

文章编号: 1000-0887(2002) 07_0715_07

用子波方法研究 Rayleigh_Bnard 对流 温度信号的标度律*

傅 强^{1,2}, 夏克青²;

(1. 解放军理工大学 理学院 应用力学教研室, 南京 211101; 2. 香港中文大学 物理系, 新界沙田, 香港)

(戴世强推荐)

摘要: 采用子波分析方法, 对实验中测得的 Rayleigh_Bnard 对流温度信号(被动标量)的标度律, 从以下两个方面进行了研究: 第一方面, 直接采用扩展的结构函数(ESS)的公式对温度信号进行了分析, 研究表明, 采用该方法后的标度区域明显比不采用扩展结构函数的标度区域要宽, 得到的标度指数与其它实验中得到的温度信号标度指数 $\xi(q)$ 一致; 第二个方面, 将 A. Arneodo 等人对湍流中速度信号提出的基于子波分析的扩展标度公式, 推广应用于温度信号, 给出了一个描述温度信号的、基于子波分析的扩展标度公式, 研究表明, 提出的建立在子波系数极大模求和基础上的扩展标度公式, 也能够比较准确地提取温度信号的标度指数 $\xi(q)$ 。

关键词: Rayleigh_Bnard 对流; 子波分析; 标度律; 温度信号

中图分类号: O359⁺.1 文献标识码: A

引 言

Kolmogorov(1941)对充分发展的湍流, 提出了“局部均匀各向同性”湍流的概念, 并进一步提出了两个假设, 其中第二假设认为, 湍流的局部各向同性区域中存在一个仅由能量耗散率 ε 确定的“惯性副区”, 并在定义 $D_q(r) = \langle |u(x+r) - u(x)|^q \rangle \propto r^{\zeta(q)}$ 高阶结构函数后, 得出了 $\zeta(q) = q/3$ 的标度律, $q=2$ 时即为著名的“2/3”速度标度定律(K41)。对于温度信号结构函数 $R_q(r) = \langle |T(x+r) - T(x)|^q \rangle \propto r^{\xi(q)}$ 的标度指数 $\xi(q)$, Obukhov 首先将 Kolmogorov 的思想引入温度场, 他认为温度场也存在类似速度场那样的一个局部均匀的惯性副区, 在此区域内 $R_q(r)$ 只依赖于 N 和 ε (其中 $N = \kappa \langle (\cdot \cdot T)^2 \rangle$ 称为温度脉动耗散率), 并依据量纲分析, 得出 $\xi(q) = q/3$ 的标度定律, 即 $R_q(r) \propto r^{q/3}$, 它与速度场结果类似^[1]。之后, 由于湍流实验中间歇现象(包括速度和温度等信号)的发现, 人们证实 ε 和 N 并不是一个常数, 而且 $\zeta(q)$ 和 $\xi(q)$ 也不象他们估计的那样为 $q/3$, 而是明显呈非线性关系, 而且在 q 越大时, 偏离 $q/3$ 程度也就越大^[2,3]。

应当指出上述关于速度和温度标度律的叙述, 都是居于湍流已是完全充分发展了的前提, 也即实际控制湍流状态的 Re 数或 Ra 数已经很高了。于是在湍流中出现的惯性副区的区域

* 收稿日期: 2001_12_25; 修订日期: 2002_04_15

基金项目: 香港特别行政区研究资助局基金资助项目(CUHK319/96P)

