

文章编号: 1000-0887(2002) 08-0811-08

# 单侧接触问题的拟有效集方法<sup>\*</sup>

宣兆成<sup>1</sup>, 李兴斯<sup>2</sup>

(1. 大连理工大学 机械工程学院, 大连 116024; 2. 大连理工大学 工程力学研究所, 大连 116024)

(钟万勰推荐)

**摘要:** 单侧接触问题可以模型化为一个带不等式约束的数学规划问题。针对不等式约束问题求解的困难, 提出了一个拟有效集方法。在每次迭代中, 先利用上次迭代得到的解将问题转化为一个无接触问题, 然后以其解作为当前迭代的初始解, 且在每次迭代里可以同时更换一组接触点对, 而不是象 Lemke 方法那样每次迭代仅更换一个接触点对。因而, 该算法极大地提高了求解效率, 算例表明了该算法的高效性和可靠性。

**关键词:** 单侧接触问题; 数学规划; 拟有效集

**中图分类号:** O175.2      **文献标识码:** A

## 引 言

在一些工程结构中, 经常有只能传递某一特定形式应力的部件或结构, 如用来传递拉伸应力的缆索部件以及用来传递压应力的接触部件。由于传递的力具有单向性, 因而一般将这类问题称为单侧问题。在这些结构里, 边界力和几何约束以不等式的形式给出, 从本质上说, 它是非线性的, 即使在线弹性及小变形的情况下也是如此。一般的情况下, 单侧问题的特点表现为外力的变化并不能使其它变量按比例变化, 因此迭加方法并不适用。

传统的解析解法受到理想化的模型以及不等式约束相对简单的限制, 现在一般用数值方法来解决此类问题, 如用有限元方法已经解决了许多实际问题。常用的分析静态接触问题的“试验\_误差”方法是通过假设接触区域而迭代求解。然而, 在接触区上接触条件复杂的情况下这种方法的收敛性不能得到保证<sup>[1]</sup>。

一般情况下(无接触)弹性体的平衡态是其势能泛函的极小值, 而当弹性体在变形的过程中同一不动的刚体产生无摩擦接触时, 求解这个问题可表示为一个有约束的极小化问题, 而且这个极小化问题的最优性条件由力的平衡方程和一个互补接触条件所组成。在线弹性和小变形的假设条件下, 一般都是通过有限元离散而导致一个数学规划问题<sup>[2~4]</sup>。本文提出了求解这些优化问题的拟有效集方法, 这种方法的理论性方面已得到证明<sup>[5]</sup>。在应用到求解接触问题时, 其特点在于: 1) 无接触存在时结构的解作为初始解, 通过计算由这个解来判断那些可能接触点对会产生接触; 2) 每次迭代参与运算的约束数目最多可同全部约束数目一样多。

\* 收稿日期: 2000\_03\_09; 修订日期: 2002\_04\_01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59775065)

作者简介: 宣兆成(1966—), 男, 黑龙江人, 博士(E-mail: smaxzc@nus.edu.sg).

# 1 单侧接触问题

设单侧接触问题中的弹性接触体表面的方程为

$$x_3 = \Phi(x_1, x_2),$$

其边界是由位移边界  $\Gamma_v$ 、外力边界  $\Gamma_t$  和接触边界  $\Gamma_c$  三部分所组成。该接触体所受的体力为  $f$ ，在位移边界  $\Gamma_v$  上的位移  $v = \mathbf{0}$ ，边界  $\Gamma_t$  上所受的力为  $t$ 。边界  $\Gamma_c$  上的点将可能同某一刚体约束发生接触，刚体表面用如下方程表达

$$x_3 = \Psi(x_1, x_2),$$

其单位法线方程为

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = \frac{(\partial \Psi / \partial x_1) \mathbf{i}_1 + (\partial \Psi / \partial x_2) \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3}{\sqrt{(\partial \Psi / \partial x_1)^2 + (\partial \Psi / \partial x_2)^2 + 1}} \quad (1)$$

弹性体同刚体之间的初始距离用  $g$  表示

$$g = \frac{n_3(\Psi - \Phi)}{\sqrt{(\partial \Psi / \partial x_1)^2 + (\partial \Psi / \partial x_2)^2 + 1}} \quad (2)$$

