

文章编号: 1000-0887(2002) 08\_0790\_08

# 中细柔性圆环壳整体弯曲的一般解及 在波纹管计算中的应用( I ) ——基本方程和一般解\*

朱卫平, 黄黔

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委黄黔来稿)

**摘要:** 讨论了圆环壳在横向载荷作用下的整体弯曲问题, 提出了中细柔性圆环壳的概念、基本方程和一般解。本文称粗细比(子午线曲率半径与子午线曲率中心到回转轴的距离之比)小于  $1/3$  的圆环壳为中细圆环壳; 方程的推导基于 E. L. Axelrad 的柔性壳理论; 所得的解含有处理边界问题所必须的积分常数并且在全域内处处收敛; 本解能方便地用于有关波纹管的计算。全文共分 4 个部分: (I) 基本方程和一般解; (II)  $\Omega$  型波纹管的计算; (III) C 型波纹管的计算; (IV) U 型波纹管的计算。

**关键词:** 柔性壳理论; 中细圆环壳; 波纹管; 横向弯曲载荷; 一般解

**中图分类号:** O343.2      **文献标识码:** A

## 引 言

柔性壳理论将旋转壳在子午向按弯曲理论处理, 在环向按薄膜理论处理, 比一般的薄壳弯曲理论简化, 并且符合弹性元件在变形时其弯曲主要发生在子午线方向的特点。E. L. Axelrad<sup>[1, 2]</sup> (1976, 1987) 总结并发展了柔性壳理论。而圆环壳方程可以从子午线为一般形状的旋转壳方程退化得到, 但由于圆环壳的两个主曲率既不为零也不相等, 因此所得的方程远比常见的柱壳、锥壳和球壳方程复杂。圆环壳子午线曲率半径  $b$  与子午线曲率中心到回转轴的距离  $R_m$  (图 1) 之比  $\alpha = b/R_m$  是重要的几何参数, 我们称之为圆环壳的粗细比, 推导方程时可根据  $\alpha$  的量级和问题的性质进行简化。如果  $\alpha \ll 1$  可以忽略不计, 则所得的方程和相应的解称为细环壳方程和细环壳解。当在子午面内受横向弯曲载荷作用时, 壳体的内力分量、位移分量 (图 2, 式(2) ~ (4)) 沿环向的变化可预先用余弦函数和正弦函数表示, 因此, 只要求这些分量沿子午线的变化, 即相当于求解轴对称变形问题。钱伟长(1979) 首次给出了 V. V. Novozhilov 轴对称细环壳方程的一般解<sup>[3]</sup> 和轴对称圆环壳方程的一般解<sup>[4]</sup>, 并成功地用于波纹管的计算<sup>[5, 6]</sup>。钱伟长环壳一般解<sup>[3, 4]</sup> 克服了以往有关三角级数形式的特解对收敛性的限制和不能

\* 收稿日期: 2001\_05\_17; 修订日期: 2002\_04\_11

作者简介: 朱卫平(1962—), 男, 江苏南通人, 副教授, 博士, 已发表论文 20 多篇, 曾获上海市科技进步奖(E-mail: wpzhu@mail.shu.edu.cn)。

