s>1,$$

其中记 $\rho_s=\rho_s$.

定理 4 设条件同定理 1 中条件, 且 $g(t,x,u)=0$, 则结论仍成立.

定理 5　设微分不等式(10) 无最终正解, 则结论仍成立•

以上定理证明类似于定理 1, 故略•

利用特征值理论中的下列引理, 对问题(1)、(3) 可以得到许多结论•

引理 1　设 b 为常数, 则下列特征值问题的最小特征值 $b_0 > 0$, 且对应的特征函数 $\varphi(x) > 0,\ x \in \Omega$•

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x) + b\varphi(x) = 0 & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + c\varphi(x) = 0 & x \in \partial\Omega\text{•} \end{cases}$$

定理 6　设定理 1 的条件满足, h、$h_i(u)$ 为常数设为1, 则问题(1)、(3) 的一切解在 G 内是振动的•

证明　用反证法• 设 $u(t, x)$ 是问题(1)、(3) 的一个非振动解• 则存在 $t_0 \geqslant T$, 当 $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \Omega$ 时, 不失一般性, 设 $u(t, x) > 0$, $u(t-\mu, x) > 0$, 且 $u(t-\tau_i, x) > 0$, $u(t-\sigma_j, x) > 0$, $i = 1, \cdots, m$; $j = 1, \cdots, n$•

将(1) 两边乘以 $\varphi(x)$ 后再对 x 在 Ω 上积分有:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_\Omega u\varphi(x)\,\mathrm{d}x + p(t)\int_\Omega u(t-\mu, x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] = a\int_\Omega h(u)\Delta u\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \\ &\quad \sum_{i=1}^m a_i\int_\Omega h_i(u(t-\tau_i, x))\Delta u(t-\tau_i, x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \\ &\quad \sum_{j=1}^n\int_\Omega b_j f_j(u(t-\sigma_j, x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x\text{•} \end{aligned} \tag{12}$$

由 Green 公式有:

$$\int_\Omega u\Delta\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi\Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = 0,$$

所以有:

$$\int_\Omega \Delta u(t, x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta\varphi(x)u(t, x)\,\mathrm{d}x = -b_0\int_\Omega\varphi(x)u(t, x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Delta u(t-\tau_i, x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta\varphi(x)u(t-\tau_i, x)\,\mathrm{d}x = \\ &\quad -b_0\int_\Omega\varphi(x)u(t-\tau_i, x)\,\mathrm{d}x\text{•} \end{aligned}$$

由条件 $H_2)$, 容易得到:

$$\int_\Omega b_j f_j(u(t-\sigma_j, x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant C_j p_j(t)\int_\Omega u(t-\sigma_j, x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\text{•}$$

令 $v(t) = \int_\Omega u(t, x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $v(t) > 0$ 且由以上各式可得:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[v(t) + p(t)v(t-\mu)] + b_0a(t)v(t) + b_0\sum_{i=1}^m a_i(t)v(t-\tau_i) + \\ &\quad \sum_{j=1}^n C_j p_j(t)v(t-\sigma_j) \leqslant 0 \qquad (t \geqslant t_0), \end{aligned} \tag{13}$$

因此得:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[v(t) + p(t)v(t-\mu)] + \sum_{j=1}^n C_j p_j(t)v(t-\sigma_j) \leqslant 0 \qquad (t \geqslant t_0)\text{•}$$

此即是(6) 式, 以下证明同定理 1 的证明• 故略• 定理 6 证毕•

定理 7　设定理 2 或定理 3 的条件满足, 且 h、$h_i(u)$ 均为常数设为 1, 则问题(1)、(3) 的一切解在 G 内是振动的•

定理 8　设基本假设 $H_1)$、$H_2)$ 满足, 且有对某个 $i_0\in\{1,\cdots,m\}$, $a_{i_0}\geqslant a=\mathrm{const}>0$, 又 h、$h_i(u)$ 均为常数设为 1 及存在 $s\in\{1,\cdots,n\}$, $\theta\in(0,1)$, 使得

$$\tau_s(t)-(1+\theta)\mu(t)>0,$$

$$\liminf_{t\to\infty} b_0\theta a_s(t)\mu(t)(\tau_s(t)-(1+\theta)\mu(t))>1/\mathrm{e}, \tag{14}$$

则问题(1)、(3) 的一切解在 G 内是振动的•

证明　同定理 6 的证明我们可得到(13) 式:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[v(t)+p(t)v(t-\mu)]+b_0a(t)v(t)+b_0\sum_{i=1}^m a_i(t)v(t-\tau_i)+$$

$$\sum_{j=1}^n p_j(t)f_j(v(t-\sigma_j))\leqslant 0\qquad(t\geqslant t_0), \tag{13}$$

因此得:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[v(t)+p(t)v(t-\mu)]+b_0\sum_{i=1}^m a_i(t)v(t-\tau_i)\leqslant 0• \tag{15}$$

以下证明同定理 1•　定理 8 证毕•

定理 9　设基本条件同定理 6, 但条件(4) 换成下列条件(16) 或(17), 则问题(1)、(3) 的一切解在 G 内是振动的•

$$\liminf_{t\to\infty} b_0\theta\int_{t-\rho_s}^t a_s(s)\mu(s)\,\mathrm{d}s>1/\mathrm{e}, \tag{16}$$

$$\limsup_{t\to\infty} b_0\theta\int_{t-\rho_s}^t a_s(s)\mu(s)\,\mathrm{d}s>1, \tag{17}$$

