

文章编号: 1000-0887(2002) 08_0798_07

中细柔性圆环壳整体弯曲的一般解及在 波纹管计算中的应用(II) —— Ω 型波纹管的计算*

朱卫平, 黄黔

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委黄黔来稿)

摘要: (II) 是(I)的具体应用. 计算了 Ω 型波纹管的角向刚度、横向刚度和应力分布, 并将所得结果与有关的细环壳理论及实验进行了比较. 结果表明, 单独用(I)的非齐次解能够计算 Ω 型波纹管的纯弯曲, 而且比细环壳理论更接近实际; 但在横向位移作用下, (I)的非齐次解只能部分地满足边界条件, 此时应同时考虑齐次解的作用, 即完整的一般解(I)才能满足所有的要求.

关键词: 柔性壳理论; 中细圆环壳; Ω 型波纹管; 横向弯曲; 一般解
中图分类号: O343.2 文献标识码: A

引 言

波纹管^[1,2]是一类子午线呈波纹状的旋转壳, 按其子午线一个周期或一个波的大致形状分别称为 Ω 型波纹管、C 型波纹管、U 型波纹管等. 波纹管在现代工业、国防及民用设备中有广泛的应用, 例如在航空仪表中作为弹性敏感元件, 在管道系统中作为位移补偿器等.

Ω 型波纹管由内侧沿赤道切开头的圆环壳和带加强箍的圆柱壳组成, 其中的一段见图 1. 设圆环壳的开口较小, 近似于完整的圆环壳, 而带加强箍的圆柱壳可作刚体处理. 对其轴向拉压问题, N. C. Dahl^[3](1953) 做过有关实验. 钱伟长^[4](1980) 用细环壳的非齐次解作了分析. 对其纯弯曲问题, 朱卫平^[5]等(1999) 用柔性细环壳在子午面内整体弯曲的非齐次解作了分析. 本文用(I)给出的中细柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的一般解讨论 Ω 型波纹管的纯弯曲和横向位移问题.

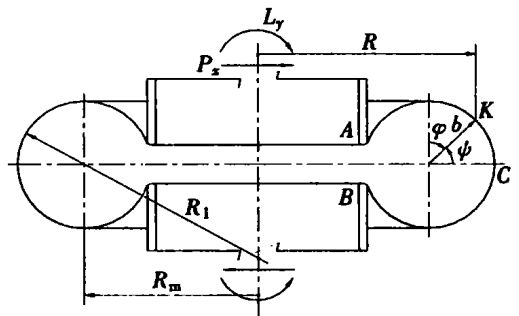


图 1 Ω 型波纹管

* 收稿日期: 2001_05_23; 修订日期: 2002_04_11

作者简介: 朱卫平(1962—), 男, 江苏南通人, 副教授, 博士, 已发表论文 20 多篇.

1 基本公式

这里使用角坐标 ϕ , 满足关系 $\phi = \pi/2 - \varphi$, $L_y(\phi) = -L_y(\varphi)$, $P_x(\phi) = -P_x(\varphi)$. 于是, (I) 中式(18) (环壳在端面弯矩 L_y 单独作用下的非齐次解) 可以写成

$$V_L = \frac{L_y^0}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\phi, \quad (1)$$

其中, $\mu = \sqrt{3(1-\nu^2)} b^2 / hR_m$, $L_y^0 = L_y b^2 / \pi DR_m^2$, $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$, 系数 $A_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 为复数, 由(I)中式(19)确定. 令

$$A_n = J_n + iK_n, \quad J_n = \operatorname{Re}A_n, \quad K_n = \operatorname{Im}A_n. \quad (2)$$

则

$$\left. \begin{aligned} V_L &= V_L^r + V_L^i, \\ V_L^r &= \operatorname{Re}V_L = \frac{L_y^0}{\mu} J, \quad J = \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin n\phi, \\ V_L^i &= \operatorname{Im}V_L = \frac{L_y^0}{\mu} K, \quad K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin n\phi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(I) 中式(22) (环壳在端面横向力 P_x 单独作用下的非齐次解) 可以写成

$$V_P = \frac{P_x^0}{\mu} \left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\phi \right), \quad (4)$$

