文章编号: 1000_0887(2002) 08_0871_06

双曲极限环在周期扰动下次调和解的分支*

韩茂安, 顾圣士

(上海交通大学 数学系, 上海 200030)

(鲁传敬推荐)

摘要: 研究了一给定平面自治系统的双曲极限环在周期扰动下 m 阶次调和解的分支问题, 用 Poincaré 映射, 通过变尺度方法, 获得了判别 m 阶次调和解的存在条件, 最后给出了一个实例.

关 键 词: 极限环; 次调和解; 分支
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

考虑平面周期扰动系统

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon, \delta) \qquad x \in \mathbf{R}^2, \tag{1}$$

其中 $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\delta \in D \subset \mathbf{R}^n$, D 为紧集, f、g 为 C^3 函数且 g 关于 t 为 T 周期的, $T > 0$. 设当 $\varepsilon = 0$ 时(1) 有一个极限环 $L_0: x = u(t), 0 \leqslant t \leqslant T_0$, 其中 T_0 为 L_0 的周期. 现设 T_0/T 为有理数, 即

$$T_0/T = m/k \qquad (m, k) = 1. \tag{2}$$

我们知道方程(1) 的相空间为 $S^1 \times \mathbf{R}^2$, 由上述假设知当 $\varepsilon = 0$ 时(1) 有不变环面 $S^1 \times L_0$, 且该环面由周期为 $mT = kT_0$ 的闭轨族

$$L_\theta^* = \{(t, u(t+\theta)) : 0 \leqslant t \leqslant mT\} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant T_0$$

组成. 我们的问题是研究环面上这族闭轨在小扰动下何时产生(1) 的 m 阶次调和解(当 $m > 1$ 时) 或调和解(当 $m = 1$ 时). 如果 L_0 是一非双曲的半稳定环, 这一问题已在文[1] 中给出详细论证. 本文将设 L_0 为双曲极限环, 即

$$I_0 \equiv \frac{1}{T_0}\oint_{L_0} \operatorname{tr} f_x \, dt \neq 0. \tag{3}$$

首先, 由[2, 3] 知成立下述引理.

引理 1 变换

$$x = u(\theta) - Jv(\theta)h, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v(\theta) = \frac{f(u(\theta))}{|f(u(\theta))|}$$

把方程(1) 化为柱面周期系统

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 + S_1(\theta)h + \varepsilon E(\theta)g_0(t, \theta, \delta) + O(|h, \varepsilon|^2), \\ \dot{h} = A(\theta)h + \varepsilon v^{\mathrm{T}}(\theta)Jg_0(t, \theta, \delta) + O(|h, \varepsilon|^2), \end{cases} \tag{4}$$

---

* 收稿日期: 2000_11_25; 修订日期: 2002_03_26
作者简介: 韩茂安(1961—), 男, 山东荷泽人, 教授, 博士, 博士生导师.

其中

$$\begin{cases} A(\theta) = \operatorname{tr} f_x(u(\theta)) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f(u(\theta))|, \\ g_0(t,\theta,\delta) = g(t,u(\theta),0,\delta_0), \\ E(\theta) = |f(u(\theta))|^{-1}v^{\mathrm{T}}(\theta), \\ S_1(\theta) = E(\theta)[Jv'(\theta) - f_x(u(\theta))Jv(\theta)]. \end{cases} \tag{5}$$

注意到方程(4)的右端函数关于 θ 为 T_0 周期的, 而关于 t 为 T 周期的. 下面利用Poincar映射的方法来寻求(4)的 mT 周期解, 为此, 先对(4)作尺度变换 $h = \varepsilon r$, 得到下列方程

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 + \varepsilon[S_1(\theta)r + E(\theta)g_0(t,\theta,\delta) + O(\varepsilon^2)], \\ \dot{r} = A(\theta)r + v^{\mathrm{T}}(\theta)Jg_0(t,\theta,\delta) + O(\varepsilon). \end{cases} \tag{6}$$

