

文章编号: 1000-0887(2002) 07-0661-06

浅水流动与污染物扩散的高分辨率 计算模型*

王嘉松¹, 何友声²

(1. 上海交通大学 机械与动力工程学院, 上海 200030; 2. 上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(本刊编委何友声来稿)

摘要: 将组合型 TVD 格式应用于守恒型的浅水方程和污染物扩散方程, 建立了二者耦合求解的高分辨率有限体积计算模型。给出了溃坝水流、明渠突扩流和污染物输运计算的典型算例, 并与实验数据或其它数值结果进行了比较, 证实了该模型的有效性, 表明它不但能处理有激波的非恒定流问题, 也能较好地计算具有任意边界的一般的浅水流动和污染物扩散问题, 为浅水流动和水环境模拟提供了精度高、稳定性好、普适性强的数值方法。

关键词: 浅水流动; 污染物扩散; TVD; 有限体积; 数值模拟

中图分类号: O35; TV131.4 **文献标识码:** A

引 言

浅水流动在水利工程界是非常广泛的水流现象, 污染物扩散与人们日益关注的环境问题密切相关, 它们在水利和环境工程界一直受到高度重视。描述其运动特性的二维模型已比较成熟, 三维模型也有了很大发展。但鉴于目前的计算机速度和工程适用的程度, 二维模型将在实际工程中继续发挥重要作用。尽管如此, 无论是浅水流动一般问题还是污染物扩散问题, 都有进一步发展的必要, 如强潮河段与海口的潮流与污染物运移特性需要更优秀的格式来模拟、天然水域任意复杂的边界需要计算模型具有对任意边界的适应性、大面积的排污水体需由统一模式来描述, 而无需细分为近区与远区分别加以处理而导致两区衔接的困难。这就需要引入更优秀的数值方法和发展适应性更广的计算模型。TVD 格式以其精度高、激波捕捉能力强、稳定性好的特点而在空气动力学得到广泛应用, 有限体积离散方法兼有有限元和有限差分的优点因而得到迅速发展。因此, 本文首次采用任意四边形单元基础上的有限体积离散方法结合应用高分辨率 TVD 格式来研究浅水动力学和环境水力学问题。我们知道, 水流特征影响污染物浓度分布和扩散, 但反过来如果不考虑密度变化, 污染物对水流特性没有影响, 因此耦合或非耦合求解浅水方程和浓度方程均是可行的手段。考虑到 TVD 格式应用的特点, 需对方程组作特征解耦, 为了方便本文将二者耦合求解。

* 收稿日期: 2001_06_08; 修订日期: 2002_02_28

作者简介: 王嘉松(1967—), 男, 四川蓬溪人, 副教授, 博士(E-mail: jswang@sjtu.edu.cn);

何友声(1931—), 男, 浙江宁波人, 教授, 博导, 中国工程院院士。

1 数学模型

描述浅水流动与污染物扩散运移现象的控制方程为浅水方程和污染物浓度扩散方程, 本文将两组方程耦合求解, 组成新的方程组, 并改写成守恒形式, 为

$$\mathbf{Q}_t + [\mathbf{F}(\mathbf{Q})]_x + [\mathbf{G}(\mathbf{Q})]_y = \mathbf{S}(\mathbf{Q}), \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{Q} = (h, q_x, q_y, C)^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = (q_x, q_x^2/h + 0.5gh^2, q_x q_y/h, q_x C/h)^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{Q}) = (q_y, q_x q_y/h, q_y^2/h + 0.5gh^2, q_y C/h)^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{Q}) = (S_1, S_2, S_3, S_4)^T \quad (5)$$

$$S_1 = 0, \quad (6)$$

$$S_2 = -\frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\nu_e \frac{\partial q_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_e \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right) \right], \quad (7)$$

$$S_3 = -\frac{\tau_{by}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\nu_e \frac{\partial q_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_e \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right) \right], \quad (8)$$

$$S_4 = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right] + S_C, \quad (9)$$