其中, $P_x^0 = P_x b^2 / \pi DR_m$, 系数 B_n 为复数, 由(I)中式(23)式确定. 令

$$B_n = M_n + iN_n, \quad M_n = \operatorname{Re}B_n, \quad N_n = \operatorname{Im}B_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

则

$$\left. \begin{aligned} V_P &= V_P^r + V_P^i, \\ V_P^r &= \operatorname{Re}V_P = \frac{P_x^0}{\mu} M, \quad M = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos n\phi, \\ V_P^i &= \operatorname{Im}V_P = \frac{P_x^0}{\mu} N, \quad N = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} N_n \cos n\phi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

齐次解(I)中式(10)也可以分解成实部和虚部, 令

$$V_0 = V_{(1)}^0 + V_{(2)}^0 = V_0^r + iV_0^i, \quad V_0^r = \operatorname{Re}[V_{(1)}^0 + V_{(2)}^0], \quad V_0^i = \operatorname{Im}[V_{(1)}^0 + V_{(2)}^0], \quad (7)$$

则

$$\left. \begin{aligned} V_0^r &= c_1 F_2(\phi) - c_2 F_1(\phi) + c_3 G_1(\phi) + c_4 G_2(\phi), \\ V_0^i &= c_1 F_1(\phi) + c_2 F_2(\phi) - c_3 G_2(\phi) + c_4 G_1(\phi). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中, c_1, c_2, c_3, c_4 是任意实数, 须由边界条件确定.

$$\left. \begin{aligned} F_1(\phi) &= e^{\beta(\phi_2 - \phi)} [f_1(\phi) \sin \gamma(\pi/2 - \phi) + f_2(\phi) \cos \gamma(\pi/2 - \phi)], \\ F_2(\phi) &= e^{\beta(\phi_2 - \phi)} [f_1(\phi) \cos \gamma(\pi/2 - \phi) - f_2(\phi) \sin \gamma(\pi/2 - \phi)], \\ G_1(\phi) &= e^{\beta(\phi_2 - \phi)} [g_1(\phi) \cos \gamma(\pi/2 - \phi) + g_2(\phi) \sin \gamma(\pi/2 - \phi)], \\ G_2(\phi) &= e^{\beta(\phi_2 - \phi)} [g_1(\phi) \sin \gamma(\pi/2 - \phi) - g_2(\phi) \cos \gamma(\pi/2 - \phi)]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

β, γ 为实数, $\lambda = \beta + i\gamma$ 由(I)中式(11) ~ (13) 求得.

$$\left. \begin{aligned} f_1(\phi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [p_n \cos n(\pi/2 - \phi) - q'_n \sin n(\pi/2 - \phi)], \\ f_2(\phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} [p'_n \sin n(\pi/2 - \phi) + q_n \cos n(\pi/2 - \phi)], \\ g_1(\phi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [p_n \cos n(\pi/2 - \phi) + q'_n \sin n(\pi/2 - \phi)], \\ g_2(\phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [-p'_n \sin n(\pi/2 - \phi) + q_n \cos n(\pi/2 - \phi)]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

p_n, q_n, p'_n, q'_n 为实数, 由(I)中式(17)和(14)计算。

总之, 中细柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的一般解 V , 其实部和虚部可以分别写成

$$\operatorname{Re} V = V_L^r + V_P^r + V_0^r, \quad \operatorname{Im} V = V_L^i + V_P^i + V_0^i \quad (11)$$

将其代入(I)中式(2)和(4)可计算相应的内力和位移。

2 Ω 型波纹管在纯弯矩作用下的非齐次解

Ω 型波纹管在纯弯矩 L_y 作用下, 即图 1 中横向力 $P_x = 0$, 当开口 AB 较小时, 可作闭合圆环壳处理, 用非齐次解 V_L 进行计算。

现以 N. C. Dahl 实验模型为例^[3], 这里我们施以弯矩 $L_y = 479.3 \text{ N}\cdot\text{m}$ 来代替原文的轴向力 $P_z = 4445 \text{ N}(1000 \text{ lbs})$ 。该模型其它参数为: $R_m = 215.6 \text{ mm}$, $b = 54.9 \text{ mm}$, $h = 1.7 \text{ mm}$, $E = 2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.2546$, $\mu = 13.59$, $m = 3.085$ 。