设(6)当 $t = 0$ 时以 (θ_0, r_0) 为初值的解为

$$\theta(t,\theta_0,r_0) = \theta_0 + t + \varepsilon\theta_1(t,\theta_0,r_0) + O(\varepsilon^2),$$

$$r(t,\theta_0,r_0) = r_1(t,\theta_0,r_0) + O(\varepsilon),$$

其中 $\theta_1(0,\theta_0,r_0) = 0$, $r_1(0,\theta_0,r_0) = r_0$, 将上列式子代入(6)式可得

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = S_1(\theta_0+t)r_1(t,\theta_0,r_0) + E(\theta_0+t)g_0(t,\theta_0+t,\delta), \\ \dot{r}_1 = A(\theta_0+t)r_1 + v^{\mathrm{T}}(\theta_0+t)Jg_0(t,\theta_0+t,\delta). \end{cases} \tag{7}$$

由(5)第一式有

$$\exp\int_0^t A(\theta_0+s)\,\mathrm{d}s = \frac{|f(u(\theta_0))|}{|f(u(\theta_0+t))|}\exp\int_0^t \operatorname{tr} f_x(u(\theta_0+s))\,\mathrm{d}s,$$

由(7)可解得

$$\begin{cases} r_1(t,\theta_0,r_0) = \dfrac{1}{|f(u(\theta_0+t))|}[|f(u(\theta_0))|r_0 + \\ \qquad R(t,\theta_0)]\exp\displaystyle\int_0^t \operatorname{tr} f_x(u(\theta_0+s))\,\mathrm{d}s, \\ \theta_1(t,\theta_0,r_0) = \displaystyle\int_0^t [S_1(\theta_0+s)r_1(s,\theta_0,r_0) + \\ \qquad E(\theta_0+s)g_0(s,\theta+s_0,\delta)]\,\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{8}$$

其中

$$R(t,\theta_0) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \operatorname{tr} f_x(u(\theta_0+z))\mathrm{d}z} f(u(\theta_0+s)) \wedge g(s,u(\theta_0+s),0,\delta)\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

设(6)的Poincar映射为 $P(\theta_0,r_0,\varepsilon,\delta)$, 则其 m 次复合为

$$\begin{aligned} P^m(\theta_0,r_0,\varepsilon,\delta) &= (\theta(mT,\theta_0,r_0),\, r(mT,\theta_0,r_0))^{\mathrm{T}} = \\ &\quad (P_1^m(\theta_0,r_0,\varepsilon,\delta),\, P_2^m(\theta_0,r_0,\varepsilon,\delta))^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{10}$$

由(8)第一式知

$$P_2^m(\theta_0,r_0,\varepsilon,\delta) - r_0 = (N_0-1)r_0 + \frac{N_0R(mT,\theta_0)}{|f(u(\theta_0))|} + O(\varepsilon),$$

其中 $N_0 = \mathrm{e}^{kT_0I_0}$. 因为 $I_0 \neq 0$, 由隐函数定理知方程 $P_2^m(\theta_0,r_0,\varepsilon,\delta) - r_0 = 0$ 有根

$$r_0 = \frac{N_0R(mT,\theta_0)}{(1-N_0)|f(u(\theta_0))|} + O(\varepsilon) \equiv r_0^*(\theta_0,\varepsilon).$$

代入到(8)第二式可得

$$\theta_1(mT,\theta_0,r_0^*)|_{\varepsilon=0} = \int_0^{mT}[S_1(\theta_0+t)r_1(t,\theta_0,r_0^*(\theta_0,0)) +$$

$$E(\theta_0+t)g(t,u(\theta_0+t),0,\delta)]\mathrm{d}t.$$

由引理1中 $v(\theta)$ 的定义易证

$$v'(\theta)=f_x(u(\theta))v(\theta)-[v^{\mathrm T}(\theta)f_x(u(\theta))v(\theta)]v(\theta),\quad v^{\mathrm T}(\theta)Jv(\theta)=0.$$

从而由(5)知

$$S_1(\theta)=|f(u(\theta))|^{-1}v^{\mathrm T}(\theta)[Jf_x(u(\theta))-f_x(u(\theta))J]v(\theta)=$$
$$|f(u(\theta))|V(\theta),$$

其中

$$V(\theta)=\frac{1}{|f(u(\theta))|^4}f^{\mathrm T}(u(\theta))[Jf_x(u(\theta))-f_x(u(\theta))J]f(u(\theta)).\tag{11}$$

