

文章编号: 1000-0887(2002) 07-0729-07

离散频谱时移相位差校正法<sup>\*</sup>丁康<sup>1</sup>, 罗江凯<sup>2</sup>, 谢明<sup>2</sup>

(1. 汕头大学 机械电子工程系, 广东汕头 515063; 2. 重庆大学 机械工程学院, 重庆 400044)

(张湘伟推荐)

摘要: 提出了一种通用的时移相位差离散频谱校正方法; 第二段时域序列比第一段滞后  $L$  点, 对这两段时域序列分别作相同的  $N$  点 FFT 分析, 然后利用对应峰值谱线的相位差进行频谱校正。谢明、张晓飞、丁康提出的方法是此法的一个当  $L = N$  时的特例。仿真结果表明, 该方法实现方便, 精度较高, 适合各种对称窗函数, 抗噪声能力强。

关键词: 频谱分析; 校正; 信号处理; 相位差

中图分类号: TN991.6 文献标识码: A

## 引言

频谱分析是应用极为广泛的信号处理方法。由于计算机只能对有限多个样本进行运算, FFT 和谱分析也只能在有限区间内进行, 这就不可避免地存在由于时域截断产生的能量泄漏, 使谱峰值变小, 精度降低。从理论上分析, 加矩形窗时单谐波频率成分的幅值最大误差达 36.4%<sup>[1]</sup>, 即使加其它窗时, 也不能完全消除此影响, 如加 Hanning 窗时, 只进行幅值恢复时的最大误差仍高达 15.3%, 相位误差更大, 高达 90 度。

目前国内外有四种对幅值谱或功率谱进行校正的方法: 第一种方法是离散频谱三点卷积校正法<sup>[1~2]</sup>, 第二种方法是对幅值谱进行校正的比值法<sup>[3~6]</sup>, 第三种方法是 FFT+DFT 谱连续细化分析傅立叶变换法<sup>[7]</sup>, 第四种方法是相位差法<sup>[8~9]</sup>, 这些方法各有其特点。在相位差校正法中, 第一种做法是采连续两段样本, 对这两段进行傅立叶变换, 利用其对应离散谱线的相位差校正出谱峰处的准确频率和相位<sup>[9]</sup>, 第二种做法是只采样一段时域信号, 对这一段序列分别进行  $N$  点和  $N/2$  点的 FFT 分析, 利用其相位差进行频谱校正<sup>[8]</sup>。本文提出了一种通用的时移相位差离散频谱校正方法: 将信号进行离散采样, 采样长度为  $(L + N)$  点, 从该段第 0 点起, 取  $N$  (通常为 1024) 点, 得到一时间序列; 从该段信号第  $L$  点起, 取  $N$  点, 得到另一时间序列; 分别对两段序列进行  $N$  点的 FFT 变换, 利用对应峰值谱线的相位差进行频谱校正的方法, 该方法适用于加各种对称窗情况下的离散频谱校正。图 1 为两段单频率成份信号的时域波形。

\* 收稿日期: 2000\_07\_27; 修订日期: 2002\_04\_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50075049); 国家教育部高等学校骨干教师资助计划项目(教技司[2000]65号)

作者简介: 丁康(1957—), 男, 浙江天台人, 教授, 硕士(E-mail: Kding@stu.edu.cn)。

## 1 校正原理<sup>[10]</sup>

对加长度为  $T$  的对称窗  $w(t)$  的信号  $x(t)$  进行傅立叶变换有

$$F[x(t) \cdot w_T(t)] = \int x(t) \cdot w_T(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (1)$$

其中,  $w_T(t)$  由对称窗  $w(t)$  在时间上平移  $T/2$  得到, 即

$$w_T(t) = w(t - T/2). \quad (2)$$

设  $w(t)$  的傅立叶变换为

$$F[w(t)] = W(f). \quad (3)$$

根据傅立叶变换的奇偶性质, 当  $w(t)$  是实偶函数时,  $W(f)$  也为实偶函数. 又由傅立叶变换的时移特性可得

$$F[w_T(t)] = W(f) e^{-j\pi f T}. \quad (4)$$

设有一周期信号  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ , 其傅立叶变换结果为

$$X(f) = \frac{A}{2} e^{-j\theta} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} e^{j\theta} \delta(f - f_0). \quad (5)$$