利用上述数据, 把式(1)代入(I)中式(2)可求得各种内力和应力(图 2~9)。注意各正应力沿环向按余弦规律变化, $\theta = 0$ 时对应其幅值; 各剪应力沿环向按正弦规律变化, $\theta = \pi/2$ 时对应其幅值; 因此在 $\theta = 0$ 的平面内波纹管一侧受拉另一侧受压, 应力分布在受拉一侧与轴向拉伸问题一致, 在受压一侧与轴向压缩问题一致。图 2~9 仅显示了各应力沿子午向的变化。

现在将纯弯矩 L_y 作用下的 Ω 型波纹管折算成等效的轴向拉压问题, 与 Dahl 的实验进行比较。如用 P_z 表示等效的轴向力, 则

$$L_y \approx \int_0^{2\pi} \left[\frac{P_z}{2\pi R_m} \cos \theta \right] (R_m \cos \theta) R_m d\theta = \frac{1}{2} P_z R_m \quad (12)$$

将 Dahl 的实验中的 P_z 和 R_m 代入式(12), 得 $L_y = 479.3 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。

图 2~9 中的应力曲线是我们施加弯矩 $L_y = 479.3 \text{ N}\cdot\text{m}$ 的计算结果, 点是 Dahl 实验中施加轴向压力 $P_z = 4445 \text{ N}$ 的实验结果, 二者非常接近。但本文提供的子午向横向剪应力、扭矩产生的剪应力和薄膜剪应力是轴向拉压问题所没有的。同样, 可以比较二者的位移。关于轴向力和轴向位移 Dahl 提供了一个经验公式

$$\delta_{\text{exp}} = \frac{3.35 P_z b}{E h^2} \quad (13)$$

利用(I)中式(4)的第 2 式, 计算开口 AB 的相对转角, 得

$$\Omega_3 = -\vartheta_2^1 = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{dV_L^r}{d\phi} - \alpha \frac{\sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} V_L^r \right] d\phi = 6.5 \times 10^{-3} \text{ rad},$$

于是, 在弯矩 L_y 作用的平面内圆环壳平均回转半径外端的线位移可表为

$$\delta_c = \Omega_3 R_m \quad (14)$$

将式(12)及其它有关数据代入上式,并整理成式(13)的形式,得

$$\delta_c = \frac{3.34P_z b}{Eh^2}, \tag{15}$$

或

$$\Omega_y = 6.68 \frac{L_3 b}{Eh^2 R_m^2}, \tag{16}$$

相对误差 $|(\delta_c - \delta_{exp}) / \delta_{exp}| \times 100\% < 0.3\%$ 。钱伟长^[4](1980)根据轴对称细环壳非齐次解得到 $\delta_c = 3.305P_z b / Eh^2$; 朱卫平^[5]等(1999)根据柔性细环壳在子午面内整体弯曲的非齐次解得到 $\delta_c = 3.31P_z b / Eh^2$ 。可见,关于Dahl模型,本文的中细柔性环壳在子午面内整体弯曲的非齐次解更接近实验结果。

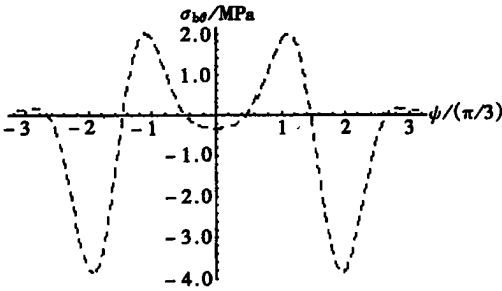
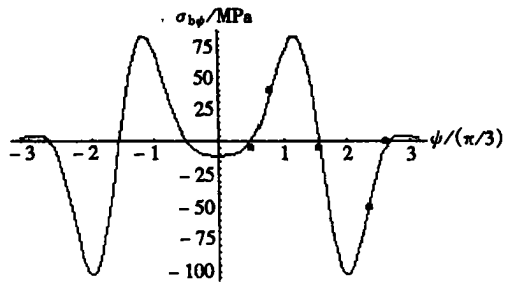
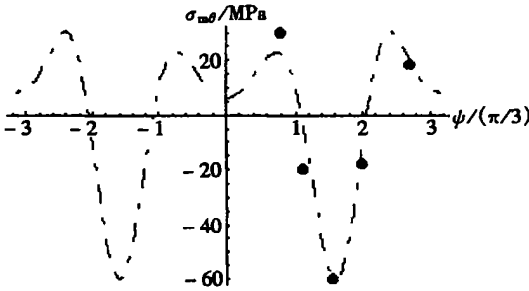