式中 \mathbf{Q} , $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{S}(\mathbf{Q})$ 分别是守恒物理向量、 x 和 y 方向的通量向量及源项; h 为流动水深(m); g 为重力加速度; q_x 、 q_y , τ_{bx} 、 τ_{by} , K_x 、 K_y 分别为 x 和 y 方向的单宽流量(m^2/s), 底部剪切应力及浓度扩散系数; C 为污染物深度平均浓度(mg/l); $\nu_e = \nu + \nu_t$ 为有效应力系数, ν_t 为紊流粘性应力系数; S_C 为考虑物理、化学、生物和污染源汇等因子影响的综合项, 对于化学耗氧量 COD, 实际上表示单位时间内单位面积上污染物的负荷量。

假设由于河床产生的剪切应力起支配作用, 那么紊流粘性系数可表示为^[1]

$$\nu_t = \frac{\kappa}{6} u^* h, \quad (10)$$

式中 κ 为 von Karman 常数($= 0.41$); u^* 为剪切速度由下式给出

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}, \quad (11)$$

τ_b 为底部剪切应力

$$\tau_b = \sqrt{\tau_{bx}^2 + \tau_{by}^2}, \quad (12)$$

$$\text{且 } \tau_{bx} = \rho g h S_{fx}, \quad \tau_{by} = \rho g h S_{fy}, \quad (13)$$

摩阻定义为

$$S_{fx} = \frac{n^2 q_x \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{h^{10/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 q_y \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{h^{10/3}}, \quad (14)$$

式中 n 为曼宁粗糙系数。

对于扩散系数, 参照国内外通用的做法, 根据 Eider 经验公式^[1], 有

$$K_x = 5.93 \sqrt{gn} |q_x| / h^{1/6}, \quad (15)$$

$$K_y = 5.93 \sqrt{gn} |q_y| / h^{1/6}. \quad (16)$$

2 数值方法

针对任意四边形单元 i (内部区域 Ω , 边界 $\partial\Omega$), 对方程组(1) 进行积分, 得到积分形式的

方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} Q dA + \int_{\partial \Omega} (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dl = \iint_{\Omega} S dA, \quad (17)$$

式中 A 为区域 Ω 的面积, dl 为边界 $\partial \Omega$ 的弧长, \mathbf{n} 为边界 $\partial \Omega$ 的外法向单位向量。边界 $\partial \Omega$ 由四条线段组成, 上式左端第 2 项可以写成

$$\int_{\partial \Omega} (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dl = \sum_{k=1}^4 f_n^k(Q) l^k, \quad (18)$$

其中 k 为单元各边的编号, l^k 为边长, f_n^k 为第 k 边外法向通量。

设向量 Q 在单元内部保持不变, 进一步离散(17)式, 得到有限体积基本方程

$$\frac{dQ_i}{dt} = - \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^4 f_n^k l^k + S(Q_i). \quad (19)$$

令上述方程中的右端项为 Res_i , 即

$$(Q_i)_t = Res_i. \quad (20)$$

采用两步 Runge_Kutta 法离散(20), 那么时间上也是二阶精度 t

$$\begin{cases} Q_i^{(1)} = Q_i^{(n)} + \Delta t Res_i(Q_i^{(n)}), \\ Q_i^{(2)} = Q_i^{(1)} + \Delta t Res_i(Q_i^{(1)}), \\ Q_i^{(n+1)} = 0.5(Q_i^{(n)} + Q_i^{(2)}). \end{cases} \quad (21)$$

对式(19)中的通量 f_n^k 采用组合型 TVD 格式插值。不过, 由于 TVD 格式是差分格式, 待解变量布置在节点上, 为了应用于有限体积算法, 我们提出了卫星单元及其拓扑关系, 将待解变量布置在单元形心, 对单元各边法向通量进行 TVD 插值^[2]、源项采用中心差分基础上的有限体积离散形式, 得到时空皆为二阶精度的数值模型。由于 TVD 格式是针对求解双曲型方程(无源项或源项很小)所作的定义, 本文模型包含的源项可能很大, 正负交错。因此对源项中含待解变量的负系数显式项进行隐式化, 移到离散方程左端, 以利于计算的稳定。详见文[2~4]。