在小变形假设的条件下，我们要求解如下边值问题：

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + f &= \mathbf{0} \\ \sigma &= \mathbf{D} \varepsilon(v) \end{aligned} \right\} \quad \Omega \text{ 中}, \quad (3)$$

$$\sigma \mathbf{n} = t \quad \Gamma_t \text{ 上}, \quad (4)$$

$$v = \mathbf{0} \quad \Gamma_v \text{ 上}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} v \cdot \mathbf{n} - g &\leq 0 \\ \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &\leq 0 \\ \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} (v \cdot \mathbf{n} - g) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \Gamma_c \text{ 上}, \quad (6)$$

其中  $\mathbf{D}$  为 4 阶线弹性对称正定张量，上面的方程分别为力的平衡方程、应力应变关系、力和位移的边界条件、接触面上的非穿透互补条件。可以证明上述边值问题的解满足如下变分不等式<sup>[3]</sup>

$$v \in V: \int_{\Omega} \mathbf{D} \varepsilon(v) \cdot \varepsilon(w - v) d\Omega \geq \int_{\Omega} f \cdot (w - v) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot (w - v) d\Gamma \quad \forall w \in V, \quad (7)$$

其中

$$V = \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = \mathbf{0} \text{ 在 } \Gamma_v \text{ 上}, w \cdot \mathbf{n} - g \leq 0 \text{ 在 } \Gamma_c \text{ 上} \right\}, \quad (8)$$

$H^1(\Omega)$  为 1 阶导数平方可积的 Hilbert 空间。在充分光滑的条件下，(7) 的解亦是边值问题(3) ~ (6) 的解。求解问题(7) 等价于求解如下的极值问题<sup>[3]</sup>

$$\Pi(v) = \min_{w \in V} \Pi(w), \quad (9)$$

其中

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{D} \varepsilon(w) \cdot \varepsilon(w) d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot w d\Omega - \int_{\Gamma_t} t \cdot w d\Gamma. \quad (10)$$

有限元离散后的问题(9) 变为如下数学规划问题

$$\min_{u \in U} \Pi(u), \quad (11)$$

上式中

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} u^T K u - p^T u, \quad U = \left\{ u \in \mathbf{R}^n \mid A u - g \leq \mathbf{0} \right\}, \quad (12)$$

$K \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为对称正定的刚度阵,  $p \in \mathbf{R}^n$  是体力和外力离散得到的力向量,  $A \in \mathbf{R}^{nc \times n}$  为运动变换阵,  $nc$  为可能接触节点数,  $g \in \mathbf{R}^{nc}$  是可能接触点与刚体之间的初始间隙。

两弹性体接触问题同上面所提的弹性体同刚体的接触问题的区别不是本质的, 只是约束条件稍微复杂一些, 最后的表达形式完全一样。如图 1 所示两二维弹性体  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  的接触, 边界分别为  $\Phi(x) = 0$  和  $\Psi(x) = 0$ 。接触点对  $i, i'$  之间的法向相对位移为

$$d_i = (u^{i'} - u^i) \sin \theta^i - (v^{i'} - v^i) \cos \theta^i.$$

我们假设有  $nc$  个这样的点对, 令  $d = (d_1, \dots, d_{nc})^T$  表示法向相对位移,  $g = (g_1, \dots, g_{nc})^T$  表示初始间隙向量。相对位移  $d_i$  同  $u$  的关系为

$$d_i = a_i u,$$

则非穿透条件  $d \leq g$  为

$$Au - g \leq 0, \tag{13}$$

其中  $A = (a_1^T, \dots, a_{nc}^T)^T$  为运动变换阵, 我们发现 (13) 式同 (12) 式的约束是完全一样的。

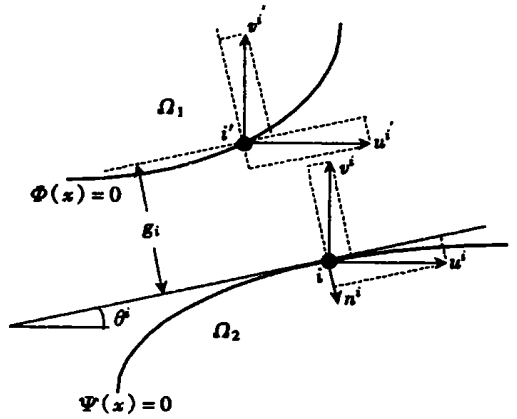


图 1 接触面之间的法向相对位移和切向相对位移

## 2 拟有效集方法

### 2.1 对偶问题

问题 (11) 的 Lagrange 对偶问题为

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{u \in \mathbf{R}^n} L(u, \lambda) = \pi(u) + \lambda^T (Au - g), \tag{14}$$