又由(8)第一式知

$$r_1(t,\theta_0,r_0^*(\theta_0,0))=|f(u(\theta_0+t))|^{-1}Q(t,\theta_0),$$

其中

$$Q(t,\theta_0)=\left[\frac{N_0R(mT,\theta_0)}{1-N_0}+R(t,\theta_0)\right]\exp\int_0^t\mathrm{tr}f_x(u(\theta_0+s))\mathrm{d}s.\tag{12}$$

于是

$$\theta_1(mT,\theta_0,r_0^*)|_{\varepsilon=0}=\int_0^{mT}[V(\theta_0+t)Q(t,\theta_0)+K(t,\theta_0)]\mathrm{d}t\equiv W(\theta_0,\delta),\tag{13}$$

其中

$$K(t,\theta_0)=|f(u(\theta_0+t))|^{-2}f^{\mathrm T}(u(\theta_0+t))g(t,u(\theta_0+t),0,\delta).\tag{14}$$

从而由(10)可得

$$P_1^m(\theta_0,r_0^*,\varepsilon,\delta)=\theta_0+mT+\varepsilon[W(\theta_0,\delta)+O(\varepsilon)].\tag{15}$$

易知由(10)给出的映射 P^m 关于 (θ_0,r_0) 的不动点的个数与上述映射关于 θ_0 的不动点的个数一致. 利用(15)可证下述主要结果.

定理1 设(2)与(3)成立.

(i) 若对一切 $\theta_0\in[0,T_0)$, $\delta\in D$ 有 $W(\theta_0,\delta)\neq0$, 则当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时方程(1)在 L_0 的邻域内没有 m 阶次调和解.

(ii) 设存在 $\theta_0\in[0,T_0)$, $\delta\in D$ 使

$$W(\theta_0,\delta)=0,\quad W_{\theta_0}(\theta_0,\delta)\neq0,\tag{16}$$

则当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时方程(1)存在 m 阶次调和解.

(iii) 如果存在 $\theta_0\in[0,T_0)$, $\delta\in D\subset\mathbf{R}$ 使

$$W(\theta_0,\delta_0)=W_{\theta_0}(\theta_0,\delta_0)=0,\quad W_{\theta_0\theta_0}(\theta_0,\delta_0)\neq0,\quad W_\delta(\theta_0,\delta_0)\neq0,\tag{17}$$

则方程(1)存在 m 阶次调和解的鞍结点分支曲线 $\delta=\delta(\varepsilon)=\delta_0+O(\varepsilon)$, 使当 $W_\delta(\theta_0,\delta_0)W_{\theta_0\theta_0}(\theta_0,\delta_0)(\delta-\delta_0)<0(=0,>0)$ 时, 方程在 $u(\theta_0,t)$ 的邻域内有两个(一个, 没有)m 阶次调和解.

证明 若对一切 $\theta_0\in[0,T_0)$, $\delta\in D$ 有 $W(\theta_0,\delta)\neq0$, 则由(15)知当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时 $P_1^m(\theta_0,r_0^*,\varepsilon,\delta)$ 没有不动点(在模 mT 意义下), 从而由(10)知 P^m 关于 (θ_0,r_0) 没有不动点, 这说明方程(6)没有 m 阶次调和解, 从而方程(1)也如此. 结论(i)得证.

为证结论(ii), 设(16)成立. 由(15)及隐函数定理知 $P_1^m(\theta_0,r_0^*,\varepsilon,\delta)$ 有不动点 $\theta_0^*(\varepsilon)=\theta_0+O(\varepsilon)$(在模 mT 意义下), 从而映射 P^m 有不动点 $(\theta_0^*,r_0^*(\theta_0^*,\varepsilon))=(\theta_0,r_0)+O(\varepsilon)$, 其中 $r_0=r_0^*(\theta_0^*,\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$. 方程(6)以此不动点为初值的解为

$$\theta^*(t,\varepsilon)=\theta_0+t+O(\varepsilon),\quad r^*(t,\varepsilon)=r_0+t+O(\varepsilon),$$

方程(4)相应的解为 $(\theta^*(t,\varepsilon),\varepsilon r^*(t,\varepsilon))$, 故方程(1)相应的解为 $x^*(t,\varepsilon)=u(\theta_0+t)+O(\varepsilon)$. 结论(ii)得证.