图2 环向弯曲正应力 ($\theta = 0$)



• Dahl(1953)实验

图3 子午向弯曲正应力 ($\theta = 0$)



• Dahl(1953)实验

图4 环向薄膜正应力 ($\theta = 0$)

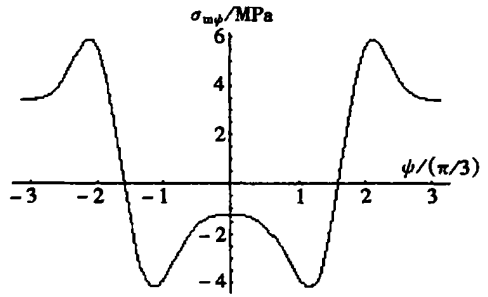


图5 子午向薄膜正应力 ($\theta = 0$)

3 Ω型波纹管在横向位移下的一般解

在图1中,不计环箍的长度和环壳开口的宽度,保持开口不转只作相对横向滑动,即要求满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} u_r^1(-\pi) = 0, \quad u_r^1(\pi) = \text{const}, \quad x(-\pi) = 0, \\ \vartheta_2^1 = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{dV^r}{d\psi} - \alpha \frac{\sin\psi}{1 + \alpha \cos\psi} V^r \right] d\psi = 0 \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

容易验证周期性的非齐次解,不能同时满足上述4个边界条件。现在我们用一般解进行计算,式(17)的4个边界条件恰好确定式(8)中的4个任意实数 $c_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 。先把式(11)代入(I)中式(4)和本文式(17)解得 $c_k (k = 1, 2, 3, 4)$,再利用(I)中式(2)求得各种应力。

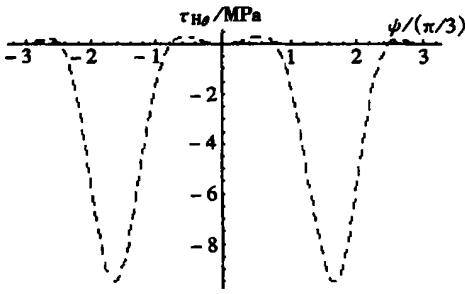


图 6 环向扭转剪应力 ($\theta = \pi/2$)

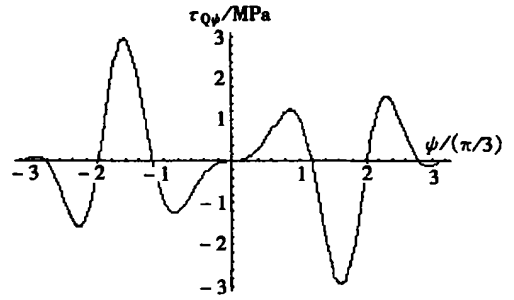


图 7 子午向横向剪应力 ($\theta = 0$)

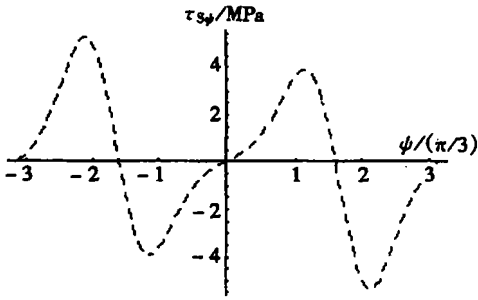
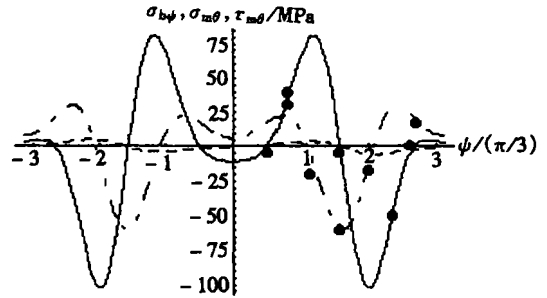