其中  $\lambda \in \mathbf{R}^{nc}$  为 Lagrange 乘子, 其力学意义为接触力向量, 这里  $\lambda \geq 0$  表示压力。如果我们把所有的约束  $Au - g \leq 0$  用其凸组合

$$\xi^T (Au - g) \leq 0 \tag{15}$$

来代替, 相当于将所有的约束转化为一个约束, 则有

$$\max_{\xi \in \Delta, \eta \geq 0} \min_{u \in \mathbf{R}^n} L(u, \xi, \eta) = \pi(u) + \eta \xi^T (Au - g), \tag{16}$$

显然

$$\eta = e^T \lambda, \quad \xi = \frac{\lambda}{e^T \lambda}$$

其中  $e = (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^{nc}$ ,  $\Delta = \left\{ \xi \in \mathbf{R}^{nc} \mid e^T \xi = 1, \xi \geq 0 \right\}$ ,  $\eta$  为总接触力, 即对应于约束 (15) 的接触力。显然, 有下式成立

$$\eta \xi^T (Au - g) = 0; \tag{17}$$

因为若  $\eta = 0$ , 则表示没有发生接触, 所以

$$\xi^T (Au - g) < 0; \tag{18}$$

若  $\eta > 0$ , 则表示有接触发生

$$\xi^T (Au - g) = 0; \tag{19}$$

因此有互补条件 (17) 式成立。对于上述两种情况, (18) 式表示无接触发生, 此时结构的解即为

$$\mathbf{u}^0 = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n} \Pi(\mathbf{u}) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \quad (20)$$

下面,我们求解(19)式成立情况下(有接触发生时)问题的解. 问题(16)对于  $\mathbf{u}$  的鞍点条件为

$$\nabla_{\mathbf{u}} L(\mathbf{u}, \xi, \eta) = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{p} + \eta \mathbf{A}^T \xi = \mathbf{0} \quad (21)$$

联立(19)和(21)式得

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{p} - \eta \mathbf{A}^T \xi), \quad (22)$$

$$\eta = \frac{\xi^T (\mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} - \mathbf{g})}{\xi^T \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^T \xi}. \quad (23)$$

带入问题(16)得

$$\max_{\xi \in \Delta, \eta \geq 0} s(\xi) = \frac{1}{2} \eta^2 \xi^T \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^T \xi - \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \quad (24)$$

这个问题即为原问题(11)的对偶问题.

## 2.2 对偶问题的解法

将问题(24)的目标函数在  $\xi^k$  处线性化, 则转化为如下的优化问题

$$\max_{\xi \in \Delta, \eta \geq 0} s(\xi) = s(\xi^k) + \xi^T \nabla s(\xi^k). \quad (25)$$

由(23)式可知, 只要

$$\mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} - \mathbf{g} > \mathbf{0}, \quad (26)$$

则一定有

$$\eta > 0.$$

由(20)式可知, (26)式即为

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^0 - \mathbf{g} > \mathbf{0}, \quad (27)$$

表示无接触解  $\mathbf{u}^0$  穿透了所有的约束. 在这种情况下问题(25)变为如下的线性规划问题

$$\max_{\xi \in \Delta} s(\xi) = s(\xi^k) + \xi^T \nabla s(\xi^k). \quad (28)$$

考虑问题(28)的约束的特殊性, 我们可以取

$$\xi^0 = \frac{1}{nc} \mathbf{e} \quad (29)$$

为迭代解的初值, 反复求解问题(28)直至收敛.

## 2.3 拟有效集策略

如果(27)式不成立, 那么我们可以利用  $\mathbf{u}^0$  在全部约束  $\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{g} \leq \mathbf{0}$  中来找到一组约束  $\mathbf{A}^0 \mathbf{u} - \mathbf{g}^0 \leq \mathbf{0}$ , 使得  $\mathbf{A}^0 \mathbf{u}^0 - \mathbf{g}^0 > \mathbf{0}$ , 且  $\mathbf{A}^0$  是行满秩的. 我们把这组约束称为  $\mathbf{u}^0$  点的拟有效约束, 用  $\text{QAS}(\mathbf{u}^0, \mathbf{A}^0, \mathbf{g}^0)$  这个记号表示这组不等式约束. 还要用到另一个记号是  $\text{VIO}(\mathbf{u}^k, \mathbf{A}^k, \mathbf{g}^k)$ , 它表示违反  $\mathbf{u}^k$  的所有约束, 显然有  $\text{QAS}(\mathbf{u}^k, \mathbf{A}^k, \mathbf{g}^k) \subseteq \text{VIO}(\mathbf{u}^k, \mathbf{A}^k, \mathbf{g}^k)$ . 这样我们在求解问题(11)时可以在第一步求解一个如下的优化子问题

