

文章编号: 1000-0887(2002) 07-0000-07

存在滑移时两圆球间的幂律流体挤压流动^{*}

黄文彬¹, 徐泳¹, 练国平², 李红艳¹

(1 中国农业大学 工程基础科学部, 北京 100083;

2 英国联合利华研究中心, 科尔沃什实验室, 山布鲁克, 贝德福德)

(李家春推荐)

摘要: 基于 Reynolds 润滑理论分析了壁面滑移对任意圆球颗粒间幂律流体的挤压流动的影响。研究表明有壁面滑移时挤压流动的粘性力可通过引进本文定义的滑移修正系数分离出无滑移解。推导出的挤压力滑移修正系数是一积分表达式, 依赖于滑移参数、幂律指数、球间隙和积分上限。一般地壁面滑移导致粘性力减小, 粘性力的减小量随幂律指数的增大而增大, 表明壁面滑移对剪切增稠流变材料有更大的影响; 粘性力的减小量还随着滑移参数的增大而增加, 而这恰与假设相符合; 粘性力的减小量又随球间隙减小或积分上限的增大(从液桥情况到完全浸渍)而减小直到趋于常数, 这一特性在离散元模拟时可以有效地减少计算量。

关键词: 润滑; 幂律流体; 挤压流动; 粘性力; 壁面滑移; 离散元法

中图分类号: O347.7; O373 **文献标识码:** A

引 言

流体在两圆球或平行圆盘间的挤压流动与许多实际应用相关, 如高分子聚合物成型、挤压流变仪、轴承润滑等。此外固体颗粒间的挤压流动作用还对许多工农业中的复杂材料如高浓度悬浮液等的流变性能有重要影响。自 1874 年 Stephan(见[1])研究两平行圆盘间牛顿流体的挤压流动以来, 有不少涉及平行圆盘间牛顿流体和非牛顿流体挤压流动的文献^[2~4]发表。Adams 等^[5]研究了等径球体间幂律流体的挤压流动, 但未得到粘性力解析解。Rodin^[6]提供了任意大小刚性球体间的挤压流动粘性力的渐近解, 但此解仍需要数值计算。本文作者最近提出了两球体间幂律流体挤压流动更精确的数值解和近似解^[7,8]。据作者所知过去的研究多数只考虑无滑移条件, Laun 等^[4]的平行圆盘挤压研究文章是考虑壁面滑移影响的为数很少的文章之一。迄今两球体间部分滑移的挤压流动研究尚属空白。

对于流体壁面滑移实验研究已有若干报道^[9~12]。据观察这一现象多发生在如下情形: 1) 当固体、流体间存在的很薄的润滑层时, 润滑薄层可简化为滑移边界模型; 2) 对多相复杂流体例如高浓度悬浮体的流动, 在壁面处浓度减小, 引起壁面处局部剪切速率的快速增加, 也可视为滑移边界; 3) 复杂流体例如高分子聚合物熔体在工艺过程中如抽丝或注模时, 界面处高分子链在剪切作用下缠绕松离(disentanglement) 和粘连脱离(debonding) 造成非零速度。显然理解

* 收稿日期: 2001_10_09; 修订日期: 2002_03_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972075); 联合利华(Unilever PLC) 资助项目

作者简介: 黄文彬(1934—), 男, 福建福州人, 教授。(E-mail: mech@east.cau.edu.cn)

壁面滑移的影响对前述与挤压流动有关的工艺设计和优化是非常重要的,故本文将考虑壁面滑移对两刚性球体间幂律流体挤压力的影响。对本问题的求解也将为胶体系统动力学和非饱和和散体材料的计算模拟提供有效的算法^[13, 14]。

1 存在壁面滑移时两刚性圆球间的挤压流动

1.1 问题的描述

考虑半径为 R_1 和 R_2 的两球体沿连心轴线以速度 V_z 相互趋近,其间有幂律流体。为方便分析固定下球,选择轴对称坐标系,原点取在下球顶点,见图 1。对小间隙情形接近的球面 S_1 (上) 和 S_2 (下) 确定的几何边界可近似为

$$\begin{cases} S_1: z = z_1(r) = s_0 + \frac{r^2}{2R_1}, \\ S_2: z = z_2(r) = -\frac{r^2}{2R_2}, \end{cases} \quad (1)$$