完全满足子午向边界条件的缺点。陈山林<sup>[7]</sup>(1987)从 V. S. Chernina 风型载荷下的旋转薄壳方程出发, 导出了边缘在子午面内受弯矩和横向力作用的圆环壳方程, 在进一步略去含  $\alpha^2$  的项后, 所得的方程与 Novozhilov 轴对称圆环壳方程相一致, 因而利用钱伟长环壳一般解<sup>[4]</sup>给出了相应的一般解, 并计算了纯弯矩作用下的 C 型波纹管。朱卫平等<sup>[8]</sup>(1999)从 E. L. Axelrad<sup>[1, 2]</sup>的柔性壳理论出发, 得到边缘在子午面内受弯矩和横向力作用的柔性圆环壳方程和柔性细环壳方程, 并借助钱伟长的细环壳一般解<sup>[3]</sup>给出了柔性细环壳在子午面内整体弯曲的一般解。柔性细环壳的一般解可以方便地用于计算有关波纹管<sup>[9, 10]</sup>。已有的研究表明: 1) 用柔性壳理论计算弹性元件(如薄壁弯管, 波纹管)较为简单且有足够的精度<sup>[1, 2, 10]</sup>; 2) 如果圆环壳在轴对称载荷或纯弯矩下, 当几何参数  $\alpha < 1/3$  时, 按细环壳理论求解(在基本方程中完全略去显含  $\alpha$  的项)能够满足实用要求<sup>[5, 6, 11]</sup>; 3) 如果圆环壳在横向载荷下, 我们必须谨慎地对待  $\alpha$  在基本方程中的作用, 因为横向载荷所产生的弯矩与环壳的粗细即  $\alpha$  的大小直接相关, 比如, 此时若按细环壳求解, 则相当于将横向载荷作用到圆环的圆心上, 于是横向力对弯曲应力将不起作用<sup>[8]</sup>, 这显然与实际不符; 4) 由于原方程<sup>[8]</sup>过于复杂, 如果我们不对其进行适当的简化, 还无法求得它的一般解。

本文在  $0 < \alpha < 1/3$  的范围内, 保留  $\alpha$  的一次项及近似地保留  $\alpha$  的二次项, 对文[8]给出的柔性圆环壳边缘在子午面内受弯矩和横向力作用的基本方程进行简化和求一般解, 并将得到的一般解用于波纹管的计算。我们称这个范围内的柔性圆环壳为中细柔性圆环壳。全文共分 4 个部分: (I) 基本方程和一般解; (II)  $\Omega$  型波纹管的计算; (III) C 型波纹管的计算; (IV) U 型波纹管的计算。

## 1 基本方程

### 1.1 柔性圆环壳方程<sup>[8]</sup>

圆环壳如图 1 所示, 壳厚  $h$  为常数。我们已给出的柔性圆环壳在边缘在子午面内受弯矩和横向力作用的基本方程为

$$(1 + \alpha \cos \phi) \frac{d^2 V}{d\phi^2} - \alpha \sin \phi \frac{dV}{d\phi} - \left[ 2\alpha^2 \frac{1 + \sin^2 \phi}{1 + \alpha \cos \phi} - 2i\mu \cos \phi \right] V = P_x^0 \cos \phi - \frac{\sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} L_y^0, \quad (1)$$

其中:  $V(\eta) = x(\eta) + iT(\eta)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $x = \delta_2^1 - u_z^1/R$ ,  $T = V_1^1 \sqrt{12(1 - \nu^2)}/Eh^2$ ,  $h = \text{const}$ ,  $d(RV_1^1)/bd\phi = RN_1^1 + M_1^1 \cos \phi$ ,  $V_1 = V_1^1 \cos \theta$ ;  $N_1^1$ ,  $M_1^1$ ,  $\delta_2^1$ ,  $u_z^1$  的表达见式(2)和(4);  $\alpha = b/R_m$ ,  $\mu = \sqrt{3(1 - \nu^2)} b^2/hR_m$ ,  $P_x^0 = b^2 P_x/\pi DR_m$ ,  $L_x^0 = b^2 L_y/\pi DR_m^2$ ,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ 。

内力分量为(图 2)