3 算 例

3.1 溃坝波的圆柱绕流

我们曾将组合型 TVD 格式用于计算一维溃坝波, 表明与理论解相当吻合, 并确定了最优限量函数; 用于二维计算, 与实验结果比较吻合较好, 证实了数学与数值模型的有效性。Yang 和 Hsu^[5]曾模拟了非恒定激波绕圆柱的绕射问题。在此考虑以相同的几何条件计算溃坝波的圆柱绕流问题。圆柱半径为 0.5m, 坝距圆柱 1.2m, 设上下游初始水位分别是 10m 和 2m。计算域延伸到半径 3m, 划分 361×101 个辐射式网格单元。在本算例中, 模型中不含浓度扩散方程, 且不计底摩擦和紊流粘性, 于是模型中不含源项。计算坝溃决 0.16s 和 0.2s 后水位等值线如图 1, 可以看到波遇圆柱发生反射的弧形激波和绕过圆柱两波相互作用等复杂涌波结构。

3.2 明渠突扩流动

如果渠道断面的几何形态发生突变, 水流将与边界分离, 形成回流区, 这是非常典型的流动现象。这种水流形态到处可见, 在土木水利工程中具有重要的实际意义, 例如防波堤、港口、海湾附近的水流, 水工建筑物消能工水流, 闸门和障碍物周围的水流均含回流区。泄入江河湖海的水流和分层流也会形成回流区。

明渠突扩流动常作为断面突变水流的典型代表算例, 用以测试各种紊流模型。一般实验

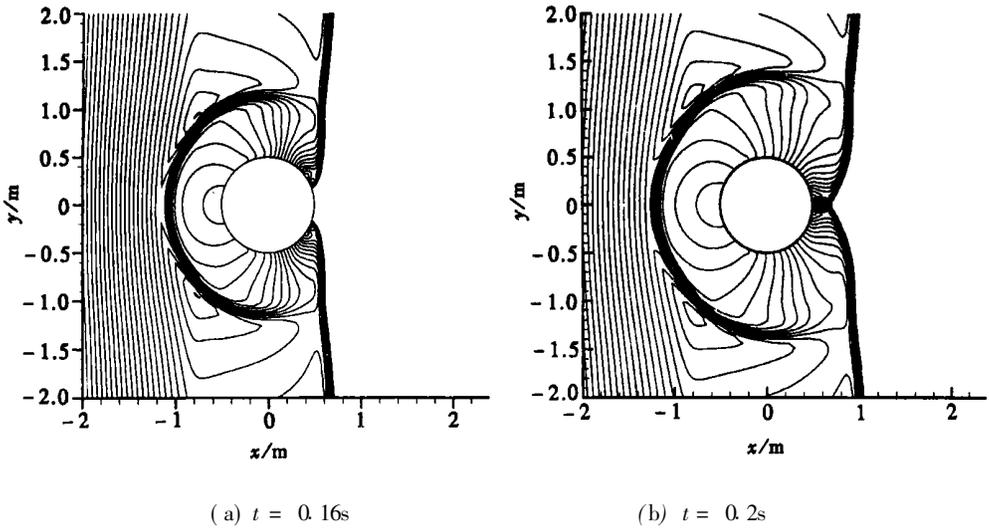


图 1 圆柱绕流溃坝波水位等值线

测得的回流区长度是台阶宽度的 7 倍, 而用标准 $k-\varepsilon$ 模型的计算值低于实验值约 20% (台阶宽度的约 5.6 倍)^[6]。给定明渠突扩流动的几何和网格条件: 台阶宽 $H = 0.5\text{m}$, 长 $8.0H$, 渠道入口宽 $3.0H$, 渠道总长 $28.0H$, 划分 4 000 个单元, 计算得到稳定后的速度场示于图 2, 其回流区长度约为 $5.6H \sim 6.0H$, 与标准紊流模型相当, 可见本文的模型具有相当的精度, 且由于无需求解 k 方程、 ε 方程和无需利用壁面函数确定固壁边界, 计算量比 $k-\varepsilon$ 双方程模型小许多。