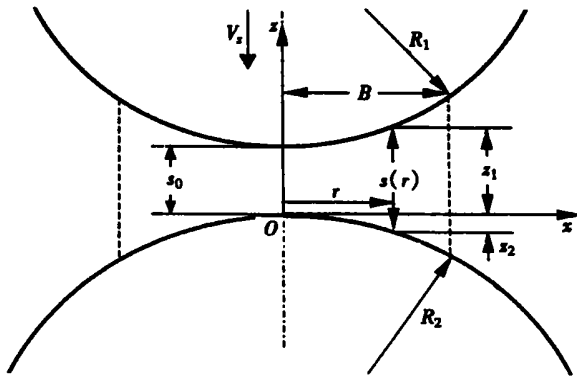


图 1 圆球间挤压流动

式中 s_0 是 S_1 和 S_2 连心轴线处最小间隙。图中 B 是所考虑流体在径向的界限,对液桥情形假定液桥为圆柱形, B 是半径(本文不讨论表面张力),对浸渍情形流体在径向是无界的, B 对应于参考压力为零的位置。本文作者等^[8]最近对无滑移时幂律流体挤压流动的研究表明,当幂指数大于 $1/3$ 时,压力集中在接触中心区域, B 只须取在外延适当区域即可,如可取 $B = \min(R_1, R_2)$ 。

1.2 控制方程

在两球间隙充分小的条件下,流体的运动方程的惯性项等可忽略不计。挤压流动的控制方程可利用 Reynolds 润滑理论进行近似分析。

不可压流体的连续方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

式中 v_r 为径向速度分量, v_z 为垂直速度分量。

假定压力 p 与 z 无关,动量方程为

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}, \quad (3)$$

其中 p 为压力, τ_{rz} 为剪应力分量。

幂律流体剪应力与剪切应变率的关系用如下本构方程描述:

$$|\tau_z| = K \left| \frac{\partial v_r}{\partial z} \right|^n, \quad (4)$$

其中 n 是幂指数, K 为常系数, 其量纲随幂指数而变。

1.3 边界条件

已发表的文献中提出了多种滑移边界条件, 最常用的属于摩擦滑移边界^[15, 16]。对于半径为 R , 距离为 $2h$ 并以相对速度 V 趋近的两平行圆盘间部分滑移的挤压流动, Laun 等^[4] 假定在界面滑移速度与 r 成正比:

$$v_r(r, h) = v_s r / R, \quad (5)$$

式中 $v_s = v_r(R, h)$ 是圆盘外缘处的滑移速度。对幂律流体可求出圆盘壁处剪应力分量为:

$$\tau_z|_{z=h} = -K \frac{V^n (1-2\delta)^n (2n+1)^n}{(2n)^n h^{2n}} r^n, \quad (6)$$

式中 $\delta = hv_s / (RV)$, 是该文献中定义的与滑移相关的无量纲参数, 取值范围 $0 \leq \delta \leq 0.5$, $\delta = 0$ 相应于无滑移, $\delta = 0.5$ 相应于无摩擦。

在下面的分析中我们采用相应于式(6)的滑移规律。从(5)和(6)可以推出幂律流体下圆盘挤压流动的摩擦滑移规律为 $(v_r|_{z=h})^n = -\beta \tau_z$ 。对两任意球体流体沿界面的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} (v_r)^n &= -\beta \tau_z, v_z = -V_z & (z = z_1), \\ (v_r)^n &= \beta \tau_z, v_z = 0 & (z = z_2). \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq r \leq B) \quad (7)$$

式中 β 为常数, 此即为适于幂律流体的广义摩擦滑移规律, 在文献中多有采用^[12, 17]。需要指出的是对球体表面精确的滑移边界应表为切向速度间断值与切向剪应力分量的关系, 即 $|\bar{v}_t|^n = \beta |\tau_m|$, 但是可以证明在接触中心区域切向和轴对称坐标系的径向几乎重合, 由此引起的误差可以忽略。

2 挤压流动的粘性力

2.1 速度和压力分析

令 $\bar{z}(r)$ 为两球表面之间流体流速 v_r 达到最大值和剪应力分量 τ_z 为零的位置。由此 $\bar{z}(r)$ 将液层分隔为上下两个区域。对上部区域 $z > \bar{z}$, $\tau_z < 0$, 下部区域 $z < \bar{z}$, $\tau_z > 0$, 相应地剪应力与剪切应变率的关系可表达为:

$$(\mp \tau_z) = K \left[\mp \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]^n. \quad (8)$$