其中记

$$\rho_s=\rho_s=\tau_s-(1+\theta)\mu•$$

定理 10　设基本假设 $H_1)$、$H_2)$ 满足, 又 $p(t)\leqslant -1$ 且对某个 $i_0\in\{1,\cdots,m\}$, $a_{i_0}\geqslant a=\mathrm{const}>0$, 或 $j_0\in\{1,\cdots,n\}$, $p_{j_0}\geqslant p_0=\mathrm{const}>0$, 又 h、$h_i(u)$ 均为常数设为 1, 存在 $s\in\{1,\cdots,n\}$, $\theta\in(0,1)$, 使得

$$\tau_s(t)-(1+\theta)\mu(t)>0,$$

$$\liminf_{t\to\infty} b_0\theta a_s(t)(-\mu/p(s-(\sigma_s-\mu)))(\tau_s(t)-(1+\theta)\mu(t))>1/\mathrm{e},$$

或

$$\tau_s(t)-(1+\theta)\mu(t)>0,$$

$$\liminf_{t\to\infty} C_s\theta p_s(t)(-\mu/p(s-(\sigma_s-\mu)))(\tau_s(t)-(1+\theta)\mu(t))>1/\mathrm{e},$$

则问题(1)、(3) 的一切解在 G 内是振动的•

以上定理证明类似定理 1•　故略•

以下是两个例子•

例 1

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u-u(t-\pi,x)]+(2\mathrm{e}^{\pi}+2\mathrm{e}^{-\pi})u(t-2\pi,x)=2\pi\Delta u$$

$$(t,x)\in(0,\infty)\times(0,\pi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0\qquad x=0,\pi;\ t\in(0,\infty)•$$

例2

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u - u(t-\pi, x)] = \Delta u(t,x) + 2\Delta u\left(t-\frac{\pi}{2}, x\right) - u(t-\pi, x) - u\left(t-\frac{\pi}{2}, x\right)e^{(\cos t\cos x)^2} - u\left(t-\frac{3}{2}\pi, x\right)e^{\left[u\left(t-\frac{3}{2}\pi, x\right)\right]^2}$$

$$(t,x) \in (0, \infty) \times (0, \pi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -u \qquad x = 0, \pi;\ t \in (0, \infty),$$

这里

$$p(t) = -1,\ a(t) = 1,\ a_1(t) = 2,\ p_1(t,x) = 1,\ p_2(t,x) = e^{(\cos t\cos x)^2},$$

$$p_3(t,x) = 1,\ c = 1,\ f_1 = f_2 = u,\ f_3 = ue^{u^2}.$$

以上两例中定理的所有条件满足, 所以其一切解在 G 内是振动的.

[参 考 文 献]

[1] HE Meng_xing, GAO Shu_chun. Oscillations of hyperbolic functional differential equations with deviating argument[J]. Chinese Science Bulletin, 1993, **38**(1): 10—14.

[2] 刘安平. 含阻尼项非线性双曲型时滞偏微分方程解的振动性质[J]. 应用数学, 1996, **9**(3): 321—324.

[3] 刘安平. 中立双曲型时滞偏微分方程解振动的充要条件[J]. 工科数学, 1997, **13**(3): 40—42.

[4] Mishev D P, Bainov D D. Oscillatory properties of the solutions of parabolic differential equations of neutral type[J]. Appl Math Comput, 1988, **28**(1): 97—111.

[5] Yosida N. On the zeros of solutions of hyperbolic differential equations of neutral type[J]. Differential Intergral Equations, 1990, **3**(2): 155—160.

[6] 刘安平. 非线性抛物型时滞微分方程解的振动性质[J]. 东南大学学报, 1999, **29**(3A): 42—44.

[7] 刘安平, 欧卓玲. 中立双曲型时滞微分方程解振动的充要条件[J]. 武汉工业大学学报, 2000, **22**(2): 89—91.

[8] LIU An_ping. Necessary and sufficient conditions for oscillations of hyperbolic neutral partial differential equations[A]. In: Zhang J H, Zhang X N Eds. Proceedings of Interl Conf on Advanced Problems in Vibration Theory and Applications[C]. Beijing: Science Press, 2000, 740—742.

[9] 刘安平. 非线性中立双曲型微分方程解的振动判据[J]. 数学季刊, 2001, **16**(4): 6—12.

[10] 刘安平. 非线性中立抛物型泛函微分方程解的振动判据[J]. 应用泛函分析学报, 2000, **2**(4): 376—381.

[11] CUI Bao_tong. Oscillatory properties of the solutions of hyperbolic differential equations with deviating argument[J]. Demonstratio Math, 1996, **29**(1): 61—68.

[12] 崔宝同, 俞元洪, 林诗仲, 等. 具时滞双曲型微分方程解的振动性质[J]. 应用数学学报, 1996, **19**(3): 80—88.

[13] Bainov D, CUI Bao_tong, Minchev E. Forced oscillatory properties of the solutions of hyperbolic differential equations of neutral type[J]. K Comput Appl Math, 1996, **72**(4): 309—318.

[14] 燕居让. n 阶非线性时滞微分方程解的振动性与渐近性[J]. 数学学报, 1990, **33**(4): 537—542.

[15] 魏俊杰. 一阶偏差元微分方程振动的充要条件及其应用[J]. 数学学报, 1989, **32**(5): 632—638.

Oscillatory Properties of the Solutions of Nonlinear Delay Hyperbolic Differential Equations of Neutral Type

LIU An_ping[1], HE Meng_xing[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, P R China;

2. Department of Mathematics and Physics, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, P R China)

Abstract: By making use of the integral inequalities and some results of the functional differential equations, oscillatory properties of solutions of certain nonlinear hyperbolic partial differential equations of neutral type with multi_delays were investigated and a series of sufficient conditions for oscillations of the equations were established. The results fully indicate that the oscillations are caused by delay and hence reveal the difference between these equations and those equations without delay.

Key words: neutral; delay; hyperbolic; oscillation; nonlinear