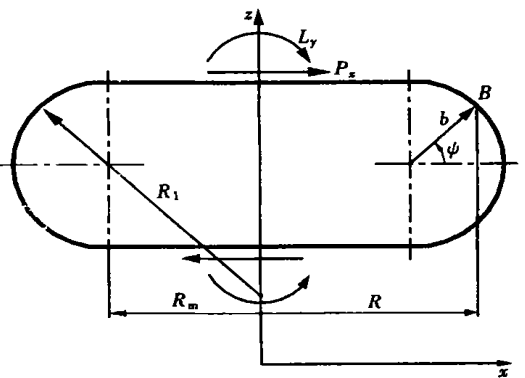


图 1 在子午面内整体弯曲的圆环壳

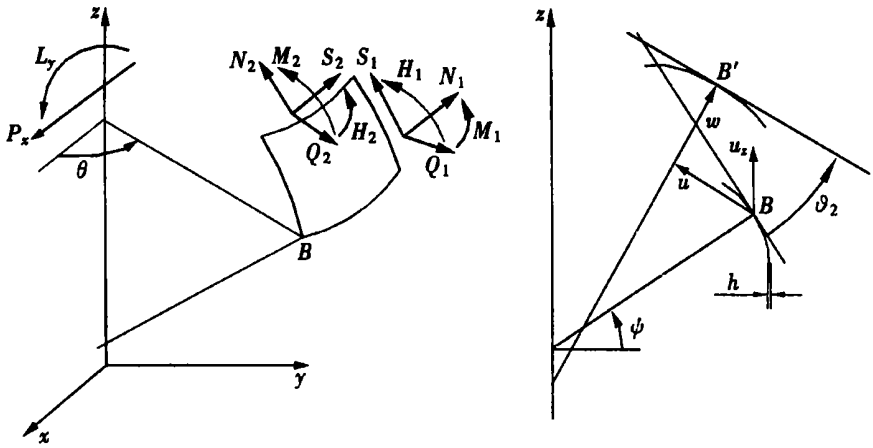


图2 载荷、内力和位移的正方向

$$\left. \begin{aligned}
 [N_1 \ N_2 \ M_1 \ M_2 \ Q_2] &= [N_1^1 \ N_2^1 \ M_1^1 \ M_2^1 \ Q_2^1] \cos \theta, \\
 [S_1 \ S_2 \ S \ H_1 \ H_2 \ H \ Q_1] &= [S_1^1 \ S_2^1 \ S^1 \ H_1^1 \ H_2^1 \ H^1 \ Q_1^1] \sin \theta, \\
 H &= (H_1 + H_2)/2, \ S = S_1 - H_2/R_2 = S_2 - H_1/R_1, \ Q_1^1 \approx 0 \text{ (柔性壳假定)}, \\
 \frac{bM_2^1}{D} &= \frac{d \operatorname{Re} V}{d\phi} - \alpha \frac{(1+\nu) \sin \phi}{1+\alpha \cos \phi} \operatorname{Re} V, \quad \frac{bM_1^1}{D} = \nu \frac{d \operatorname{Re} V}{d\phi} - \alpha \frac{(1+\nu) \sin \phi}{1+\alpha \cos \phi} \operatorname{Re} V, \\
 \frac{bH^1}{D} &= -\alpha \frac{(1-\nu) \sin \phi}{1+\alpha \cos \phi} \operatorname{Re} V, \quad \frac{bN_1^1}{K} = \frac{d \operatorname{Im} V}{d\phi} - \alpha \frac{\sin \phi}{1+\alpha \cos \phi} \operatorname{Im} V, \\
 \frac{bN_2^1}{K} &= -\alpha \frac{\sin \phi}{1+\alpha \cos \phi} \operatorname{Im} V - \alpha \frac{f_1}{K(1+\alpha \cos \phi)}, \quad \frac{bS^1}{K} = \alpha \frac{1}{1+\alpha \cos \phi} \operatorname{Im} V, \\
 \frac{bQ_2^1}{K} &= \alpha \frac{\cos \phi}{1+\alpha \cos \phi} \operatorname{Im} V + \alpha \frac{f_1}{K(1+\alpha \cos \phi)}, \quad f_1 = \frac{P_x \sin \phi}{\pi} + \frac{L_y \cos \phi}{\pi R}, \\
 f_3 &= \frac{P_x \cos \phi}{\pi} - \frac{L_y \sin \phi}{\pi R}, \quad K = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在边缘上满足

$$-N_2^1 \sin \phi + Q_2^1 \cos \phi - S^1 = \frac{P_x}{\pi R}, \quad -N_2^1 R \cos \phi - Q_2^1 R \sin \phi - M_2^1 = \frac{L_y}{\pi R} \quad (3)$$