积分动量方程(2)可得

$$\tau_z = \frac{dp}{dr} (z - \bar{z}). \quad (9)$$

这里取受压的压力符号为正, 故有 $dp/dr < 0$ 。

将(9)代入(8)后对 z 积分, 并由边界条件(7)及在位置 $z = \bar{z}$ 处 v_r 连续条件可导出径向速度场分布为:

$$v_r = -\frac{n}{n+1} \left[-\frac{1}{K} \frac{dp}{dr} \right]^{1/n} \left| z - \bar{z} \right|^{(n+1)/n} - \left[\frac{z_1 - z_2}{2} \right]^{(n+1)/n} + \left[-\beta \frac{dp}{dr} \right]^{1/n} \left[\frac{z_1 - z_2}{2} \right]^{1/n}, \quad (10)$$

式中

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (11)$$

式(11)说明对两球间的挤压流动最大流速和零剪应力总位于整个间隙的中间层。

将连续方程(2)对 z 积分, 然后与式(11)相比较, 得到压力梯度表达式为:

$$\left[-\frac{dp}{dr} \right]^{1/n} = (2K)^{1/n} r V_z \left[s_0 + \frac{r^2}{2R^*} \right]^{-(n+1)/n} \left[\frac{n}{2n+1} \left[s_0 + \frac{r^2}{2R^*} \right] + 2(K\beta)^{1/n} \right]^{-1}, \quad (12)$$

式中 R^* 为谐波平均半径, 定义为

$$1/R^* = 1/R_1 + 1/R_2 \quad (13)$$

为了简化推导我们引入参数 c , 称单位量纲积分上限, 定义为

$$c = B^2 / (2R^* s_0), \quad (14)$$

并参照文献[4]研究牛顿流体时的定义, 根据幂律流体和球体特点定义单位量纲滑移参数 α 为

$$\alpha = \frac{(K\beta)^{1/n}}{(s_0/2)} \quad (0 \leq \alpha < \infty) \quad (15)$$

对平行圆盘间幂律流体有滑移的挤压流动, Laun 等^[4]导出 α 与 δ 的关系为 $\alpha = \delta / (1 - 2\delta) \times 2n / (2n + 1)$, 当 $\alpha = 0$ 或 $\delta = 0$ 对应于无滑移, $\delta \rightarrow 0.5$ 和 $\alpha \rightarrow \infty$ 时无摩擦。

式(14)和式(15)代入(12)后对 r 积分, 并设接触区域外的参考点压力 $p|_{r=B} = 0$, 可得如下压力分布:

$$p(r) = -\frac{2K(2n+1)^n V_z^n}{s_0^{2n+1}} f_0(r, n, \alpha), \quad (16)$$

式中

$$f_0(r, n, \alpha) = \int_B^r r^n \left[1 + c \left(\frac{r}{B} \right)^2 \right]^{-(n+1)} \left[n \left[1 + c \frac{r^2}{B^2} \right] + (2n+1)\alpha \right]^{-n} dr \quad (17)$$

2.2 挤压力计算

挤压流动粘性力可由对压力在球表面的积分给出

$$F_s = 2\pi \int_0^B p(r) r dr = -\frac{4\pi K (2n+1)^n V_z^n}{n s_0^{2n+1}} \int_0^B f_0(r, n, \alpha) r dr \quad (18)$$

利用分部积分, 并令 $t = r/B$, 由(18)可得滑移下的粘性力公式:

$$F_s = \frac{2\pi K (2n+1)^n V_z^n B^{n+3}}{n s_0^{2n+1}} f_1(n, c, \alpha), \quad (19)$$

式中

$$f_1(n, c, \alpha) = \int_0^1 \frac{t^{n+2} dt}{(1+ct^2)^{n+1} \left[(1+\alpha^2) + \frac{2n+1}{n} \alpha \right]^n} \quad (20)$$

两球体间幂律流体无滑移时挤压流动的粘性力公式 F_0 已由本文作者等^[7]给出为

$$F_0 = \frac{2\pi K (2n+1)^n V_z^n B^{n+3}}{n s_0^{2n+1}} f(n, c), \quad (21)$$

式中的函数 $f(n, c)$ 为

$$f(n, c) = \int_0^1 \frac{t^{n+2} dt}{(1+ct^2)^{2n+1}} \quad (22)$$

显然令式(19)中的滑移参数 $\alpha = 0$ 可退回到无滑移解(21)。

引进滑移修正系数 f_s 为

$$f_s = \frac{f_1(n, c, \alpha)}{f_1(n, c, 0)} = \frac{f_1(n, c, \alpha)}{f(n, c)} \quad (23)$$