加窗后的谐波信号  $x(t) \cdot w_T(t)$  的傅立叶变换可根据卷积定理表示为

$$\begin{aligned} F[x(t) \cdot w_T(t)] &= F[x(t)] * F[w_T(t)] = \\ &= \left\{ \frac{A}{2} e^{-j\theta} \delta(f + f_0) + \frac{A}{2} e^{j\theta} \delta(f - f_0) \right\} * \left\{ W(f) e^{-j\pi f T} \right\} = \\ &= \frac{A}{2} W(f + f_0) e^{-j[\pi T(f + f_0) + \theta]} + \frac{A}{2} W(f - f_0) e^{-j[\pi T(f - f_0) - \theta]}, \end{aligned} \quad (6)$$

(“ $*$ ”表示卷积) 由此可得, 加窗后的相位为

$$\Phi = \theta - \pi T(f - f_0). \quad (7)$$

设频率误差  $\Delta f = f - f_0$ , 式(7)表示为

$$\Phi = \theta - \pi T \Delta f. \quad (8)$$

将连续信号  $x(t)$  向左平移  $t_0$  得  $x_0(t)$ , 根据傅立叶变换的性质得  $x_0(t)$  的相角为

$$\theta_0 = \theta + 2\pi f_0 t_0. \quad (9)$$

此时, 对  $x_0(t) \cdot w_T(t)$  作 FFT 分析, 根据上述推导同理得

$$\Phi_0 = \theta - \pi T \Delta f + 2\pi f_0 t_0. \quad (10)$$

式(10)减去(8), 求相位差得

$$\Delta \Phi = \Phi_0 - \Phi = 2\pi t_0(f - \Delta f). \quad (11)$$

由此可得其频率修正量为

$$\Delta f = \frac{2\pi t_0 f - \Delta \Phi}{2\pi t_0}. \quad (12)$$

上面所有推导没有具体利用哪一种窗函数, 故这种校正方法适用于所有的对称窗函数.

## 2 离散频谱校正实现方法

1) 对信号  $x(t)$  进行离散采样, 采样频率为  $f_s$ , 采一段信号长度为  $(L + N)$  点, 从该段第 0

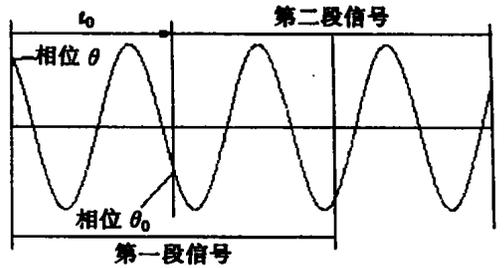


图 1 用于分析的两段单频率成份信号的时域波形

点始, 取  $N$  (通常为 1024) 点, 得到时间序列  $x(n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ): 从该段第  $L$  点始, 取  $N$  点, 得到时间序列  $x_0(n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ).

2) 对时间序列  $x(n)$  作  $N$  点 FFT 分析. 对应谱线号  $i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ), 设频率校正量为  $\Delta f_i = df_s/N$ , 其中  $d_i$  为归一化的谱线号修正量.  $T = N/f_s$ , 根据式(8), 有

$$\Phi(i) = \theta - \pi T \Delta f = \theta - \pi \frac{N}{f_s} \frac{df_s}{N} = \theta - \pi d_i. \quad (13)$$

3) 对序列  $x_0(n)$  作  $N$  点 FFT 分析. 对应于谱线号  $i$ , 由式(10)有

$$\Phi_0(i) = \theta - \pi T \Delta f + 2\pi f_0 t_0 = \theta - \pi \frac{N}{f_s} \frac{df_s}{N} + 2\pi \frac{(i + d_i)f_s L}{N f_s} = \theta - \pi d_i + \frac{2\pi L(i + d_i)}{N}. \quad (14)$$