图 8 子午向薄膜剪应力 ($\theta = \pi/2$)



— 子午向弯曲正应力 ($\theta = 0$)
 - - 环向薄膜正应力 ($\theta = 0$)
 ····· 环向薄膜剪应力 ($\theta = \pi/2$)
 • Dahl(1953) 实验

图 9 3 个主要应力的对比

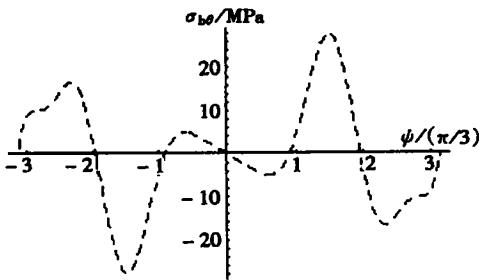


图 10 环向弯曲正应力 ($\theta = 0$)

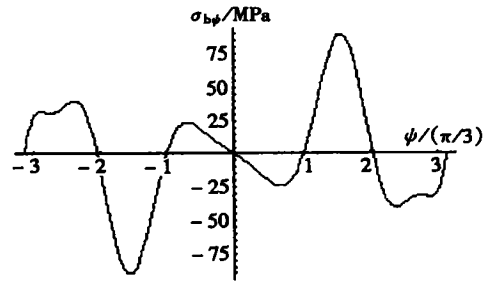


图 11 子午向弯曲正应力 ($\theta = 0$)

仍用 Dahl 模型的尺寸和材料常数, 这里设相对横向位移为 $\delta_x = 1.0 \text{ mm}$, 计算得到 $L_y \approx 0$, $P_x = 2.345 \times 10^5 \text{ N}$ 。由此可提供一个关于横向力 P_x 和横向位移 δ_x 的近似公式

$$\delta_x = 0.0449 \frac{P_x b}{Eh^2}, \quad (18)$$

各种应力沿波纹管子午线的分布见图 10~ 17。可以看到, 横向位移的一个显著特点是环壳内的薄膜剪应力很大。

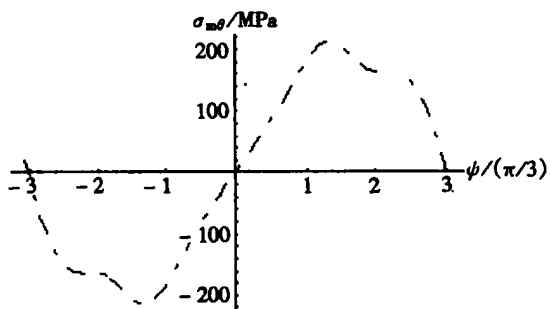


图 12 环向薄膜正应力 ($\theta = 0$)

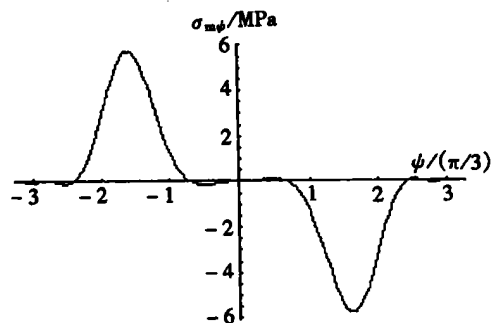


图 13 子午向薄膜正应力 ($\theta = 0$)

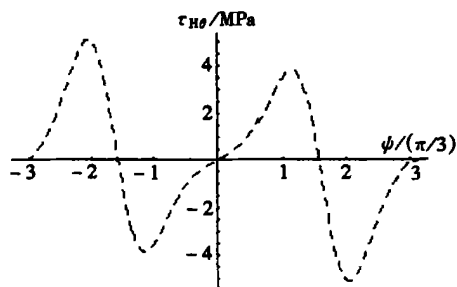


图 14 环向扭转剪应力 ($\theta = \pi/2$)