由此可知, 两球间有滑移时幂律流体挤压流动的粘性力解 F_s 可以解析成无滑移的解乘以滑移修正系数得到

$$F_s = f_s F_0 \quad (24)$$

滑移修正系数不仅是滑移参数 α 的函数, 还是幂律指数 n 和单位量纲积分上限 c 的函数。当单位量纲积分上限趋于零时, 公式(19)可退回到平行圆盘间挤压流动的滑移解。

3 结果和讨论

至此壁面滑移问题的粘性力计算简化为滑移修正系数 f_s 的求值和利用无滑移解 F_0 。对给定的滑移参数 α 值, 我们可考察单位量纲积分上限 c 对滑移修正系数 f_s 的影响。当 $\alpha = 1.0$ 时不同幂律指数 n 情况下 c 对滑移修正系数 f_s 的影响的曲线如图 2 所示。可以看出, 滑移修正系数 f_s 随着 c 的增加而增加, 当 c 充分大时 ($c \geq 1000$), f_s 趋于一水平线。这说明对于有限的液桥即 c 相对小时, 壁面滑移引起粘性力的有更显著的降低, 而对于完全浸渍情形时的球组合体壁面滑移对粘性力的影响则比较小。

滑移参数 α 对滑移修正系数 f_s 的影响的曲线如图 3 所示。此处单位量纲积分上限 c 固定于很高的数值 $c = 10000$, 相应于图 2 曲线中的平直段。随着滑移参数 α 的增加, 滑移修正系数 f_s 减小, 当 α 充分大时, 滑移修正系数 f_s 趋于常数, 因为滑移能减小挤压流动阻力, 这正是希望的行为。然而图 3 又可看出, 随着 c 的增加粘性力滑移修正系数 f_s 减小。这样对剪切变稀材料 ($n < 1.0$) 壁面滑移引起粘性力的适度降低, 但对剪切增稠 ($n > 1.0$) 材料, 壁面滑移可引起粘性力的很显著的降低。

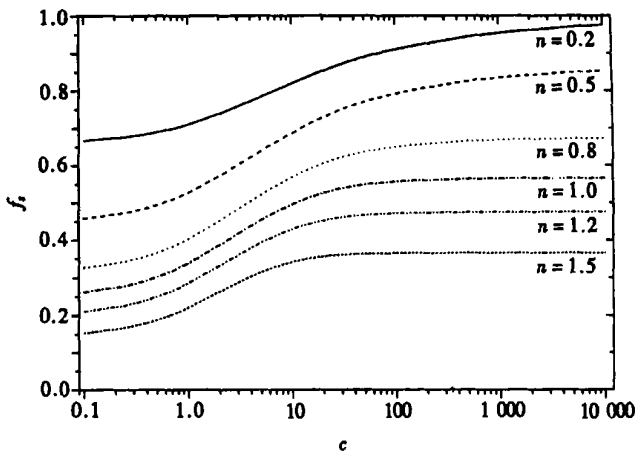


图 2 单位量纲积分上限对粘性力滑移修正系数 f_s 的影响 ($\alpha = 1$)

4 结 语

本文考察了壁面滑移对两刚性圆球间幂律流体挤压流动引起的粘性力的影响, 证明粘性

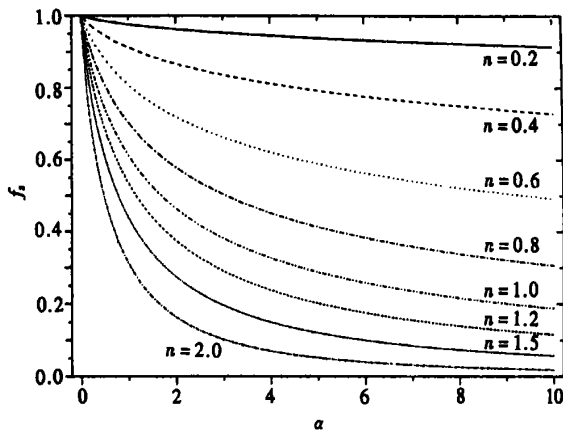


图3 滑移参数 α 对滑移修正系数 f_s 的影响 ($c = 10\ 000$)

力的滑移解可以分解为无滑移的解和滑移修正系数对粘性力的修正两部分,而无滑移问题的解已经完成并发表^[6-8]。粘性力的滑移修正系数不仅依赖于滑移参数,还依赖于幂律指数和单位量纲积分上限。所得数值结果表明在挤压流动中壁面滑移对剪切增稠材料引起粘性力的十分显著的降低,而这种影响对剪切变稀材料影响则较小。壁面滑移对有限的液桥能显著降低粘性力量值,而对于完全浸渍情形粘性力量值的降低则较小。