4) 根据相位差, 求出频率修正量. 对于谱线号  $i$  有

$$\Delta \Phi = \Phi_0(i) - \Phi(i) = 2\pi f_0 t_0 = \frac{2\pi L i}{N} + \frac{2\pi L d_i}{N} = \frac{2\pi L(i + d_i)}{N}, \quad (15)$$

$$d_i = \frac{\Delta \Phi - 2\pi L i / N}{2\pi L / N}. \quad (16)$$

令  $\delta = \Delta \Phi - 2\pi i(L/N)$ , 由于相位是在  $(-\pi, \pi)$  之间, 周期为  $2\pi$ , 所以  $\delta$  可能超过  $(-\pi, \pi)$  这一区间, 所以在实际计算中应取  $\delta$  除以  $2\pi$  后的余数:

$$\delta = f \bmod(\delta, 2\pi). \quad (17)$$

再作如下调整

$$\delta = \begin{cases} \delta + 2\pi & (\delta < -\pi), \\ \delta - 2\pi & (\delta > +\pi). \end{cases} \quad (18)$$

此时要式(16)成立, 必须满足

$$\left| \frac{2L}{N} \pi d_i \right| \leq \pi \quad (19)$$

其中  $|d_i| \leq 0.5$ , 所以参数应满足

$$0 < L \leq N. \quad (20)$$

满足式(20)后, 最后得

$$d_i = \frac{\delta}{2\pi L / N}. \quad (21)$$

5) 校正其频率、幅值和相位.

校正的频率为

$$f_i = f_s/N + df_s/N = (i + d_i)f_s/N. \quad (22)$$

当知道窗谱函数表达式时, 可进行幅值校正. 设窗函数的频谱模函数为  $W(x)$ ,  $y_i$  为谱线号  $i$  对应的原始序列 FFT 分析的幅值, 校正后的幅值为<sup>[3~4]</sup>

$$A_i = y_i / W(d_i). \quad (23)$$

根据对称窗函数相位特点, 归一化频率校正量为  $d_i$  时, 相位的校正量应为<sup>[3~5]</sup>

$$\Delta \Phi = -d_i \pi. \quad (24)$$

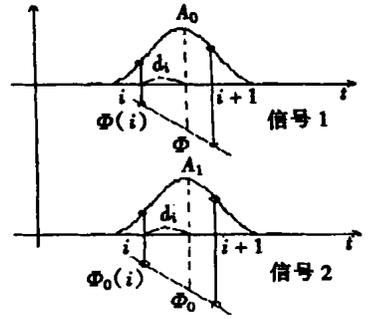


图2 两段信号加窗作谱后相位比较

设信号 FFT 的实部为  $R_i$ , 虚部为  $I_i$ , 则校正后的相位为

$$\theta_i = \arctan\left(I_i/R_i\right) + \Delta\varphi \quad (25)$$

### 3 仿真研究

用计算机生成式 (26) 的信号, 采样频率为 1024Hz, 作谱点数为  $N = 1024$ , 频率间隔(频率分辨率)为 1Hz, 选用 Hanning 窗, 分别进行了无噪声和加随机噪声的仿真计算, 随机噪声信号最大幅值为 1(消除直流成分后, 相当于各频率成分幅值的 50%)。  $L$  点可以选 1 到 1024 之间的任意值, 但为了提高抗噪能力,  $L$  取至少 10 点以上, 分别选  $L$  为 10、100、1024 作仿真研究

$$y(t) = \cos(2\pi 4.2t + 40\pi/180) + \cos(2\pi 126.4t + 20\pi/180) + \cos(2\pi 131.7t + 30\pi/180) + \cos(2\pi 258.5t + 70\pi/180) + \cos(2\pi 382.8t + 60\pi/180) \quad (26)$$

图 3 是当  $L$  取 100 点, 加汉宁窗, 没有加噪声时校正前后的谱图, 图 4 是当  $L$  取 100 点, 加汉宁窗, 加最大幅值是 1 的噪声时校正前后的谱图。

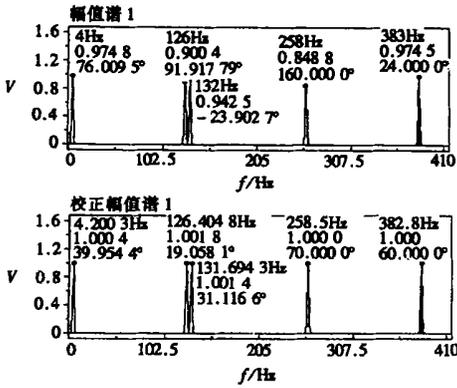


图 3 加 Hanning 窗无噪声时校正前后谱图对比 ( $L = 100$ )

