应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 06_0551_07

离散算子差分法的单元函数

田中旭[1], 唐立民[2], 刘正兴[3]

(1. 上海大学 CIMS 及机器人中心, 上海 200072; 2 大连理工大学 工程力学系, 大连 116024;
3 上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(我刊编委唐立民来稿)

摘要: 给出了弹性力学离散算子差分法的离散格式,并给出了该方法的几个板弯曲单元和平面四边形单元,通过对它们的考察,分析了离散算子差分方法中的离散格式对单元位移函数的反映能力 在离散算子差分方法中,无论单元位移函数是否协调,其位移函数均能在离散格式中得到十分好的再现,说明了离散算子差分方法的离散格式是一种性能很优良的离散格式

关 键 词: 离散算子差分法; 单元函数; 准确再现
中图分类号: O342.21 文献标识码: A

引 言

文[1,2]中提出了离散算子的概念,它试图把包括有限元法和差分法的计算统一在一个计算框架内,从而寻求现有方法以外的可能更好的计算方法 李荣华教授等提出所谓 广义差分法[3,4]也是在有限元之外作出了创新和发展 文[5]给出的板弯曲问题的求解方法,其位移函数可以是不连续的,并能得到很好的离散格式,而且边界条件处理方便 因这种方法的思想源自离散算子,所以这里称之为离散算子差分法[6] 文[5]采用了更为一般的弹性力学方程弱形式,从而将有限元法与离散算子差分法统一在了一个框架之下

本文给出了板弯曲问题和平面问题中的几个单元,通过对它们的考察,分析了离散算子差分法的离散格式对单元位移函数的反映能力 这里提到的位移函数不满足 C^0 和 C^1 条件,但它们所对应的离散格式却能准确地再现它们,从而说明了离散算子差分法的离散格式性能良好 离散算子差分法的这一特点也将有助于该方法的精度分析和单元函数的优化选取

1 离散算子差分法

弹性力学问题的平衡方程含以下内容:

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \quad + \boldsymbol{F} = \mathbf{0} & (\quad), \\ \boldsymbol{T} = \quad \boldsymbol{T} & (\quad), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{T} = \quad \boldsymbol{v}$, (2)

$\boldsymbol{D}$ 为微分算子, $\boldsymbol{T}$ 在给定力的边界上为给定力, 在给定位移的边界为未知反力, 应力 是位移

收稿日期: 2000_07_07; 修订日期: 2002_01_29
作者简介: 田中旭(1971),男,吉林人,博士(E_mail: tianzx@sh163.net).

$\boldsymbol{u}$ 的函数

如果方程(1)中的分布力 $\boldsymbol{F}$ 为零, 则平衡方程变为齐次的平衡方程

平衡方程的弱形式可表达为:

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \quad + \boldsymbol{F})\mathrm{d} \quad + B = 0, \tag{3}$$

其中　为　的任意子域, 也是检验函数 $\boldsymbol{V}$ 的作用区域, B 为边界附加项

对方程(3)中含应力的项分步积分:

$$(- \ (\boldsymbol{DV})^{\mathrm{T}} \quad + \boldsymbol{F})\mathrm{d} \quad + {}_{S}\ \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S + B = 0, \tag{4}$$

方程中 S 是　的边界　当　靠近　的边界 S 时, 上式的线积分项应分成两部分, 并在边界上采用边界参数, 即应为如下形式:

$$_{S - S\quad S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S + {}_{S\quad S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S \tag{5}$$

为了能将各种情况的方程写成一个统一的形式, B 应为:

$$B = - {}_{S\quad S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T} - \ \boldsymbol{T})\mathrm{d}S, \tag{6}$$

最终方程(4)变为

$$(- \ (\boldsymbol{DV})^{\mathrm{T}} \quad + \boldsymbol{F})\mathrm{d} \quad + {}_{S - S\quad S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S + {}_{S\quad S}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S = 0 \tag{7}$$

在方程(7)中取 $\boldsymbol{V}$ 为位移的基函数则可导出有限元法　在离散算子差分法中, 取方程(7)中的 $\boldsymbol{V}$ 为单位阵(对板弯曲问题则应取 1, x, y), 则方程变为:

$$\boldsymbol{F}\mathrm{d} \quad + {}_{S - S\quad S}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S + {}_{S\quad S}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S = 0 \tag{8}$$