作者简介: 傅强(1965—), 男, 教授, 博士(njqhp@jlonline.com)。

比较长,这使得在 $\ln D_q(r) \sim \ln(r)$ 或 $\ln R_q(r) \sim \ln(r)$ 双对数坐标曲线中,会出现一段较长的明显的直线段,从而通过求其斜率能够较容易地确定其标度指数。但如果流动 Re 数或 Ra 数比较小,这时的惯性区域就较小甚至不存在,于是双对数坐标曲线中的直线段就不明显,从而将导致标度指数难于确定。为此, Benize(1993)^[4] 及 Chavarria(1995)^[5] 等分别提出了另一种提取标度指数 $\zeta(q)$ 或 $\xi(q)$ 的方法,即对速度场 Benzi 提出 $D_q(r) \propto D_3(r)^{\zeta(q)}$ 和对温度场 Chavarria 提出 $R_q(r) \propto [R_2(r)]^{\beta(q,2)}$ 的变形的了的结构函数的表达式。他们发现使用这两个公式后,在 $\ln D_q(r) \sim \ln D_3(r)$ 或 $\ln R_q(r) \sim \ln R_2(r)$ 双对数坐标曲线中,会出现较长的直线段,这使得即使在 Re 数或 Ra 数不太大情况下,也能够求出 $\zeta(q)$ 或 $\xi(q)$, 这种求标度指数的方法称为扩展的标度律(Extended Self Similarity, 以下简称 ESS)。随后, G. Stolovitzky(1993) 对这种方法的有效性和使用条件从理论上作了分析,指出该方法在高阶结构函数时,可能误差会较大^[6]。

子波(Wavelet 或称小波)分析方法首先由法国科学家 Morlet(1981) 在分析地震数据时创立,它克服了传统 Fourier 变换没有任何局部特性及短时 Fourier 变换时频窗口不可变化的缺陷。它通过信号与一个被称之为子波的函数进行卷积,将信号在时域或频域空间进行分解。由于子波函数是具有有限紧支集的函数,故信号在距离时域窗中心较远处行为不起作用,故它是一种时域局部化分析方法,另一方面子波函数的时域窗口宽度可任意调节,它又是频域局部化分析方法。最后,子波函数还可沿信号时间轴进行平移分析,从而达到对信号进行扫描分析的目的,所以它又称为“数学上的显微镜”^[7]。Argoul(1989) 等首先利用小波方法分析了高 Re 数下,由风洞测得的速度信号,首次给出了清晰的 Richardson 设想的湍流级串结构图象^[8]; Farge 系统地总结了子波分析及其在湍流中的应用^[9]。近十几年来,法国几位学者 A. Ameodo、E. Bacry 和 J. F. Muzy 等在子波分析方法及其在湍流、生命科学、经济等方面的应用,进行了大量的、深入的研究^[10,11,12]。早期 G. Parisi 和 U. Frisch 从分形的角度,应用子波方法来研究标度律曾作过尝试,但结果并不好^[13]。A. Ameodo(1998) 等人首次采用子波方法成功提取了速度信号的 $\zeta(q)$ ^[14],但利用子波方法分析温度信号的标度 $\xi(q)$ 的工作,目前还没有见到。

1 温度信号的扩展标度律(ESS)

1 Rayleigh_Bnard 对流实验

本文的实验数据由香港中文大学物理系湍流实验室提供,实验装置为直径和高度都为 4.8cm,上下平面由铜制成,表面镀金,四周柱壁由有机玻璃制成,上板的温度由循环冷水来恒定,下板由一加热装置来恒定温度,中间有一温度热敏探头,实验状态由 Ra 数控制,其定义为^[15]:

$$Ra = \frac{\alpha g L^3 \Delta T}{\nu \kappa}, \quad (1)$$

其中 g 是重力加速度, L 是容器特征长度, α 、 ν 和 κ 分别代表热膨胀系数,动力粘性系数和热力耗散系数,实验流体是水,实验中水的平均温度保持几乎为室温,在实验中通过改变温差 ΔT 来改变 Ra 数,本实验 $Ra = 1.2 \times 10^8$, $Pr = \nu / \kappa = 7.0$,测量点为容器的中心位置,实验采样频率 16,测量的数据纪录总时间为 20 分钟。

图 1 是测量所得的温度信号脉动信号曲线,从图看到脉动剧烈,间歇现象明显。

2 温度信号的扩展标度律(ESS)

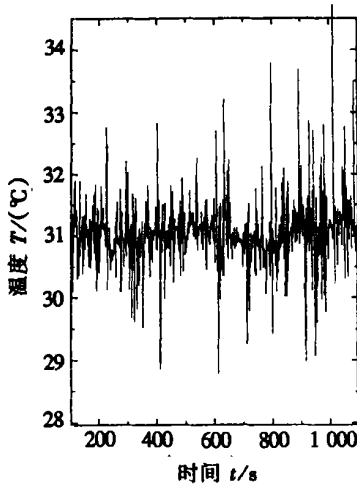
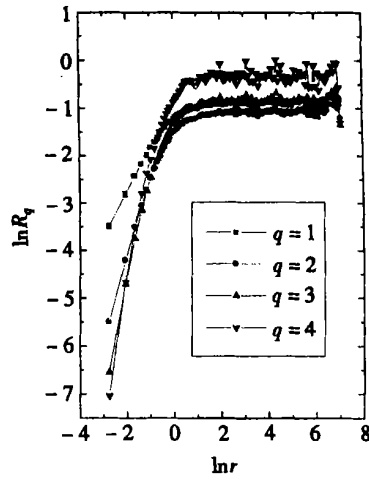