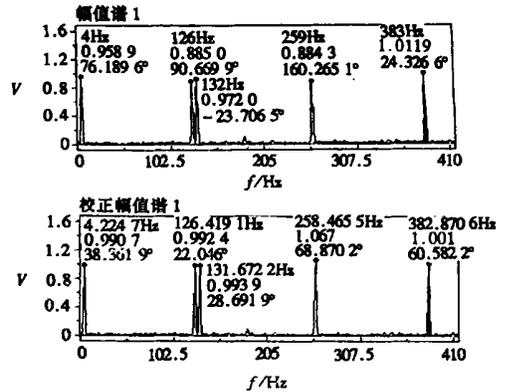


图 4 加 Hanning 窗有噪声校正前后谱图对比 ( $L = 100$ )

表 1 加 Hanning 窗时无噪声的校正结果 ( $L = 10$ )

理论频(Hz)	4.200 0	126.400 0	131.700 0	258.500 0	382.800 0
未校正频率	4.000 0	126.000 0	132.000 0	258.000 0	383.000 0
校正频率	4.197 1	126.397 6	131.702 9	258.500 0	382.800 0
理论幅值(V)	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
未校正幅值	0.974 8	0.900 4	0.942 5	0.848 8	0.974 5
校正幅值	0.999 6	0.998 0	0.998 1	1.000 0	1.000 0
理论相位(度)	40.000 0	20.000 0	30.000 0	70.000 0	60.000 0
未校正相位	76.009 5	91.917 8	-23.902 7	160.000 0	24.000 0
校正相位	40.523 9	20.350 4	29.585 3	70.000 0	60.000 0

表 1~ 6 分别是当  $L$  取 10 点、100 点和 1024 点, 在没有噪声和加噪声情况下校正前后数据对比。从图表中可以得出以下结论:

1) 对间隔较远的频率成分, 如本例中的 258.5Hz 和 382.8Hz, 这种相位差法对频率、幅值

和相位的校正精度很高。在无噪声的情况下, 频率、幅值和相位误差几乎为零, 点数  $L$  对校正精度没有多大影响。

表 2 加 Hanning 窗有噪声时的校正结果 ( $L = 10$ )

理论频(Hz)	4 200 0	126.400 0	131.700 0	258.500 0	382.800 0
未校正频率	4 000 0	126.000 0	132.000 0	258.000 0	383.000 0
校正频率	4 071 6	126.174 6	132.274 3	258.558 0	382.582 6
理论幅值(V)	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
未校正幅值	1.002 6	0.905 5	0.924 0	0.857 8	0.966 1
校正幅值	1.000 6	0.923 5	0.970 1	1.052 9	1.082 4
理论相位(度)	40.000 0	20.000 0	30.000 0	70.000 0	60.000 0
未校正相位	75.478 1	92.386 5	-24.248 7	160.543 3	22.788 6
校正相位	27.060 4	49.340 6	7.662 0	60.339 9	16.490 7

表 3 加 Hanning 窗无噪声时的校正结果 ( $L = 100$ )

理论频(Hz)	4 200 0	126.400 0	131.700 0	258.500 0	382.800 0
未校正频率	4 000 0	126.000 0	132.000 0	258.000 0	383.000 0
校正频率	4 200 3	126.404 8	131.694 3	258.500 0	382.800 0
理论幅值(V)	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
未校正幅值	0.974 8	0.900 4	0.942 5	0.848 8	0.974 5
校正幅值	1.000 4	1.001 8	1.001 4	1.000 0	1.000 0
理论相位(度)	40.000 0	20.000 0	30.000 0	70.000 0	60.000 0
未校正相位	76.009 5	91.917 8	-23.902 7	160.000 0	24.000 0
校正相位	39.954 4	19.058 1	31.116 6	70.000 0	60.000 0