致谢 中国科学院力学所李家春研究员对本文提出重要修改意见,特此致谢。

[参 考 文 献]

- [1] Bird R B, Armstrong R C, Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids [M]. New York: Wiley, 1977, 19—21.
- [2] Scott J R. Theory and application of the parallel plate viscometer[J]. Trans Ins Rubber Ind, 1931, 7(2): 169—186.
- [3] Davis A M J, Frenkel A L. Cylindrical liquid bridges squeezed between parallel plates: exact Stokes flow solutions and hydrodynamic forces[J]. Phys Fluids A, 1992, 4(6): 1105—1109.
- [4] Laun H M, Rady M, Hassager O. Analytical solutions for squeeze flow with partial wall slip[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1999, 81(1,2): 1—15.
- [5] Adams M J, Edmondson B. Forces between particles in continuous and discrete liquid media[A]. In: B J Briscoe, M J Adams Eds. Tribology in Particulate Technology [C]. 1987, 154—172.
- [6] Rodin G J. Squeeze film between two spheres in a power-law fluid[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1996, 63(2,3): 141—152.
- [7] Xu Y, Huang W, Lian G. On the normal viscous force between two colliding spheres with an interstitial power-law liquid [A]. In: Kishino Ed. Powders & Grains 2001 (4th International Conference on Micromechanics of Granular Media) [C]. Lisse: Swets & Zeitlinger, 2001, 611—614.
- [8] Lian G, Xu Y, Huang W, et al. On the squeeze flow of power-law fluid between rigid spheres[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2001, 100(2,3): 151—164.
- [9] Mooney M. Explicit formulae for slip and fluidity[J]. Journal of Rheology, 1931, 2(2): 210—222.
- [10] Atwood B T, Schowalter W R. Measurement of slip at the wall during the flow of high density polyethylene through a rectangular conduit[J]. Rheol Acta, 1989, 28(2): 134—146.

- [11] Kraynik A M, Schowalter W R. Slip at the wall and extrudate roughness with aqueous solutions of polyvinyl alcohol and sodium borate[J]. *Journal of Rheology*, 1981, **25**(1): 95—114.
- [12] Ramanurthy A V. Wall slip in viscous fluids and influence of material construction[J]. *Journal of Rheology*, 1986, **30**(2): 337—357.
- [13] Melrose J R, Van Vliet J H, Ball R C. Continuous shear thickening and colloid surfaces[J]. *Physics Review Letter*, 1996, **77**(22): 4660—4663.
- [14] Lian G, Thornton C, Adams M J. Discrete particle simulation of agglomerate impact coalescence [J]. *Chem Engng Sci*, 1998, **53**(19): 3381—3391.
- [15] Rao I J, Rajagopal K R. The effect of slip boundary condition on the flow of fluids in a channel[J]. *Acta Mechanica*, 1999, **135**(1_2): 113—126.
- [16] Joshi Y M, Lele A K, Mashelkar R A. A unified wall slip model[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2000, **94**(2_3): 135—149.
- [17] Cohen Y, Metzner A B. Apparent slip flow of polymer solutions[J]. *Journal of Rheology*, 1985, **29**(1): 67—102.

Squeeze Flow of a Power Law Fluid Between Two Rigid Spheres With Wall Slip

HUANG Wen_bin¹, XU yong¹, LIAN Guo_ping², LI Hong_yan¹

(1. Department of Engineering Sciences, China Agricultural

University, Beijing 100083, P R China;

2. Unilever Research Colworth Laboratory, Sharnbrook, Bedford MK44 1LQ, UK)

Abstract: The effect of wall slip on the squeeze flow of a power law fluid between two rigid spherical particles has been examined based on the Reynolds lubrication theory. It is shown that the viscous force arising from the squeeze flow with wall slip may be resolved to the no_slip solution by introducing a slip correction coefficient. An expression for the slip correction coefficient of force is derived which is related to the slip parameter, the flow index and the upper limit of integration. Generally, wall slip results in a reduction in the viscous force. The reduction in the viscous force increases as the flow index increases, suggesting that wall slip has a more profound effect on shear thickening material. However, such reduction decreases as the upper limit of integration increases from finite liquid bridges to fully immersed systems. The reduction in the viscous force also increases as the slip parameter increases, which is the expected behaviour.

Key words: lubrication; power law fluid; squeeze flow; viscous force; wall slip