 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 08_0876_05

非线性 Klein_Gordon 方程的微扰理论

刘天贵, 颜家壬

(湖南师范大学 物理系, 长沙 410081)

(张鸿庆推荐)

摘要: 求得了一阶近似下微扰对非线性 Klein_Gordon 孤子的影响, 即求得了孤子参数随时间的缓慢变化及一阶修正的具体表达式

关 键 词: 孤子微扰; 孤子参数; 非线性 Klein_Gordon 孤子
中图分类号: O415 文献标识码: A

引 言

非线性Klein_Gordon 方程为非线性物理的一个重要方程, 在物理学中许多领域内有重要应用[1,2] 它的一般形式为:

$$U_{TT} - U_{XX} + m^2 U + \quad U^3 = 0, \tag{1}$$

式中, 下标分别代表对时、空变量 T、X 求导, m 和 为已知常数且 < 0 文献[3] 求出了它的单孤子解, 但我们一直未见关于该方程的孤子微扰理论的报道 本文运用一孤子微扰理论直接方法[4~6] 来研究此问题 引进如下变量替换:

$$U = \sqrt{-\frac{m^2}{6}}\,u,\quad T = \frac{1}{m}t,\quad X = \frac{1}{m}x, \tag{2}$$

可将方程(1) 简化为:

$$u_{tt} - u_{xx} + u - \frac{1}{6}u^3 = 0, \tag{3}$$

方程(3) 即文献[3] 中所谓的 sin_Gordon 方程的一近似方程, 可见[3] 中 sin_Gordon 这一近似方程仅仅只是非线性Klein_Gordon 方程的一个特例 本文研究含微扰的非线性 Klein_Gordon 方程:

$$u_{tt} - u_{xx} + u - \frac{1}{6}u^3 = \quad R[u], \tag{4}$$

式中, 为表征微扰强弱的小参数(0 < 1); $R[u]$ 为 u 的已知泛函, 即 u, u_x, u_{xx}, 的已知函数

收稿日期: 2000_06_30; 修订日期: 2001_12_21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19775013)
作者简介: 刘天贵(1973) , 女, 湖南人, 硕士;
颜家壬(1937) , 男, 教授, 博士生导师. (miroyan@21cn.com)

1 线 性 化

当无微扰时 (= 0), 方程(4) 有如下单孤子解

$$u(x,t) = \sqrt{6}\tanh \frac{1}{\sqrt{2(\ ^2-1)}}(x+\ t+c), \tag{5}$$

方程(4) 满足如下初始条件:

$$u(x,0) = \sqrt{6}\tanh \frac{1}{\sqrt{2(\ ^2-1)}}(x+\ c),$$

$$u_t(x,0) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\ ^2-1}}\operatorname{sech}^2 \frac{1}{\sqrt{2(\ ^2-1)}}(x+\ c) \tag{6}$$

为将方程(4) 线性化, 按文献[4]、[5] 的做法, 首先引进多重尺度时间慢变量 $t_n = \ ^n t$, $n = 1, 2,$, 则对 t 的偏导数必须换成

$$_t = \ _t + \ _{t_1} + \ , \tag{7}$$

同时, 将 u 和 $R[u]$ 做渐近展开

$$u = u^{(0)} + \ u^{(1)} + \ , \tag{8}$$

$$R[u] = R[u^{(0)}] + \ R^{(1)}[u^{(0)}, u^{(0)}] + \tag{9}$$

将(7) ~ (9) 代入方程(4) 后, 比较 各次幂系数, 即得各级近似方程:

$$u_{tt}^{(0)} - u_{xx}^{(0)} + u^{(0)} - \frac{1}{6}(u^{(0)})^3 = 0, \tag{10}$$

$$u_{tt}^{(1)} - u_{xx}^{(1)} + u^{(1)} - \frac{1}{2}(u^{(0)})^2 u^{(1)} = R[u^{(0)}] - 2u_{tt_1}^{(0)}, \tag{11}$$