表 4 加 Hanning 窗有噪声时的校正结果 ( $L = 100$ )

理论频(Hz)	4 200 0	126.400 0	131.700 0	258.500 0	382.800 0
未校正频率	4 000 0	126.000 0	132.000 0	258.000 0	383.000 0
校正频率	4 224 7	126.419 1	131.672 2	258.465 5	382.870 6
理论幅值(V)	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
未校正幅值	0.958 9	0.885 0	0.927 0	0.884 3	1.011 9
校正幅值	0.990 7	0.992 4	0.993 9	1.067 0	1.001 0
理论相位(度)	40.000 0	20.000 0	30.000 0	70.000 0	60.000 0
未校正相位	76.189 6	90.66 9	-23.706 3	160.265 1	24.326 6
校正相位	38.361 9	22.046 0	28.691 9	68.870 2	60.582 2

2) 加 Hanning 窗时, 采用这种校正方法负频率成分的干涉影响很小<sup>[6]</sup>, 本例中频率为 4.2Hz 的信号的校正精度仍然很高, 但随着点数  $L$  的增加, 校正精度略有提高。从表中数据可以看出, 当  $L$  为 10 点时, 精度稍低, 频率最大误差为 0.002 9 个频率分辨率, 幅值最大误差为 0.04%, 相位最大误差为 0.524 度。而当  $L$  为 1024 点时明显精度提高。

3) 当两个频率越靠近, 由于旁瓣及主瓣的干涉<sup>[6]</sup>, 其频率、幅值和相位误差都很大, 采用这种相位差法校正精度有所降低, 但在相隔 4 条线谱线以上时, 其校正精度仍然比较高。

本例中 126.4 Hz 与 131.7 Hz 这两个频率相差 5 条谱线,但随着点数  $L$  的增加,校正精度略有提高。从表中数据可以看出,当  $L$  为 10 点时,精度稍低,频率最大误差为 0.005 7 个频率分辨率,幅值最大误差为 0.2%,相位最大误差为 1.117 度。而当  $L$  为 1024 点时精度明显提高。从理论上分析,当两个频率的间隔小于 4 个频率分辨率时,由于主瓣重叠,此法校正精度将明显降低。

表 5 加 Hanning 窗无噪声时的校正结果 ( $L = 1024$ )

理论频(Hz)	4 200 0	126.400 0	131.700 0	258.500 0	382.800 0
未校正频率	4 000 0	126.000 0	132.000 0	258.000 0	383.000 0
校正频率	4 199 9	126.400 2	131.399 8	258.500 0	382.800 0
理论幅值(V)	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
未校正幅值	0.974 8	0.900 4	0.942 5	0.848 8	0.974 5
校正幅值	1.000 3	0.999 4	0.999 3	1.000 0	1.000 0
理论相位(度)	40.000 0	20.000 0	30.000 0	70.000 0	60.000 0
未校正相位	76.009 5	91.917 9	-23.902 7	160.000 0	24.000 0
校正相位	40.023 3	19.883 2	30.138 4	70.000 0	60.000 0

表 6 加 Hanning 窗有噪声时的校正结果 ( $L = 1024$ )

理论频(Hz)	4 200 0	126.400 0	131.700 0	258.500 0	382.800 0
未校正频率	4 000 0	126.000 0	132.000 0	258.000 0	383.000 0
校正频率	4 199 8	126.398 5	131.697 5	258.505 3	382.800 5
理论幅值(V)	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
未校正幅值	0.970 7	0.892 9	0.924 8	0.838 1	0.979 2
校正幅值	0.996 1	0.990 2	0.991 7	0.993 9	1.004 8
理论相位(度)	40.000 0	20.000 0	30.000 0	70.000 0	60.000 0
未校正相位	75.686 7	93.376 4	-24.145 8	-18.590 8	23.762 6
校正相位	40.162 9	22.939 8	30.042 6	70.394 1	59.755 9

4) 在加较大噪声时,校正精度跟选取的点数  $L$  有很大关系。仿真表明,当  $L < 10$  时,几乎不能用于校正。随着点数  $L$  增加,校正精度明显提高。如表所示当  $L$  取 10 点时,在加噪声情况下,校正结果已不能满足工程分析的需要,当  $L$  为 100 点或 1024 点时,其校正精度大大提高,完全可以满足工程实际的需要,因此,在加大噪声时,应适当增加点数。