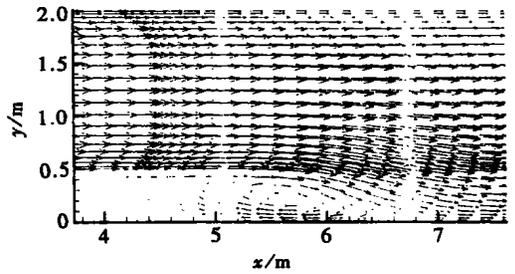


图 2 突扩渠道的速度场

3.3 污染物的扩散运移

在通常的排污工程中, 污水多以射流形式排入纳污水体如海洋、江河之中。根据污水排放位置的不同, 排污形式有岸边排放和底部排放。当污水以岸边排放方式排入纳污水体时, 排放口将卷吸其上下游的环境水体, 并在排污口附近形成一掺混中心。环境水体流动将被排污口射流推移开, 而排污口射流本身也会被环境水体的流动所弯曲。由于排污口射流对下游环境水体的卷吸受到岸边固壁边界的限制, 因此在排污口下游的近岸区将形成回流区。回流区的大小与变化规律受相对排放速度比、岸边界形状、环境流体流动特性等诸多因素的影响, 难于采用通常的理论分析求解方法而获得, 通常进行数值模拟。

给定边界条件为: 1) 进口边界: $q_x = hU_0, q_y = 0, C = 0$ (主渠道入口); $q_x = 0, q_y = hV_0, C = C_0$ (排放口); 2) 出口边界: $\partial \Psi / \partial t + V_n \partial \Psi / \partial n = 0$ ($\Psi = q_x, q_y, h, C; n$ 为出口边界外法向方向; V_n 为流速在出口边界外法向方向的分量); 3) 固壁边界: 与边界重合的边, 其法向和切向通量为 0。

给定几何条件为: 渠道入口宽度 $B = 1.82\text{m}$, 水深 $h = 0.06\text{m}$, 排污口宽 $b = 0.225\text{m}$, 入流速度 $U_0 = 0.1\text{m/s}$, 排污速度 $V_0 = 4.0U_0$, 设排放口排放污染物浓度为 $C_0 = 1.0\text{mg/l}$ 。取排污口上游渠道长 1.08m , 下游渠道长 2.52m 。渠道视为光滑且平底。在排污口附近加密网格, 共

划分 90×40 个单元。计算得到如图 3 所示恒定(44.87s) 时的污染物排放速度场和浓度场。

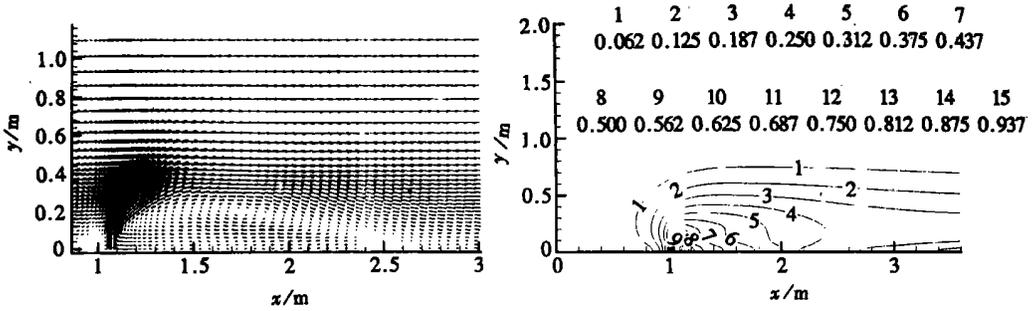


图 3 岸边排放速度场(排放口附近局部放大)和浓度场

反映回流区特征参数是排污口后面的大旋涡长度 L 和高度 H 。实验发现,回流区旋涡的大小和形状与一个简单的关系式 $M = R^2 b/B$ (其中 $R = V_0/U_0$) 有关。此处 $M \approx 0.2$ 。文献[7] 给出了实验结果,文献[8] 给出了利用深度平均 $k-\varepsilon$ 紊流模型和 Power_law 格式及 Roe 的近似黎曼解法加 SIMPLEC 算法得到的结果,现将这些结果和本文的结果列于表 1 中。