图1 温度信号的曲线

图2 结构函数 $\ln R_q(r)$ $-\ln(r)$ 的曲线

如引言所述, Chavaria(1995)等提出的对于被动标量的温度信号的(所用数据在风洞中测量得到)扩展标度律, 即^[5]

$$R_n(r) \propto [R_2(r)]^{\beta(q,2)}, \quad (2)$$

其中 $\beta(q,2) = \xi(q)/\xi(2)$, $\xi(q)$ 为温度信号的标度指数, 而 $\xi(2)$ 取决于公式 $R_2(r) \propto NrD_{-1}(r)$, 其中 N 为温度平均耗散率。由于 $R_2(r)$ 与速度的结构函数 $D_{-1}(r)$ 有关, 而在本文实验中没有速度信号数据, 于是文章中 $\xi(2)$ 的数据, 直接选取了由文献[5]所定出的 $\xi(2) = 0.62$ 。

图2为直接采用结构函数公式 $R_q(r) = \langle |T(x+r) - T(x)|^2 \rangle \propto r^{\xi(q)}$, 分析温度信号得到的双对数坐标 $\ln R_q(r)$ $-\ln(r)$ 的曲线。理论上讲, 如果这些曲线(为清楚起见, 图中只画出了 $q = 1, 2, 3, 4$ 时的四条曲线) 存在明显的直线段, 则表明该温度信号存在一个类似于速度信号惯性副区一样的, 温度信号的“惯性副区”, 在该区域中温度信号存在着某种形式的相似性, 也即在该区域中, 温度信号达到局部各向同性, 温度信号在该区域将失去特征尺度, 从而导致存在标度指数 $\xi(q)$ 。

但从图2中看不到这样的明显的直线段, 在 r 大时显然没有, 因为 r 大时, 结构受大尺度运动影响或受边界影响强烈, 结构呈现明显得各向异性, 故不会出现直线区; 而且图2即使在 r 很小时, 也无明显的直线段, 这表明实验中惯性副区太小, 直接从该曲线中定不出标度指数 $\xi(q)$ 。

图3则是采用公式(2), 得到的双对数坐标 $\ln R_q(r)$ $-\ln R_2(r)$ 的曲线, 同样对应于 $q = 1, 2, 3, 4$ 四条曲线。从该图中明显看到, 直线段区域已经变得非常宽, 以致通过确定该曲线的斜率, 可较容易地得到 $\xi(q)$, 这就是 ESS 扩展标度律的实质。

图4为 $q = 3$ 时, 采用公式(2)在双对数坐标 $\ln R_3(r)$ $-\ln R_2(r)$ 中, 通过求斜率而得出的 $\xi(3) = 0.82$ 的具体数值, 从中看到存在较长的直线区。

采用同样的方法, 对于 $q = 1, 2, 3, \dots, 10$ 的十条曲线, 我们能够得出 $\xi(q)$ 的一系列值, 见图5所示。其中(ESS)代表本文 Rayleigh_Benard 对流的扩展标度指数, 而另外一条曲线(Experiment)则为文献[16]在某实验中得到的标度曲线。由图可知, 在低阶结构函数(q 较小)的标度律中, 两者符合得很好, 就是到比较高阶时, 两者仍吻合较好。