位移分量为<sup>[8]</sup>(图2)

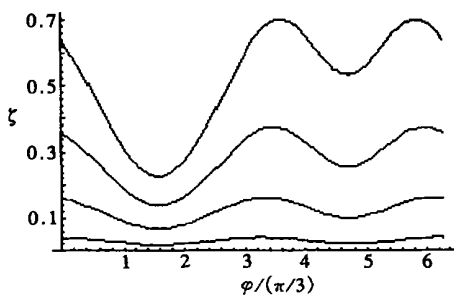
$$\left. \begin{aligned}
 [u_x \ u_R \ u_z \ \vartheta_2] &= [u_x^1 \ u_R^1 \ u_z^1 \ \vartheta_2^1] \cos \theta, \\
 \vartheta_2^1 &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left( \frac{d \operatorname{Re} V}{d\phi} - \alpha \frac{\sin \phi}{1+\alpha \cos \phi} \operatorname{Re} V \right) d\phi + \vartheta_2^1(\phi_1), \\
 \frac{u_z^1}{R} &= - \int_{\phi_1}^{\phi_2} \alpha \frac{\sin \phi}{1+\alpha \cos \phi} \operatorname{Re} V d\phi, \quad u_x^1 = u_R^1 = u_x^1(\phi_1) - \int_{\phi_1}^{\phi_2} \operatorname{Re} V \cos \phi b d\phi,
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\phi_1$  为参考点的纬度。

### 1.2 中细柔性圆环壳方程

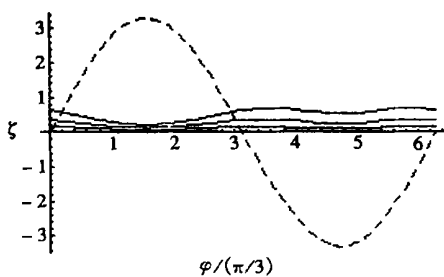
下面对基本方程(1)进行简化,以便求得一般解。设  $\phi = \pi/2 - \varphi$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , 于是  $d\phi = -d\varphi$ ,  $P_x^0(\phi) = -P_x^0(\varphi)$ ,  $L_y^0(\phi) = -L_y^0(\varphi)$ , 并令  $p \equiv 2i \mu \sin \varphi$ ,  $\zeta \equiv 2\alpha^2(1 + \cos^2 \varphi)/(1 + \alpha \sin \varphi)$ ,  $\Phi \equiv 1/(1 + \alpha \sin \varphi)$ , 代入式(1)得

$$(1 + \alpha \sin \varphi) \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \alpha \cos \varphi \frac{dV}{d\varphi} + (p - \zeta) V = L_y^0 \Phi \cos \varphi - P_x^0 \sin \varphi \quad (5)$$



由低到高分别对应  $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

图3  $\zeta$  曲线



虚线为  $\alpha = 0.1$  时的  $\text{Im} p$

图4  $\zeta$  与  $p$  的对比 ( $\mu = 16.52\alpha$ )

对实际薄环壳而言,  $h/b \leq 1/10$ , 那么  $\mu = \sqrt{3(1 - \nu^2)}(ab/h) \geq 10\alpha \sqrt{3(1 - \nu^2)}$ , 如取  $\nu = 0.3$ , 则  $\mu \geq 16.52\alpha$ , 可见  $\mu \gg \alpha$ . 在式(5)中,  $V$  前面的系数有两项, 其中  $p$  含  $\mu$ ,  $\zeta$  带  $\alpha^2$ , 但在比较这两项的大小时不能简单地略去  $\alpha^2$  项的作用. 因为在  $\varphi = \{0, \pi\}$  附近,  $p$  趋于 0; 而  $\zeta$  趋于  $4\alpha^2$ , 为有限项, 这时起主要作用. 相反, 在  $\varphi = \{0, \pi\}$  附近以外,  $p$  是主要的, 而  $\zeta$  变成次要的(图 3, 4), 在简化中要体现这一性质. 为此, 我们设  $\zeta = m\alpha^2$ , 且取  $m$  为  $\zeta/\alpha^2$  的平均值

$$m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos^2 \varphi}{1 + \alpha \sin \varphi} d\varphi = \frac{2(2\alpha^2 + \sqrt{1 - \alpha^2} - 1)}{\alpha^2 \sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (6)$$