可以看出,不同模型和不同算法得到的结果有显著差别,本文模型优于用 Power_law 算法求解二维 $k-\varepsilon$ 紊流模型和 Hybrid 算法求解的三维 $k-\varepsilon$ 紊流模型,但不如 Roe 算法求解二维 $k-\varepsilon$ 紊流模型和 QUICK 格式求解三维 $k-\varepsilon$ 紊流模型。可见数值算法和所选取的模型都非常重要,由于本文采用的是比 $k-\varepsilon$ 紊流模型简单得多的零方程紊流模型,计算工作量小,但数值计算精度高,这是完全合理的结果。可以预见,将本文计算法用于求解 $k-\varepsilon$ 紊流模型或其它紊流模型有可能得到更加精细和可靠的结果。

表 1 回流区旋涡参数的比较

参 数	实 验 ^[7]	二维模型			三维模型 ^[9]	
		本文	Roe ^[8]	Power_law ^[8]	QUICK	Hybrid
L/B	1~ 1.7	0.9	1.04	0.71	1.088	0.56
H/B	≈ 0.2	0.142	0.185	0.132	0.23	0.1

4 结 语

本文引入组合型 TVD 格式和有限体积离散方法用于求解浅水方程和污染物扩散方程,建立了二者耦合求解的高分辨率有限体积计算模型。以浅水流动和水环境中的几个典型流动作为算例,模拟了溃坝波的圆柱绕流特征、明渠突扩流动和污染物扩散输运现象,并与实验数据或其它数值结果进行了比较,表明该模型不但能处理有激波的非恒定流问题,也能较好地计算一般的浅水流动和污染物扩散问题,为浅水流动和水环境模拟提供了精度高、稳定性好、普适性强的计算模型。进一步的工作是应用于实际河口、海口、海湾等,以解决更多的工程实际问题。

[参 考 文 献]

- [1] Elder J W. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow[J]. J Fluid Mech, 1959, (5): 546—

- 560.
- [2] WANG Jia_song, NI Han_gen. A high_resolution finite_volume method for shallow water equations [J]. J of Hydrodynamics, Ser B, 2000, (1): 35—41.
- [3] WANG Jia_song, NI Han_gen, HE You_sheng. Finite_difference TVD scheme for computation of dam_break problems[J]. ASCE J Hydr Eng, 2000, **126**(4): 253—262.
- [4] 王嘉松. 浅水流动和污染物扩散计算的有限差分法和有限体积高分辨率算法[R]. 上海交通大学工程力学系博士后出站报告, 2000, 8.
- [5] Yang J Y, Hsu C A. Computations of free surface flows, part 2: 2D unsteady bore diffraction[J]. J Hydr Res, 1993, **31**(3): 403—412.
- [6] 陈景仁. 湍流模型及有限分析法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1989.
- [7] McGuirk J J, Rodi W. A depth_averaged mathematical model for the near field of side discharges into open channel flow[J]. J Fluid Mech, 1978, **86**(4): 761—781.
- [8] Ye J. McCorquodale J A. Depth_averaged hydrodynamics model in curvilinear collocated grid[J]. ASCE J Hydr Eng, 1997, **123**(3): 380—388.
- [9] Demuren A O, Rodi W. Side discharge into open channels: Mathematical model[J]. ASCE J Hydr Eng, 1982, **109**(12): 1707—1722.

High Resolution Numerical Model for Shallow Water Flows and Pollutant Diffusions

WANG Jia_song¹, HE You_sheng²

(1. School of Mechanic Engineering, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200030, P R China;

2. Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200030, P R China)

Abstract: A finite_volume high_resolution numerical model for coupling the shallow water flows and pollutant diffusions was presented based on using a hybrid TVD scheme in space discretization and a Runge_Kutta method in time discretization. Numerical simulations for modelling dam_break, enlarging open channel flow and pollutant dispersion were implemented and compared with experimental data or other published computations. The validation of this method shows that it can not only deal with the problem involving discontinuities and unsteady flows, but also solve the general shallow water flows and pollutant diffusions.

Key words: shallow water flow; pollutant diffusion; TVD scheme; finite_volume method; numerical simulation