应用此方程进行数值求解时, 其区域　在三角形单元和四边形单元网格剖分中应为图 1 和图 2 中的阴影区域所示, 其中　的边界 S 通过各单元的形心和各边的中点

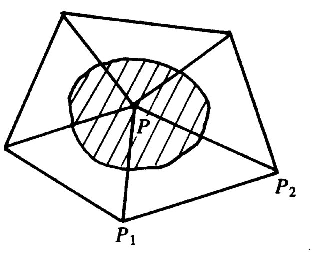

图 1　三角形网格中的　区域

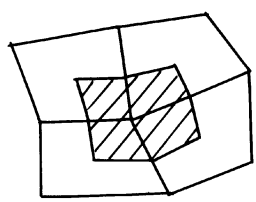

图 2　四边形网格中的　区域

方程(8)即为离散算子差分法所采用的方程, 其物理意义非常明确, 即　区域的平衡条件　在建立了单元的位移插值函数后, 根据几何方程和本构关系可表达出各应力, 把应力代入方程(8) 中即可得到离散算子差分法的离散方程

文[5]已说明, 离散算子差分方法具有计算简单, 边界条件处理方便等特点　文[4]已给出了薄板弯曲问题的一个三角形单元和一个四边形单元, 两个单元虽然都不协调, 但表现出了良好的性能和很高的计算精度

以下给出了几个板弯曲问题和平面问题中的一些单元, 并通过对它们的考察, 分析了离散算子差分法的离散格式对单元位移函数的反映能力

2 板弯曲问题的离散算子差分法

2.1 板弯曲问题的离散格式

文[5]给出了板弯曲问题的离散算子差分方法的离散方程，在求解区域内的任意一结点 P 处的离散方程:

$$
\begin{cases}
- \ {}_{S-S\ \ S} Q_n \mathrm{d}S - \quad q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \ {}_{S\ \ S} Q_n \mathrm{d}s = 0, \\
{}_{S-S\ \ S}(- Q_n x + M_n n_x - M_{ns} n_y)\,\mathrm{d}S - \quad qx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\
\quad {}_{S\ \ S}(- Q_n x + M_n n_x - M_{ns} n_y) = 0, \\
{}_{S-S\ \ S}(- Q_n y + M_n n_y + M_{ns} n_x)\,\mathrm{d}S - \quad qy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\
\quad {}_{S\ \ S}(- Q_n y + M_n n_y + M_{ns} n_x) = 0,
\end{cases}
\tag{9}
$$

其中 $$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y, \quad \begin{bmatrix} M_{nn} \\ M_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ - n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

n_x 与 n_y 是边界外法线的方向余弦, Q_n、M_{ns}、M_{nn} 是边界上作用的外力, 它们可能是边界上的给定力或约束反力, 各内力 Q_x、Q_y、M_{xx}、M_{xy} 和 M_{yy} 是由挠度的插值函数 w 所表达的函数

2.2 三角形板单元

2.2.1 三角形板单元 1

在离散算子差分法的三角形板单元 1 中, 取单元位移函数为:

$$w = {}_1 + {}_2x + {}_3y + {}_4x^2 + {}_5xy + {}_6y^2 + {}_7x^3 + {}_8y^3 + {}_9(x^2y + xy^2) \tag{11}$$

代入各结点的坐标, 可以应用各结点的位移参数表达出各待定常数, 从而可以得到单元上的位移插值函数 很明显, 该位移函数仅 C^0 连续

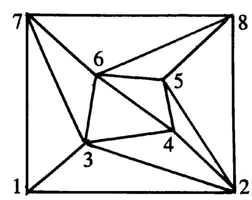

图 3 三角形单元网格

给出一随意剖分成三角形单元网格的方板(见图 3), 各结点坐标见表 1

表 1 图 3 中各结点的坐标

结点号	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0 00	0 50	0 20	0 38	0 35	0 23	0 00	0 50
Y	0 00	0 00	0 18	0 20	0 35	0 37	0 50	0 50

当在方板的边界结点施加上位移函数(11)所能表达的任意给定位移

$$w = - 0\ 17 + 0\ 02x + 0\ 04y + 0\ 05x^2 + 0\ 08xy + 0\ 1y^2 + 0\ 2x^3 + 0\ 18(x^2y + xy^2) + 0\ 22y^3 \tag{12}$$

所对应的数值时, 使用单元1 计算出方板内部结点的各位移参数列于表 2 中 (在各算例中, 只列出了 3 点和 4 点的计算结果, 5 点和 6 点也有类似的结果)