本文只研究零级和一级近似, 所以初条件(6) 相应地变为

$$\left.\begin{aligned} &u^{(0)}(x,0) = \sqrt{6}\tanh \frac{1}{\sqrt{2(\ ^2-1)}}(x+\ c), \\ &u_t^{(0)}(x,0) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\ ^2-1}}\operatorname{sech}^2 \frac{1}{\sqrt{2(\ ^2-1)}}(x+\ c), \\ &u^{(1)}(x,0) = 0,\quad u_t^{(1)}(x,0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

零级近似方程(10) 是标准的非线性 Klein_Gordon 方程, 它有如(5) 式的单孤子解

$$u^{(0)}(x,t) = \sqrt{6}\tanh z,\quad z = \ (x - \ ),\quad = \frac{1}{\sqrt{2(\ ^2-1)}},\quad _t = - \tag{13}$$

由于微扰, (13) 式中孤子参数 和 将随时间慢变量缓慢变化 与 t 无关, 而 对 t 的依赖关系由(13) 式中最后一式决定 由方程(13) 可得

$$u_{tt_1}^{(0)} = \sqrt{6}\ \ _{t_1}[\operatorname{sech}^2 z - 2z\operatorname{sech}^2 z\tanh z] + 2\sqrt{6}\ ^2\ _{t_1}\operatorname{sech}^2 z\tanh z \tag{14}$$

引进 z 为新的空间变量(与孤子一起运动的坐标参照系), 方程(11) 可重写为:

$$u_{tt}^{(1)} + 2\ u_{tz}^{(1)} + \frac{1}{2}\hat{L}u^{(1)} = F(z,t), \tag{15}$$

式中:

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dz^2} + 6\operatorname{sech}^2 z - 4,\quad F(z,t) = R[u^{(0)}] - 2u_{tt_1}^{(0)}, \tag{16}$$

初条件变为:

$$u^{(1)}(z,0) = u_t^{(1)}(z,0) = 0 \tag{17}$$

对方程(15)作拉氏变换可得

$$p^2 u + 2 \quad p u_z + \frac{1}{2}\hat{L} u = F(z,p), \tag{18}$$

式中 p 为一复变量, $u(z,p)$ 和 $F(z,p)$ 分别为 $u^{(1)}(z,t)$ 和 $F(z,t)$ 的像

作一函数变换

$$u = e^{-2 \quad pz} v, \tag{19}$$

我们可得

$$-2 \quad {}^2 p^2 v + \frac{1}{2}\hat{L} v = F(z,p)e^{2 \quad pz} \tag{20}$$

2 本征值问题

为了求解方程(20),我们需求解如下的本征值问题:

$$\hat{L} \quad = \tag{21}$$

利用文献[4]附录 A 的方法可以求得 $\hat{L}$ 的本征函数系如下:

$$(z,k) = \frac{e^{ikz}}{\sqrt{2 \quad (k^4 + 5k^2 + 4)}}[k^2 + 1 + 3ik\tanh z - 3\tanh^2 z],$$

$$= -(k^2 + 4) \qquad - \quad < k < \quad , \tag{22}$$

$$_1(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sech}^2 z \qquad = 0, \tag{23}$$

$$_2(z) = \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{sech}z\tanh z \qquad = -3, \tag{24}$$

它们构成一个正交完备化的基矢 $\{ \quad \} = \{ \quad (z,k), \quad _j(z); j = 1, 2\}$

( ) 正交性

$$_- \quad (z,k) \quad ^*(z,k \,)\mathrm{d}z = \quad (k - k \,), \tag{25}$$

$$_- \quad (z,k) \quad _j(z)\mathrm{d}z = 0 \qquad j = 1, 2, \tag{26}$$

$$_- \quad _j(z) \quad _l(z)\mathrm{d}z = \quad _{jl} \qquad j, l = 1, 2 \tag{27}$$

( ) 完备性

$$p \quad _- \quad (z,k) \quad ^*(z \,, k)\mathrm{d}k + \sum_{j=1}^{2} \quad _j(z) \quad _j(z \,) = \quad (z - z \,) \tag{28}$$