## 4 结 论

1) 提出了一种通用的时移相位差离散频谱校正方法:将采样时域序列前  $N$  点构造第一段序列,然后从采样序列的第  $L$  点始,取  $N$  点作为第二段序列,分别对两段序列进行 FFT 分析,利用对应峰值谱线的相位差进行频谱校正的通用方法。与其它校正方法相比,此方法具有很好的通用性,其校正方法不受所加窗函数不同的影响,算法简单,计算速度快。文献[9]中提出的采连续两段时域信号的相位差校正法,是这种方法当  $L = N$  时的一个特例。这种方法减少了采样点数。

2) 校正精度与点数  $L$  选取有关,尤其对密集频率成份或负频率干涉影响更加显著。 $L$  点数越大,校正精度提高,但  $L$  必须小于等于  $N$ 。

- 3) 在加大噪声时, 校正精度与  $L$  点的选取有很大关系,  $L$  点越大, 精度越高。因此, 为了获得较高的校正精度,  $L$  应选取更大的点数。当点数足够大时, 负频率成分和间隔较近的多频率成分产生的干涉现象所带来的误差对精度的影响小, 这种方法的抗噪声干扰的能力较强。
- 4) 校正精度与窗函数有关。加 Hanning 窗时具有较高的校正精度, 由于矩形窗谱的能量泄漏严重, 校正精度较低。
- 5) 这种方法不适用于频率过于密集的分析场合或连续谱。

### [参 考 文 献]

- [1] 丁康, 谢明. 离散频谱三点卷积幅值校正法的误差分析[J]. 振动工程学报, 1996, 9(1): 92—98.
- [2] 朱利民, 钟秉林, 黄仁. 离散频谱多点卷积幅值修正法的理论[J]. 振动工程学报, 1999, 12(1): 120—125.
- [3] XIE Ming, DING Kang. Correction for the frequency, amplitude and phase in FFT of harmonic signal [J]. Mechanical System and Signal Processing, 1996, 10(2): 211—221.
- [4] 丁康, 张晓飞. 频谱校正理论的发展[J]. 振动工程学报, 2000, 13(1): 14—22.
- [5] 谢明, 丁康. 频谱分析的校正方法[J]. 振动工程学报, 1994, 7(2): 172—179.
- [6] 谢明, 丁康, 莫克斌. 频谱校正时谱线干涉的影响和判定方法[J]. 振动工程学报, 1998, 11(1): 22—28.
- [7] 刘进明, 应怀樵. FFT 谱连续细化分析的傅立叶变换法[J]. 振动工程学报, 1995, 8(2): 162—166.
- [8] 刘渝. 正弦波频率快速估计方法[J]. 数据采集与处理, 1998, 13(1): 7—11.
- [9] 谢明, 张晓飞, 丁康. 频谱分析中相位和频率校正的一种新方法—相位差校正法[J]. 振动工程学报, 1999, 12(4): 454—459.
- [10] 丁康, 谢明. 离散频谱的幅值、相位和频率的新校正方法及误差分析[J]. 动态分析与测试技术, 1996, 14(1): 10—29.

## Time Shifting Correcting Method of Phase Difference on Discrete Spectrum

DING Kang<sup>1</sup>, LUO Jiang\_kai<sup>2</sup>, XIE Ming<sup>2</sup>

(1. Department of Mechatronic Engineering, Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, P R China;

2. Department of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P R China)

**Abstract:** A general method called time shifting correcting method of phase difference on discrete spectrum is presented. That is, the second discrete time sequence lags behind the first one with  $L$  points, then performing  $N$  point FFT analysis on both sequences, and finally correcting spectrum by making use of the phase difference of two corresponding peak lines. The method proposed by XIE Ming et al is just the particular case of this method in the case that  $L$  is equal to  $N$ . Simulation result shows that this method is easily carried out with high precision, applicable for all kinds of symmetrical window functions and having high ability of anti noise.

**Key words:** spectrum analysis; correction; signal processing; phase difference