表 2　　三角板单元 1 的计算结果

结　　点	结　点　3			结　点　4		
挠度或转角	w	w_x	w_y	w	w_x	w_y
计算值	- 0 145 334 56	0 097 192 00	0 133 544 00	- 0 116 431 20	0 195 200 00	0 190 152 00
精确值	- 0 145 334 56	0 097 192	0 133 544	- 0 116 431 2	0 195 2	0 190 152

2.2.2　三角形板单元 2

在离散算子差分法的三角形板单元 2 中, 取单元位移函数为:

$$w = {}_1 + {}_2x + {}_3y + {}_4x^2 + {}_5xy + {}_6y^2 + {}_7x^3 + {}_8y^3 + {}_9x^2y, \qquad (13)$$

该位移函数同样只 C^0 连续　当在图 3 所示方板的边界结点施加上位移函数(13) 所能表达的任意给定位移

$$w = - 0\ 17 + 0\ 02x + 0\ 04y + 0\ 05x^2 + 0\ 08xy + 0\ 1y^2 + 0\ 2x^3 + 0\ 18x^2y + 0\ 22y^3 \qquad (14)$$

所对应的数值时, 使用单元 2 计算出方板内部结点的各位移参数列于表 3 中

表 3　　三角板单元 2 的计算结果

结　　点	结　点　3			结　点　4		
挠度或转角	w	w_x	w_y	w	w_x	w_y
计算值	- 0 146 500 96	0 091 360 00	0 120 584 00	- 0 119 167 20	0 188 000 00	0 162 792 00
精确值	- 0 146 500 96	0 091 36	0 120 584	- 0 119 167 2	0 188 00	0 162 792

2.3　四边形板单元

在离散算子差分法的四边形板单元中, 设位移函数为:

$$w = {}_1 + {}_2x + {}_3y + {}_4x^2 + {}_5xy + {}_6y^2 + {}_7x^3 + {}_8x^2y + {}_9xy^2 + {}_{10}y^3 + {}_{11}xy^3 + {}_{12}x^3y, \qquad (15)$$

代入 4 个结点的挠度和转角值后, 可以应用各结点的位移参数表达出 12 个待定参数　显而易见该位移函数不具有 C^0 和 C^1 连续性

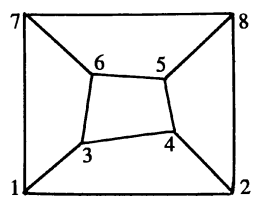

图 4　四边形网格

把方板随意划分成四边形网格, 各结点的坐标见表 1　在方板的边界结点施加上位移函数(15) 所能表达的任意给定位移

$$w = - 0\ 17 + 0\ 02x + 0\ 04y + 0\ 05x^2 + 0\ 08xy + 0\ 1y^2 + 0\ 2x^3 + 0\ 18x^2y + 0\ 14xy^2 + 0\ 22y^3 + 0\ 11x^3y - 0\ 13xy^3 \qquad (16)$$

所对应的数值时, 使用四边形单元计算出的方板内部结点的位移参数列于表 4 中

表 4　　四边形板单元的计算结果

结　　点	结　点　3			结　点　4		
挠度或转角	w	w_x	w_y	w	w_x	w_y
计算值	- 0 145 586 99	0 097 513 84	0 129 016 80	- 0 116 227 22	0 202 090 40	0 184 179 92
精确值	- 0 145 586 99	0 097 513 84	0 129 016 8	- 0 116 227 22	0 202 090 4	0 184 179 92

在以上关于两个三角形和一个四边形板单元的计算结果中可以看出, 单元位移函数在离

散算子差分法的各单元中能够得到准确的再现

3 平面问题四边形单元

3.1 平面问题的离散格式

在平面问题中, 由方程(8) 可以得到离散算子差分法采用的方程为:

$$\begin{cases} {}_{S-S}\ {}_{S} T_x \mathrm{d}S + \quad X \mathrm{d}x \mathrm{d}y + {}_{S}\ {}_{S} T_x \mathrm{d}S + {}_{S}\ {}_{S_u} T_x \mathrm{d}S = 0, \\ {}_{S-S}\ {}_{S} T_y \mathrm{d}S + \quad Y \mathrm{d}x \mathrm{d}y + {}_{S}\ {}_{S} T_y \mathrm{d}S + {}_{S}\ {}_{S_u} T_y \mathrm{d}S = 0, \end{cases} \tag{17}$$