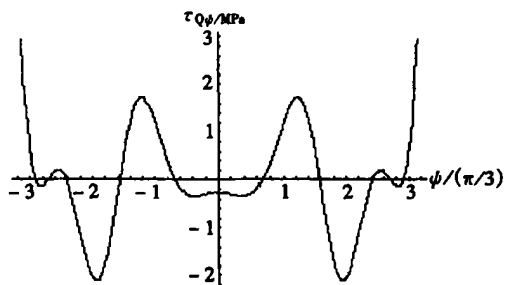


图 15 子午向横向剪应力 ($\theta = 0$)

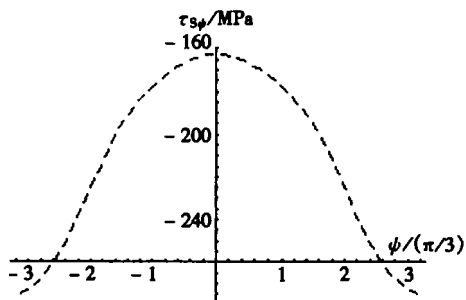
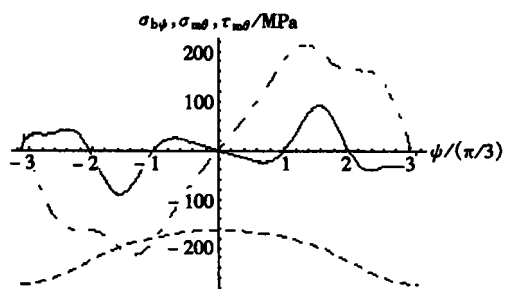


图 16 子午向薄膜剪应力 ($\theta = \pi/2$)



— 子午向弯曲正应力 ($\theta = 0$)
 - - 环向薄膜正应力 ($\theta = 0$)
 ···· 环向薄膜剪应力 ($\theta = \pi/2$)
 图 17 3 个主要应力的对比

4 结 语

单独用(I)的非齐次解可以计算 Ω 型波纹管的纯弯曲, 而且比用柔性细环壳理论(文 [5])更接近实际。但非齐次解是周期解, 不能满足存在横向位移的边界条件, 也不适用于子午线用分段函数表示的波纹管, 如 C 型、U 型波纹管(本文后继工作)。 (I) 的一般解能够克服这些缺点。

[参 考 文 献]

- [1] 钱伟长. 波纹管的制造、设计、实验和理论[A]. 见: 钱伟长. 应用数学和力学论文集[C]. 南京: 江苏科技出版社, 1979, 110—126.
- [2] Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association (EJMA) [S]. EJMA, INC, Seventh Edition, New York, 1998.
- [3] Dahl N C. Toroidal shell expansion joints[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1953, 20(4): 497—503.
- [4] 钱伟长. 细环壳极限方程的非齐次解及其在仪器仪表上的应用[J]. 仪器仪表学报, 1980, 1(1): 89—112.
- [5] ZHU Wei ping, GUO Ping. Application of non_homogeneous solution for equations of slender ring shells to overall bending problem of Ω _shaped bellows[J]. Journal of Shanghai University, 1999, 3(2): 121—126.
- [6] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解[J]. 清华大学学报, 1979, 19(1): 27—47.
- [7] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的一般解[J]. 应用数学和力学, 1980, 1(3): 287—299.
- [8] 朱卫平, 黄黔, 郭平. 柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的复变量方程及细环壳的一般解[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(9): 889—895.

General Solution of the Overall Bending of Flexible Circular Ring Shells With Moderately Slender Ratio and Applications to the Bellows (II) —Calculation for Omega Shaped Bellows

ZHU Wei ping, HUANG Qian

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai
University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: (II) is one of the applications of (I), in which the angular stiffness, the lateral stiffness and the corresponding stress distributions of Omega_shaped bellows were calculated, and the present results were compared with those of the other theories and experiments. It is shown that the non_homogenous solution of (I) can solve the pure bending problem of the bellows by itself, and be more effective than by the theory of slender ring shells; but if a lateral slide of the bellows support exists the non_homogenous solution will no longer entirely satisfy the boundary conditions of the problem, in this case the homogenous solution of (I) should be included, that is to say, the full solution of (I) can meet all the requirements.

Key words: theory of flexible shell; circular ring shell; Omega_shaped bellows; general solution