再证结论(iii)• 设(17)成立，为确定计设 $W_{\theta_0\theta_0}(\theta_0, \delta_0) < 0$，则 $\theta_0 = \theta_0$ 为函数 $W(\theta_0, \delta_0)$ 的极大值点• 将(15)右端方括号内的部分记为 $W^*(\theta_0, \varepsilon, \delta)$，由(17)及隐函数定理在 θ_0 附近在唯一的点 $\theta_0 = \theta_0(\varepsilon, \delta) = \theta_0 + O(|\varepsilon| + |\delta - \delta_0|)$ 使

$$W^*_{\theta_0}(\theta_0, \varepsilon, \delta) = 0, \quad W^*_{\theta_0\theta_0}(\theta_0, \varepsilon, \delta) < 0,$$

即 $\theta_0(\varepsilon, \delta)$ 为 W^* 的极大值点• 从而若令 $a(\varepsilon, \delta) = W^*(\theta_0(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta)$，则当 $a(\varepsilon, \delta) < 0 (= 0, > 0)$ 时函数 W^* 关于 θ_0 无根(有唯一二重根，有两个单根)• 因此在 (ε, δ) 平面上点 $(0, \delta_0)$ 附近由 $a(\varepsilon, \delta) = 0$ 给出的曲线即为方程(1)的 m 阶次调和解的鞍结点型分支曲线• 注意到

$$a(0, \delta_0) = 0, \quad a_\delta(0, \delta_0) = W_\delta(\theta_0, \delta_0) \neq 0,$$

可知存在唯一函数 $\delta(\varepsilon) = \delta_0 + O(\varepsilon)$，使 $a(\varepsilon, \delta) \geqslant 0$ 当且仅当 $W_\delta(\theta_0, \delta_0)(\delta - \delta_0) \geqslant 0$• 于是结论(iii)得证• 证毕•

关于定理 1 我们有下述说明•

注 1 因为方程(6)关于 θ 为 T_0 周期的，因此若 $W(\theta_0, \delta)$ 在 $[0, T_0)$ 中关于 θ_0 恰好有 N 个单根，则当 $|\varepsilon|$ 充分小时方程(1)在 L_0 的邻域内恰有 N 个(不同的) m 阶次调和解• 同理，若对同一个 $\delta_0 \in D$，$W(\theta_0, \delta_0)$ 在 $[0, T_0)$ 中恰好有 M 个 θ_0 使(17)成立，则(1)也恰好有 M 个鞍结点分支值(重数计算在内)，使出现 M 个鞍结型周期解•

注 2 由于 L_0 为双曲极限环，利用积分流形理论可证当 $|\varepsilon|$ 充分小时方程(1)在 $S^1 \times L_0$ 附近有双曲的不变环面• 且当 $I_0 < 0 (> 0)$ 时该环面为吸引的(排斥的)，因此上述定理中 m 阶次调和解在(1)的相空间所对应的闭轨必位于这不变环面上，且 m 阶次调和解的鞍结点分支对应于不变环面上的半稳定环分支•

例 1 考虑

$$\begin{cases} \dot{x} = y/m + x(x^2 + y^2 - 1) + \varepsilon y[x^m \cos t + \delta], \\ \dot{y} = -x/m + y(x^2 + y^2 - 1) - \varepsilon x[x^m \cos t + \delta], \end{cases} \tag{18}$$

其中 m 为自然数• 当 $\varepsilon = 0$ 时(18)有双曲极限环

$$L_0: (x, y) = \left(\sin\frac{t}{m}, \cos\frac{t}{m}\right) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2m\pi = T_0•$$

由(18)的形式与(9)及(12)知 $Q(t, \theta_0) = 0$• 由(14)知

$$K(t, \theta_0) = m\left(\delta + \cos t\left[\sin\frac{\theta_0 + t}{m}\right]^m\right),$$

故由(13)知

$$W(\theta_0, \delta) = \int_0^{2m\pi} m\left(\delta + \cos t\left[\sin\frac{\theta_0 + t}{m}\right]^m\right)\mathrm{d}t =$$

$$m^2\left[2\delta\pi + \int_0^{2\pi}\cos(m\phi - \theta_0)\sin^m\phi\,\mathrm{d}\phi\right],$$