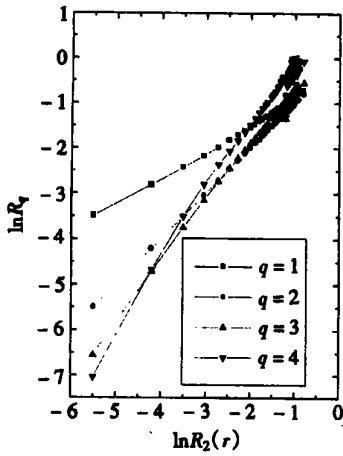


图3 ESS公式的 $\ln R_q(r)$ - $\ln R_2(r)$ 曲线

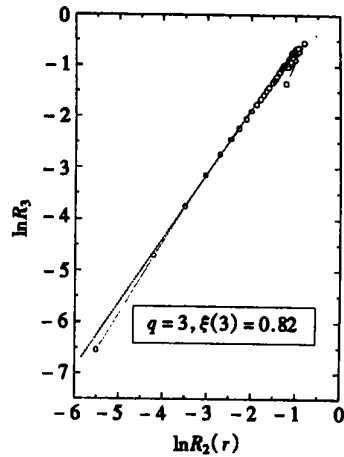


图4 $q=3, \ln R_3(r)$ - $\ln R_2(r)$ 曲线

2 子波分析温度信号的扩展标度指数

1 子波方法研究速度标度指数的公式

对于速度信号, A. Arneodo 等提出了适用于子波分析的扩展标度公式。设速度信号 $f(x)$ 的子波变换定义为^[14]:

$$W_f(b, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (3)$$

其中 $\Psi(x)$ 为子波母函数, Ψ 为 $\Psi(x)$ 的共轭复数, 本文选择 $\Psi(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$ 为 Mexican hat 子波函数。

子波极大模理论 (Wavelet Transformation Modulus Maximum, 简称 WTMM), 又定义^[14]

$$z(q, a) = \sum_{x \in L(a)} [\sup |W_f(x, a)|]^q, \quad (4)$$

其中 $L(a)$ 为极大模线族, \sup 为取上限^[14]。

在此基础上, 他们提出基于子波公式(4)的求 $\xi(q)$ 的 ESS 理论公式, 即为^[14]:

$$\frac{z(q, a)}{z(0, a)} \propto \left[\frac{z(3, a)}{z(0, a)} \right]^{\xi(q)}. \quad (5)$$

将公式(5)应用于风洞测量的速度信号, 得到的 $\xi(q)$ 与该实验得到的 $\xi(q)$ 符合较好。

2 温度场被动标度律的子波公式

设公式(3)中 $f(x)$ 代表了温度的时间序列, 此时 x 代表时间。则公式(3)求出的 $W_f(b, a)$ 为温度信号子波系数, 类似公式(4), 同样可令:

$$z(q, a) = \sum_{x \in L(a)} [\sup |W_f(x, a)|]^q, \quad (6)$$

其中 $L(a)$ 为温度信号子波系数极大模线族^[14]。

对于速度信号, 取 $z(3, a)$ 作为参考函数, 又由温度 ESS 标度理论, 容易想到对于温度应选取 $z(2, a)$ 为参考量。为此对于基于子波分析的温度信号的扩展(ESS)标度理论, 提出如下的标度公式, 即为:

$$\frac{z(q, a)}{z(0, a)} \propto \left[\frac{z(2, a)}{z(0, a)} \right]^{\beta(q, 2)} \quad (7)$$

其中 $\beta(q, 2) = \frac{\xi(q)}{0.62}$, $\xi(q)$ 为温度标度指数, 公式(6)和(7)即构成子波扩展被动标度公式。

图6为本文温度信号通过采用公式(6)、(7)得出的双对数坐标 $\ln \frac{z(q, a)}{z(0, a)}$ 和 $\ln \frac{z(2, a)}{z(0, a)}$ 的曲线。从该图可以看到, 类似温度结构函数ESS的双对数 $\ln R_q(r) \propto \ln R_2(r)$ 曲线, 它也存在较长范围的直线段, 这使得求斜率 $\beta(q, 2)$ 的变得容易, 从而很快可得到 $\xi(q)$ 。