$$\min_{\mathbf{u} \in U^0} \Pi(\mathbf{u}), \quad (30)$$

其中  $U^0 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{A}^0 \mathbf{u} - \mathbf{g}^0 \leq \mathbf{0}\}$ . 我们可以将这个问题转化为问题(28)来求解, 令得到的解为  $\mathbf{u}^1$ , 下一步我们就是以  $\mathbf{u}^1$  为起点寻求一个优化子问题并求得解  $\mathbf{u}^2$ . 这就需要构造一个以  $\mathbf{u}^1$  为无约束极小点(不存在接触时结构的解)的优化子问题, 这里贯穿于算法始终的思想是以无约束极小点  $\mathbf{u}^k$  为起点来求  $\text{QAS}(\mathbf{u}^k, \mathbf{A}^k, \mathbf{g}^k)$ . 而在问题(30)中  $\mathbf{u}^1$  不是无约束极小点, 因此必须利用下面的移点策略, 即把原目标函数的无约束极小点  $\mathbf{u}^0$  移到  $\mathbf{u}^1$ , 整个目标函数

也随之移动。这样的新的目标函数就以  $u^1$  为无约束极小点了。新的目标函数为

$$\pi^1(u) = \frac{1}{2}u^T Ku - (Ku^1)^T u, \tag{31}$$

在这种情况下, 显然结构的刚度阵并未变化, 而结构所受的力发生了变化, 为  $Ku^1$ , 它使得结构的解满足  $U^0$ 。在  $U^0$  以外的全部约束  $U \setminus U^0$  中找出  $QAS(u^1, A^1, g^1)$ , 则令相应的约束为  $U^1 = \{u \in \mathbf{R}^n \mid A^1 u - g^1 \leq 0\}$ , 构造如下的优化子问题

$$\min_{u \in U^1} \pi^1(u). \tag{32}$$

求得上述问题的解为  $u^2$ , 重复上述过程就得到了一个迭代点列  $u^0, u^1, \dots, u^k, \dots$ , 直到  $QAS(u^k, A^k, g^k)$  为空集为止, 则  $u^k$  即为原问题(11)的一个可行解。从所有的约束中找出  $u^k$  的有效约束, 即找出  $Au^k - g = 0$ , 令  $U = \{u \in \mathbf{R}^n \mid Au - g \leq 0\}$ , 得到如下的优化子问题

$$\min_{u \in U} \pi(u). \tag{33}$$

求解得  $u^{k+1}$ , 如果满足问题(11)的全部约束, 即  $VIO(u^{k+1}, A^{k+1}, g^{k+1})$  为空集, 则该解就是问题(11)的最优解, 否则找出  $VIO(u^{k+1}, A^{k+1}, g^{k+1})$ , 令

$$\delta = \min_{i \in VIO(u^{k+1}, A^{k+1}, g^{k+1})} \frac{g_i^{k+1} - (a_i^{k+1})^T u^k}{(a_i^{k+1})^T (u^{k+1} - u^k)}. \tag{34}$$

那么

$$u^* = u^k + \delta(u^{k+1} - u^k) \tag{35}$$

是问题(11)的最优解。

一般的算法多是用有效集的策略, 每次仅能更新一个约束, 而对于拟有效集策略, 从上面我们可以看到每次更新不止一个约束, 最多时可以是全部约束, 这显然提高了运算效率<sup>[5]</sup>。