3 微扰对孤子的影响

现在求解方程(20),将 v 按基矢 $\{ \quad \}$ 展开

$$v(z,p) = \quad _- \mathrm{d}k \quad (k,p) \quad (z,k) + \quad _1(p) \quad _1(z) + \quad _2(p) \quad _2(z) \tag{29}$$

将(29)代入方程(20),并利用正交性得

$$(k,p) = -\frac{2}{4 \quad {}^2 p^2 + (k^2 + 4)} \quad _- \quad \mathrm{d}z\, F(z \,, p)e^{2 \quad pz} \quad ^*(z \,, k), \tag{30}$$

$$_1(p) = -\frac{1}{2 \quad {}^2 p^2} \quad _- \quad \mathrm{d}z\, F(z \,, p)e^{2 \quad pz} \quad _1(z \,), \tag{31}$$

$$_2(p) = -\frac{2}{4 \quad {}^2 p^2 + 3} \quad _- \quad \mathrm{d}z\, F(z \,, p)e^{2 \quad pz} \quad _2(z \,), \tag{32}$$

将(30)～(32)代入(29)，利用(19)得:

$$u(z,p)=-\ _{-}\ \frac{2\mathrm{d}k}{4\ ^{2}p^{2}+(k^{2}+4)}\ _{-}\ \mathrm{d}z\ F(z\ ,p)\mathrm{e}^{-2\ \ p(z-z\ )}\ ^{*}(z\ ,k)\ \ (z,k)-$$

$$\frac{1}{2\ ^{2}p^{2}}\ _{-}^{+}\ \mathrm{d}z\ F(z\ ,p)\ \mathrm{e}^{-2\ \ p(z-z\ )}\ \ _{1}(z\ )\ \ _{1}(z)-$$

$$\frac{2}{4\ ^{2}p^{2}+3}\ _{-}^{+}\ \mathrm{d}z\ F(z\ ,p)\ \mathrm{e}^{-2\ \ p(z-z\ )}\ \ _{2}(z\ )\ \ _{2}(z) \tag{33}$$

对(33)作拉氏逆变换得

$$u^{(1)}(z,t)=-\ _{-}\ \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{k^{2}+4}}\ _{-}\ \mathrm{d}z\ \ _{0}^{t}\mathrm{d}\ \ \mathrm{H}(\ \ )\sin\frac{\sqrt{k^{2}+4}}{2}F(z\ ,\ \ )\ ^{*}(z\ ,k)\ \ (z,k)-$$

$$\frac{1}{2\ ^{2}}\ _{-}^{+}\ \mathrm{d}z\ \ _{0}^{t}\mathrm{d}\ \ \mathrm{H}(\ \ )\ F(z\ ,\ \ )\ \ _{1}(z\ )\ \ _{1}(z)-$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ _{-}^{+}\ \mathrm{d}z\ \ _{0}^{t}\mathrm{d}\ \ \mathrm{H}(\ \ )\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ F(z\ ,\ \ )\ \ _{2}(z\ )\ \ _{2}(z), \tag{34}$$

其中

$$=t-\ \ -2\ \ (z-z\ ), \tag{35}$$

$\mathrm{H}(\ \ )$是一个阶跃函数

$$\mathrm{H}(\ \ )=\begin{cases}1 & 当\ \ >0,\\ 0 & 当\ \ <0\end{cases} \tag{36}$$

特例，如果在随孤子运动的坐标系中微扰不含时微扰，即 $F(z,t)=F(z)$，那么(34)可重写为:

$$u^{(1)}(z,t)=-\ _{-}\ \frac{2\mathrm{d}k}{k^{2}+4}\ _{-}\ \mathrm{d}z\ F(z\ )\left\{1-\cos\frac{\sqrt{k^{2}+4}}{2}[t-2\ \ (z-z\ )]\right\}$$

$$^{*}(z\ ,k)\ \ (z,k)-\frac{1}{2\ ^{2}}\ _{-}\ \mathrm{d}z\ F(z\ )\ \frac{[t-2\ \ (z-z\ )]^{2}}{2}\ \ _{1}(z\ )\ \ (z)-$$

$$\frac{2}{3}\ _{-}\ \mathrm{d}z\ F(z\ )\left\{1-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}[t-2\ \ (z-z\ )]\right\}\ \ _{2}(z\ )\ \ _{2}(z) \tag{37}$$