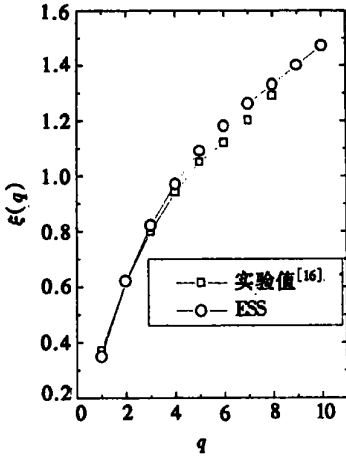


图5 非子波方法的 ESS 标度 $\xi(q)$ 曲线

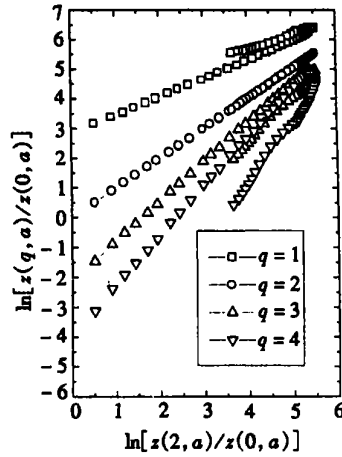


图6 公式(7)得到的 $\ln \frac{z(q, a)}{z(0, a)}$ 和 $\ln \frac{z(2, a)}{z(0, a)}$ 关系曲线

图7为 $q = 1, 2, 3, \dots, 10$ 时, 从图6中决定的 $\xi(q) \sim q$ (曲线(Wavelet)与直接由结构函数ESS得出 $\xi(q)$ 的比较, 从图7可知, 两者在低阶 $q < 6$ 时符合很好, 在高阶 q 时, WTMM 标度理论(基于子波)稍偏大, 差别的原因是数据纪录的长度不太长造成的。

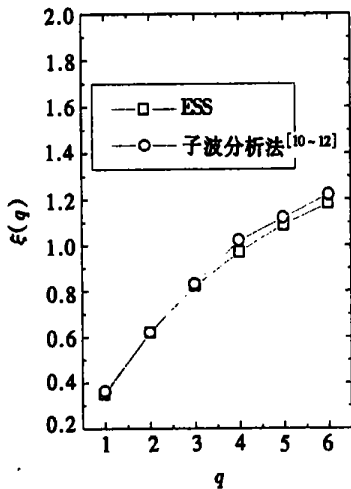


图7 结构函数标度和小波分析法得出标度的比较曲线

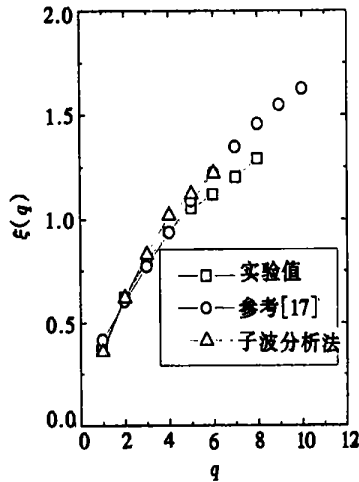


图8 几个标度指数曲线的比较

图8为某实验温度数据分析得到的 $\xi(q)^{[16]}$ 和由子波公式(6)、(7)分析得到的 $\xi(q)$, 以

及与某一理论模型^[17]得到的 $\xi(q)$ 三者的比较。该理论模型将 She 和 Leveque^[2] 对速度标度的 Log_Poisson 模型, 引入温度信号研究中, 从而得到 $\xi(q) = \frac{q}{3} + \frac{2}{9} - 2 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{q/6} - 1 \right]$ 温度标度律。这里将本文结果与之比较的原因是, 该文得出的 $\xi(q)$ 与某些实验结果比较吻合^[17]。由图看到, 三条 $\xi(q) \sim q$ 曲线在低阶 q 很吻合, 在高阶 q 偏离增大, 但取值总体上一致, 而且居于小波的 ESS 标度与它吻合更好, 这似乎说明标度的确主要由最强的奇异性产生(如间歇性)。因此本文提出的基于子波分析的公式(7), 可以求温度标度指数。

3 结 论

通过前面的分析, 可得结论:

1. 由结构函数的 ESS 理论能够得到标度指数 $\xi(q)$;
2. 采用本文提出的基于子模模极大的标度公式(6), (7), 也能够较准确地确定出 $\xi(q)$ 。

[参 考 文 献]