其中 T_x、T_y 为给定力的边界S 上的给定力在两个坐标轴方向的分量, T_x、T_y 为给定位移的边界S_u 上的反力在两个坐标轴方向的分量 T_x、T_y 可用应力表达如下:

$$T_x = n_x\ {}_x + n_y\ {}_{xy},\quad T_y = n_x\ {}_{xy} + n_y\ {}_y \tag{18}$$

方程(17) 即为离散算子差分法实际计算时所应采用的 很明显, 方程(17) 反映了子域的平衡

3.2 平面四边形单元

3.2.1 平面四边形单元 1

在离散算子差分法的四边形单元 1 中, 设位移函数为:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy,\quad v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy, \tag{19}$$

代入各结点的坐标后, 可以应用各结点的位移参数表达出各待定常数 很明显, 该位移函数是非协调的

在图 4 的网格中, 给边界结点施加上任意给定线性位移

$$u = 0\ 02 + 0\ 04x + 0\ 05y,\quad v = 0\ 08 + 0\ 1x + 0\ 2y \tag{20}$$

所对应的数值时, 使用此四边形单元 1 计算出的各内部结点的位移参数列于表 5 中

表 5 平面四边形单元 1 的计算结果

结 点	3		4		5		6	
位移	u	v	u	v	u	v	u	v
计算值	0 037 000	0 136 000	0 045 200	0 158 000	0 051 500	0 185 000	0 047 700	0 177 000
精确值	0 037	0 136	0 045 2	0 158	0 051 5	0 185	0 047 7	0 177

由以上结果可以看出, 平面四边形单元 1 可通过常应变分片试验

3.2.2 平面四边形单元 2

在离散算子差分法的四边形单元 2 中, 设位移函数为:

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y - a_7 xy + a_8 (x^2 + y^2)/2, \\ v = a_4 + a_5 x + a_6 y + a_7 (x^2 + y^2)/2 - a_8 xy, \end{cases} \tag{21}$$

该位移中含表达 x 与y 向纯弯曲的位移模式, 此位移函数同样是不协调的

当给图 4 中网格的边界结点施加上位移函数(21) 所能表达的某一给定位移(泊松比 取 0. 25)

$$\begin{cases} u = 0\ 02 + 0\ 04x + 0\ 05y - 0\ 18xy + 0\ 14(x^2 + y^2)/2, \\ v = 0\ 08 + 0\ 1x + 0\ 2y + 0\ 18(x^2 + y^2)/2 - 0\ 14xy \end{cases} \tag{22}$$

所对应的数值时, 使用四边形单元 2 计算出的内部各结点的位移参数列于表 6 中

表 6 平面四边形单元 2 的计算结果

结 点	3		4		5		6	
位移	u	v	u	v	u	v	u	v
计算值	0 036 456 00	0 139 618 00	0 042 174 00	0 175 152 00	0 050 887 50	0 195 412 50	0 053 399 50	0 180 768 50
精确值	0 036 456	0 139 618	0 042 174	0 175 152	0 050 887 5	0 195 412 5	01053 399 5	01180 768 5

由计算结果可以看出, 此单元得到的离散格式可完全精确地表达纯弯曲状态#

在以上关于两个四边形平面单元的计算结果中可以看出, 满足齐次平衡方程的位移函数在离散算子差分算法中能够得到准确地再现#

3.2.3 算 例

图 5 给出了一个长为 10, 宽为 2 的梁, 应用给出的两个离散算子差分单元进行计算, 得到 A 点的竖直方向位移见表 7#

表 7 A 点的竖直方向位移

网 格	网格 1	网格 2
四边形单元 1 的计算值	441 563	731066
四边形单元 2 的计算值	661 667	961343
精确值	100	

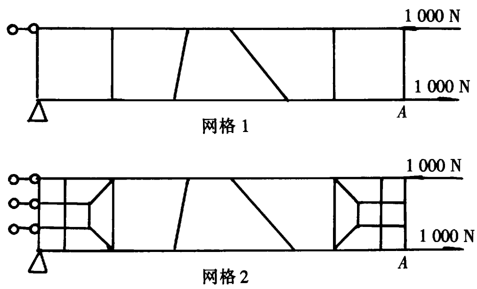

图 5 梁的弯曲

从四边形单元 2 的计算结果看, 网格 1 中的计算误差偏大, 不是因为位移函数没有足够的能力表达纯弯, 而是因为集中力与约束处位移场较复杂, 单元的位移函数表达困难; 当载荷与约束处的网格细化后, 便可得到很好的计算结果# 而对于四边形单元 1, 因位移不能表达纯弯, 计算值的偏差仍较大#