### 3 一般的迭代格式

下面我们由 Lagrange 函数来推导该算法的一般表达式, 由(21)式

$$u = K^{-1}p - \eta K^{-1}A^T \xi.$$

注意到  $u^0 = K^{-1}p$ , 同时我们在上面把算法第一步所得的结果称为  $u^1$ , 可用下式来表达  $u^1$

$$u^1 = u^0 - \eta K^{-1}A^T \xi.$$

同时也注意到  $\eta, A, \xi$ 是和  $u^0$ 有关的, 所以可以把一般的迭代格式写为如下形式

$$u^{k+1} = u^k - \eta^k K^{-1}(A^k)^T \xi^k, \tag{36}$$

其中

$$A^k \in QAS(u^k, A^k, g^k), \tag{37}$$

$$\xi^k = \arg \max_{\xi \in \Delta} \frac{1}{2} \frac{(\xi^T (A^k K^{-1} p^k - g^k))^2}{\xi^T A^k K^{-1} (A^k)^T \xi}, \tag{38}$$

$$\eta^k = \frac{\xi^T (A^k K^{-1} p^k - g^k)}{\xi^T A^k K^{-1} (A^k)^T \xi}. \tag{39}$$

因此迭代就是求出  $u^k$ , 遵循如图 2 的过程。

其中的(38)就是将问题转化为问题(28)来求解。

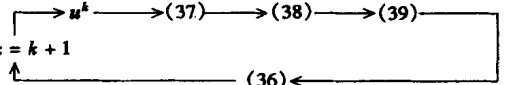


图 2 流程图

## 4 数值算例

例 1 对随机产生的二次规划问题<sup>[6]</sup>进行了计算, 计算环境为 Pentium II 微机. 表 1 为用 Lemke 方法和本文方法计算的结果, 在多约束情况下本文算法优于 Lemke 算法. 表中  $n$  为变量数,  $m$  为约束数,  $f_P/f_L$  为本文算法计算得到的目标函数值同用 Lemke 算法计算得到的目标函数值的比值, 可证明本文算法的精度.

表 1 本文方法与 Lemke 方法的比较

$n$	$m$	Lemke 方法 CPU time $t/s$	本文方法 CPU time $t/s$	$f_P/f_L$
10	5	0.054 7	0.109 4	1.000 000 429
10	10	0.109 4	0.277 3	1.000 000 339
10	20	0.218 8	0.492 2	0.999 974 259
10	40	0.500 0	0.554 7	1.000 000 028
20	10	0.328 1	0.382 8	1.000 062 813
20	20	0.718 8	0.875 0	1.000 144 523
20	40	1.539 1	2.085 9	1.000 043 496
20	80	5.164 1	1.539 1	1.000 020 437
50	25	3.906 3	2.367 2	1.000 000 208
50	50	10.273 4	13.460 9	1.000 021 058
50	100	26.265 6	16.531 2	1.000 100 312
50	200	84.671 9	31.640 6	1.000 013 100

例 2 这是一个悬臂梁同刚体无摩擦接触的问题. 假设这是个平面应力问题, 下图 3 中是有关的几何和载荷情况, 几何数据为:  $l = 50 \text{ cm}$ ,  $h = 5 \text{ cm}$ ; 初始间隙为  $g = 1 \text{ cm}$ ; 载荷数据为:  $q = 3.6 \text{ kN/cm}^2$ ; 材料常数为:  $E = 2.1 \text{ E} + 4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.29$

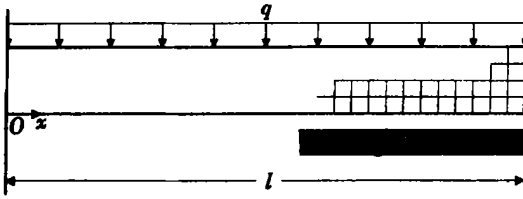


图 3 梁的单侧接触问题

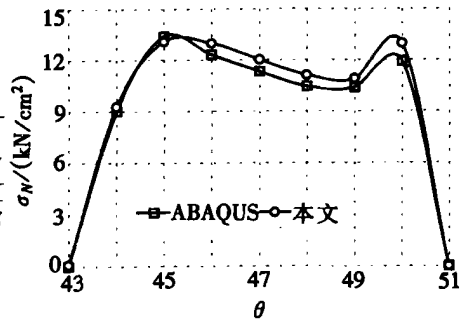


图 4 梁的单侧接触问题的计算结果

从图 4 的计算结果来看这种方法同 ABAQUS 计算结果<sup>[7]</sup>非常一致, 图中  $q_N$  为法向接触应力.