- [1] S 潘契夫. 随机函数和湍流[M]. 谈镐生, 等译. 北京: 科学出版社, 1976.
- [2] She Z S, L v que E. Universal scaling laws in fully developed turbulence[J]. Phys Rev Lett, 1994, **72**(3): 336.
- [3] L v que E, Chavarria G R, Baudet C, et al. Scaling laws for the turbulent mixing of a passive scalar in the wake of a cylinder[J]. Phys Fluids, 1999, **11**(7): 1869—1879.
- [4] Benzi R, Ciliberto S, Tripicciono R, et al. Extended self-similarity in turbulence flows[J]. Phys Rev E, 1993, **48**(1): R29—R32.
- [5] Chavarria R Ruiz, Baudet C, Ciliberto S. Extended self-similarity of passive scalars in fully developed turbulence[J]. European Physics Letters, 1995, **32**(4): 319—324.
- [6] Stolovitzsky G, Sreenivassan K R. Scaling of structure functions[J]. Phys Rev E, 1993, **48**(1): R33—R35.
- [7] Morlet J. Sampling theory and wave propagation[A]. In: NATO ASI Ed. Proc 51st Annu Meet Soc Explor Geophys [C]. Los Angeles, Berlin: Springer, 1981.
- [8] Argoul F, Arneodo A, Grasseau G, et al. the multifractal nature of the Richardson casacade[J]. Nature, 1989, **38**(6210): 51—53.
- [9] Farge M. Wavelet transforms and their applications to turbulence[J]. Annu Rev Fluid Mech, 1992, **24**: 395.
- [10] Arneodo A, Manneville S, Muzy J F. Towards log_normal statistics in high Reynolds number turbulence[J]. European Phys J B, 1998(1): 129—140.
- [11] Roux S, Muzy J F, Arneodo A. Detecting vorticity filaments using wavelet analysis: About the statistical contribution of vorticity filaments to intermittence in swirling turbulent flow[J]. European Phys J B, 1999, **8**: 301—322.
- [12] Arneodo A, Muzy J F, Sornette D. “Direct” causal cascade in the stock market[J]. European Phys J B, 1998, **2**(2): 272—282.
- [13] Parisi G, Frisch U. In: Proceeding of the International School on Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics [C]. Amsterdam: Ghil North_Horland, 1985, 84.
- [14] Arneodo A, Audit B, Bacry E, et al. Thermodynamics of fractal signals based on wavelet analysis: application to fully developed turbulence data and DNA sequences[J]. Physica A, 1998, **254**: 24—25.

- [15] XIA Ke_qing, LUI S L. Turbulent thermal convection with an obstructed side wall[J]. Phys Rev Letters, 1997, **79**(25): 5006.
- [16] CHEN Shi_yi, CAO Nian_zheng. Anomalous scaling and structure instability in three_dimensional passive scalar turbulence[J]. Phys Rev Letters, 1997, **78**(18): 3459—3462.
- [17] RUI Zhong_rao. Mixed model for temperature structure functions in fully developed turbulence[J]. Phys Rev E, 1999, **59**(2): 1727—1728.

Extended Self Similarity of Passive Scalar in Rayleigh_B nard Convection Flow Based on Wavelet Transform

FU Qiang^{1,2}, XIA Ke_qing²

(1. College of Physics, Meteorology Institute of Science and
Engineering University of PLA, Nanjing 211101, P R China;

2. Department of Physics, Chinese University of Hong Kong, Shatian,
Hong Kong, P R China)

Abstract: Wavelet transform was used to analyze the scaling rule of temperature data (passive scalar) in Rayleigh_B nard convection flow from two aspects. The first one was to utilize the method of extended self similarity, presented first by Benzi et al, to study the scaling exponent of temperature data. The obtained results show that the inertial range is much wider than that one determined directly from the conventional structure function, and find the obtained scaling exponent agrees well with the one obtained from the temperature data in an experiment of wind tunnel. The second one was that, by extending the formula which was proposed by A. Arneodo et al for extracting the scaling exponent $\zeta(q)$ of velocity data to temperature data, a newly defined formula which is also based to wavelet transform, and can determine the scaling exponent $\xi(q)$ of temperature data was proposed. The obtained results demonstrate that by using the method which is named as WTNN (wavelet transform maximum modulus) $\xi(q)$ correctly can be extracted.

Key words: Rayleigh_B nard convection; wavelet transform; extended self similarity; temperature data