如果利用离散算子差分法, 因不必考虑位移的连续性问题, 可以简单地通过对位移函数的选择, 便可能得到较好的计算结果# 如可选则单元位移函数为以下的两种情况:

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 [xy + (1 - L) x^2 - 2y^2] + b_4 \left(\dfrac{3 - 7L}{8} x^2 - \dfrac{5}{4} y^2 \right), \\ v = b_1 + b_2 x + b_3 y + a_4 \left(- x^2 + \dfrac{1 - 3L}{4} y^2 \right) + b_4 xy; \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 [xy + (1 - L) x^2 - 2y^2] - b_4 \dfrac{1 + L}{4} x^2, \\ v = b_1 + b_2 x + b_3 y + a_4 \left(- x^2 + \dfrac{1 - 3L}{4} y^2 \right) + b_4 \left(xy - \dfrac{1}{4} x^2 + \dfrac{1 - L}{8} y^2 \right) \# \end{cases} \tag{24}$$

这两种单元函数的自由度没有增加, 但在网格 1 的情况下均能得出很好的计算结果, 而且它们都能够通过分片试验# 也应指这两个单元在不同的方向上有不同的表达能力, 它们在实际中也许不很适用#

4 结 论

在离散算子差分方法中, 如果单元位移函数满足齐次的平衡方程, 不论这种单元函数是否协调, 该单元函数都能够在离散算子差分方法的离散格式中得到准确地再现# 可以说离散算子差分方法在这种情况下, 是一种对单元函数无损的离散格式# 而对于有限元法, 应用以上各种单元函数的单元通过分片试验也不容易#

离散算子差分法对位移函数的准确再现或无损特性可通过以下方式体现: 对于某一不规则单元片, 给单元片的边界施加上与某一位移函数 $\boldsymbol{u}_0$ 相一致的位移时, 如果该位移函数属于单元位移插值函数 $\boldsymbol{u}$ 所能表达的函数空间, 则通过离散格式计算得到的单元片内部结点的位移值也与位移函数 $\boldsymbol{u}_0$ 相一致# 这种做法类似于分片试验, 但比分片试验更为严格#

离散算子差分法的这一特性再次显示了该离散格式的优越, 同时也为该方法的精度和收敛性理论提供了重要的启示# 此外, 离散算子差分法中的单元函数可不协调, 并能在离散格式中得到准确再现, 这些也有利于单元函数的优化选取#

[参 考 文 献]

[1] 唐立民, 张允真, 吴金仙, 等. 关于连续体结构数值计算的微分算子的离散化方法(一)[J]. 大连工学院学报, 1973, **13**(1): 7) 30.

[2] 唐立民, 张允真, 吴金仙, 等. 关于连续体结构数值计算的微分算子的离散化方法(二)[J]. 大连工学院学报, 1973, **13**(3): 27) 57.

[3] 李荣华, 陈仲英. 微分方程广义差分法[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1994.

[4] 陈仲英. 双调和方程广义差分法的变分原理和数值分析[J]. 高等学校计算数学学报, 1993, **15**(2): 182) 194.

[5] 田中旭, 唐立民. 薄板弯曲问题的一种弱形式离散算子解法[J]. 计算力学学报, 2000, **17**(2): 163) 169.

[6] 唐立民, 齐朝辉, 丁克伟, 等. 弹性力学方程弱形式广义基本方程的建立和应用[J]. 大连理工大学学报, 2001, **41**(1): 1) 8.

Element Functions of Discrete Operator Difference Method

TIAN Zhong_xu[1], TANG Li_min[2], LIU Zheng_xing[3]

(1. Center of CIMS &Robotics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China;

21 Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China;

31 Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China)

Abstract: The discrete scheme called discrete operator difference for differential equations was given. Several difference elements for plate bending problems and plane problems were given. By investigating these elements, the ability of the discrete forms expressing to the element functions was talked about. In discrete operator difference method, the displacements of the elements can be reproduced exactly in the discrete forms whether the displacements are conforming or not. According to this point, discrete operator difference method is a method with good performance.

Key words: discrete operator difference method; element function; reproduce exactly