取 $m = 1$ 或 2 可知

$$W(\theta_0, \delta) = \begin{cases} \pi(2\delta + \sin\theta_0) & m = 1, \\ \pi(4\delta - \cos\theta_0) & m = 2• \end{cases}$$

因此，由定理 1 知，对 $m = 1$，存在两条鞍结点分支曲线

$$\delta = \delta_i(\varepsilon) = \frac{1}{2}(-1)^i + O(\varepsilon) \qquad (i = 1, 2),$$

使当 $\delta_1(\varepsilon) < \delta < \delta_2(\varepsilon)$ 时方程(18)有两个调和解，当 $\delta = \delta_i(\varepsilon)(i = 1$ 或 $2)$ 时有鞍结点型

退化调和解, 当 $\delta < \delta_1(\varepsilon)$ 或 $\delta > \delta_2(\varepsilon)$ 时没有调和解. 这一分支过程在(18)的不变环面上可描述如下: 当 $\delta < \delta_1(\varepsilon)$ 时环面上无闭轨, 当 $\delta = \delta_1(\varepsilon)$ 时出现一半稳定极限环, 当 δ 从 $\delta_1(\varepsilon)$ 增加时半稳定环已分裂为两个极限环, 当 δ 增加至 $\delta_2(\varepsilon)$ 时此两环(在另一位置)又合并成新的半稳定环, 当 $\delta > \delta_2(\varepsilon)$ 时新半稳定环消失, 环面上不再有任何闭轨. 我们看到当 δ 取遍闭区间 $[\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)]$ 上所有值时极限环扫过了整个环面.

对 $m = 2$, 由注 1 知存在 4 条鞍结点分支曲线

$$\delta = \delta_{ij}(\varepsilon) = \frac{1}{4}(-1)^i + O(\varepsilon) \qquad (i, j = 1, 2),$$

相应的鞍结点型 2 阶次调和解为

$$u_{i,j}(t, \varepsilon) = \left(\sin\frac{\theta_{i,j}}{2}, \cos\frac{\theta_{i,j}}{2}\right) + O(\varepsilon),$$

$$\theta_{1,j}(t, \varepsilon) = (2 + (-1)^j)\pi, \quad \theta_{2,j}(t, \varepsilon) = (1 + (-1)^j)\pi.$$

因此 $\theta_{i,2} - \theta_{i,1} = 2\pi$, $i = 1, 2$, 从而

$$\left(\sin\frac{\theta_{i1}}{2}, \cos\frac{\theta_{i1}}{2}\right) = -\left(\sin\frac{\theta_{i2}}{2}, \cos\frac{\theta_{i2}}{2}\right) \qquad (i = 1, 2).$$

注意到(18)关于原点对称, 故必有 $u_{i1}(t, \varepsilon) = -u_{i2}(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2$. 这说明

$$\delta_{i1}(\varepsilon) = \delta_{i2}(\varepsilon) \equiv \delta_i(\varepsilon) \qquad (i = 1, 2).$$

于是当 $\delta_1(\varepsilon) < \delta < \delta_2(\varepsilon)$ 时(18)有 4 个二阶次调和解, 当 $\delta < \delta_1(\varepsilon)$ 或 $\delta > \delta_2(\varepsilon)$ 时没有次调和解. 仿上不难给出在不变环面上与二阶次调和解对应的闭轨线的分支现象.

[参 考 文 献]

[1] HAN Mao_an. Periodic perturbations of planar systems with a semistable limit cycle[J]. Chin Sci Bull, 1997, **42**(2): 265—269.

[2] 韩茂安. 周期扰动系统不变环面和亚调和解的分支[J]. 中国科学(A 辑), 1994, **37**(11): 1152—1160.

[3] 韩茂安, 朱德明. 微分方程分支理论[M]. 第九章. 北京: 煤炭工业出版社, 1994.

Bifurcations of Subharmonic Solutions in Periodic Perturbation of a Hyperbolic Limit Cycle

HAN Mao_an, GU Sheng_shi

(Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China)

Abstract: Bifurcations of subharmonic solutions of order m of a planar periodic perturbed system near a hyperbolic limit cycle are discussed. By using a Poincar map and the method of rescaling a discriminating condition for the existence of subharmonic solutions of order m is obtained. An example is given in the end of the paper.

Key words: bifurcation; subharmonic solution; limit cycle