例 3 这是一个刚性销轴同弹性厚板的无摩擦接触问题. 载荷  $q = 25 \text{ kN/cm}^2$  作用在板

的右侧。结构的几何及载荷沿着过销轴中心的水平线对称,如图5所示。假设弹性板处于平面应变状态。材料数据如下: $E = 1\,000\text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ 。几何数据见图示,  $\varepsilon = 0.2\text{ cm}$ 。图5共划分了225个4节点等参单元,257个节点,在 $0 \leq \theta \leq \rho/2$ 所对应的圆弧上共设置了12个可能接触节点。计算结果见图6,图中绘出了法向接触应力及接触区域,这个结果同文献[7]所得的结果非常近似。

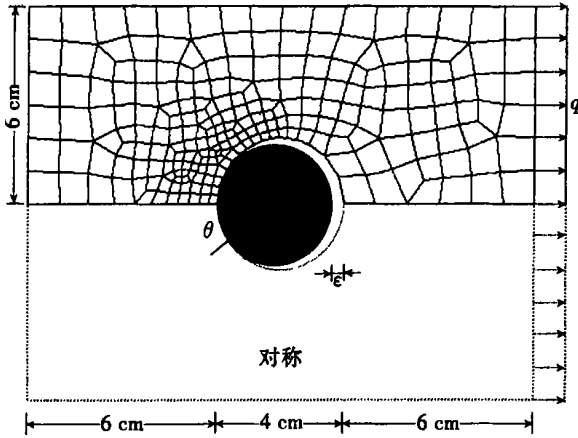


图5 轴销接触结构图

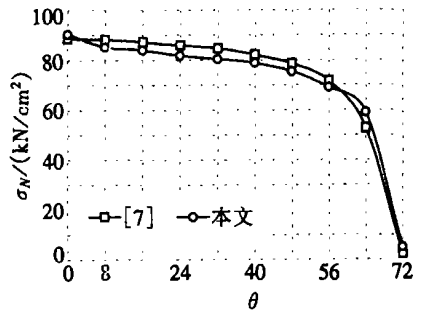


图6 销轴接触问题的计算结果

## 5 结束语

接触问题的试验误差解法具有力学意义直观和使用方便等特点,它是先假设某些接触点对的接触状态,如分离、滑动、贴合等,通过计算看其它的接触点对是否符合力学意义,如果不符则继续更换接触点对的接触状态直到满足要求为止。这种方法仅能解决较小的问题,对于接触点对较多的问题收敛性难以保证。而直接法则是将无摩擦性接触问题转化为数学极值问题,对这个极值问题的不同解法效率是不同的,力学意义也不一样。拟有效集算法的力学意义十分明显,一个显然的优点是每次更换一组而不是一般算法中每次仅更换一个点对。拟有效集的另外一个优点就是它是以结构在无障碍的情况下受力后的平衡态的解为其初始解,通过这个解可确定下一次迭代的一组(不止一个)接触点对。因而,极大地提高了算法效率。

### [参 考 文 献]

- [1] Bisbos C D. A Cholesky condensation method for unilateral contact problems[J]. Solid Mechanics Archives, 1985, 11(1): 1-23.
- [2] Panagiotopoulos P D. A nonlinear programming approach to the unilateral contact and friction boundary value problem in the theory of elasticity[J]. Ingenieur Archiv, 1974, 44(3): 421-432.
- [3] Kikuchi N, Oden J.T. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and FEM [M]. Philadelphia: SIAM, 1988.
- [4] Zhong W X, Sun S.M. A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction[J]. Comput & Structures, 1989, 32(1): 37-43.
- [5] Xuan Z C, Li X S, Sui Y K. Surrogate dual problem of quadratic programming and the algorithm[J]. Chinese J Numer Math Appl, 1999, 21(1): 45-53.
- [6] Rosen J B, Suzuki S. Construction of nonlinear programming test problems[J]. Comm of the ACM,

1965, 8(2): 113.

- [7] Šimunovic S, Saigal S. A linear programming formulation for incremental contact analysis[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1995, 38(16): 2703—2725.

## Unilateral Contact Problems Using Quasi\_Active Set Strategy

XUAN Zhao\_cheng<sup>1</sup>, LI Xing\_si<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China ;

2 Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

**Abstract:** The unilateral contact problem can be formulated as a mathematical programming with inequality constraints. To resolve the difficulty in dealing with inequality constraints, a quasi\_active set strategy algorithm was presented. At each iteration, it transforms the problem into one without contact in terms of the solution obtained in last iteration and initiates the current iteration using the solution of the transformed problem, and updates a group of contact pairs compared with Lemke algorithm that updates only one pair of contact points. The present algorithm greatly enhances the efficiency and numerical examples demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed algorithm.

**Key words:** unilateral contact; mathematical programming; quasi\_active set