显然，(37)式右边第二项是久期项，消去此项的条件为:

$$_{-}\ \mathrm{d}zF(z)\ \ _{1}(z)=0,\qquad _{-}\ \mathrm{d}zF(z)z\ \ _{1}(z)=0 \tag{38}$$

将(18)代入方程(38)，运用(14)和(23)式，我们可以获得如下的孤子参数变化

$$_{t_{1}}=\frac{\sqrt{6}}{8}\ _{-}\ \mathrm{d}zR[u^{(0)}]\ \mathrm{sech}^{2}z, \tag{39}$$

$$_{t_{1}}=\frac{\sqrt{6}}{8\ ^{2}}\ _{-}\ \mathrm{d}zR[u^{(0)}]z\,\mathrm{sech}^{2}z \tag{40}$$

利用方程(38)，我们可获得一级修正为

$$u^{(1)}(z,t)=-\ _{-}\ \frac{2\mathrm{d}k}{k^{2}+4}\ _{-}\ \mathrm{d}z\ F(z\ )\left\{1-\cos\frac{\sqrt{k^{2}+4}}{2}[t-2\ \ (z-z\ )]\right\}$$

$$^{*}(z\ ,k)\ \ (z,k)-\ \ ^{2}\ _{-}^{+}\ \mathrm{d}z\ F(z\ )(z\ )^{2}\ \ _{1}(z\ )\ \ _{1}(z)-$$

$$\frac{2}{3}\ _{-}^{+}\ \mathrm{d}z\ F(z\ )\left\{1-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}[t-2\ \ (z-z\ )]\right\}\ \ _{2}(z\ )\ \ _{2}(z) \tag{41}$$

(41)式的格林函数形式如下:

$$u^{(1)}(z, t) = \int_{-}\mathrm{d}z\ F(z)G(z, t; z), \tag{42}$$

式中

$$G(z, t; z) = -\int_{-}\frac{2\mathrm{d}k}{k^2+4}\left\{1-\cos\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}[t-2\ (z-z)]\right\}$$
$$^{*}(z, k)\ (z, k)-\ ^2(z)^2\ _1(z)\ _1(z)-$$
$$\frac{2}{3}\left\{1-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}[t-2\ (z-z)]\right\}\ _2(z) <_2(z)\# \tag{42c}$$

[参 考 文 献]

[1] Dodd R K, Eilbeck J C, Gibbon J D, et al. Solitons and Nonlinear Wave Equations[M]. London: Academic, 1982.

[2] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering[M]. England: Cambridge University Press, 1991.

[3] 范恩贵,张鸿庆. 非线性波动方程的孤波解[J]. 物理学报,1997,46(7):1254) 1258.

[4] YAN Jia_ren, TANG Yi. Direct approach to the study of soliton perturbations[J]. Phys Rev E, 1996, 54(6):6816) 6824.

[5] YAN Jia_ren, TANG Yi, ZHOU Guang_hui. Direct approach to the study of soliton perturbation of the nonlinear Schrodinger equation and the sine_Gordon equation[J]. Phys Rev E, 1998, 58(1): 1064) 1073.

[6] YAN Jia_ren, TANG Yi, ZHOU Guang_hui. Perturbation theory for nonlinear Klein_Gordon kinks[J]. Commun Theoret Phys, 1999, 32(3): 375) 380.

Perturbation Theory for Nonlinear Klein_Gordon Equation

LIU Tian_gui, YAN Jia_ren

(Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081, P R China)

Abstract: The effects of perturbations on a nonlinear Klein_Gordon the soliton to the first_order approximation are obtained, namely, the soliton parameters changing slowly with time, and the concrete expression of the first_order correction are got.

Key words: soliton perturbation; soliton parameter; nonlinear Klein_Gordon soliton