易得  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} m = 3$ . 对于方程(5)的右边, 当  $0 < \alpha < 1/\sqrt{10} \approx 1/3$  时, 可取  $\Phi \approx 1 - \alpha \sin \varphi$ , 略去  $\alpha^2 \sin^2 \varphi$  以上的小量. 因此, 在本文我们限制  $0 < \alpha < 1/3$ , 并称这个范围内的圆环壳为中细圆环壳. 相应的基本方程为

$$(1 + \alpha \sin \varphi) \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \alpha \cos \varphi \frac{dV}{d\varphi} + (2i\mu \sin \varphi - m\alpha^2) V = L_y^0 (1 - \alpha \sin \varphi) \cos \varphi - P_x^0 \sin \varphi \quad (7)$$

该方程与钱伟长<sup>[4]</sup>给出的一般解的 Novozhilov 轴对称圆环壳方程

$$(1 + \alpha \sin \varphi) \frac{d^2 V}{d\varphi^2} - \alpha \cos \varphi \frac{dV}{d\varphi} + 2i\mu \sin \varphi V = 2MP_0 \cos \varphi \quad (8)$$

类似(这里  $P_0$  是与轴向力和法向压力有关的量). 因此, 通过类推可获得方程(7)的解.

## 2 中细柔性圆环壳方程的一般解

中细柔性圆环壳方程(7)的一般解由齐次解和非齐次解两部分组成. 首先将齐次方程写成

$$\left[ 1 + \frac{\alpha}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \right] \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \frac{\alpha}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \frac{dV}{d\varphi} + [\mu(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) - m\alpha^2] V = 0 \quad (9)$$

设其解为<sup>[4]</sup>

$$\left. \begin{aligned} V^0 &= V_{(1)}^0 + V_{(2)}^0, \quad V_{(1)}^0 = e^{\lambda\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi}, \\ V_{(2)}^0 &= e^{-\lambda\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n C_n e^{-in\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中,  $\lambda$  和  $C_n$  为待定的指数和系数;  $V_{(1)}^0$  和  $V_{(2)}^0$  是相互独立的一对解. 把其中之一, 如  $V_{(1)}^0$ , 代入式(9) 我们得到下列递推公式

$$\left. \begin{aligned} C_n/C_{n-1} &= P_n^{(1)}/(P_n^{(2)} + P_n^{(3)}C_{n+1}/C_n) \quad (n > 0), \\ C_n/C_{n+1} &= P_n^{(3)}/(-P_n^{(2)} + P_n^{(1)}C_{n+1}/C_n) \quad (n < 0), \\ [\alpha\lambda(1+i\lambda)/2 - \mu]C_{-1}/C_0 + m\alpha^2 - \lambda^2 + \\ &[\alpha\lambda(1-i\lambda)/2 + \mu]C_1/C_0 = 0 \quad (n = 0), \\ P_n^{(1)} &\equiv n^2\alpha - n\alpha(1+2i\lambda) + \alpha\lambda(i-\lambda) - 2i\mu, \\ P_n^{(2)} &\equiv -2i(n^2 + m\alpha^2 - 2in\lambda - \lambda^2), \\ P_n^{(3)} &\equiv n^2\alpha + n\alpha(1-2i\lambda) - \alpha\lambda(i+\lambda) - 2i\mu. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$m$  为一常数, 由式(6) 确定. 令

$$S_n^{(1)} \equiv C_n/C_{n-1} \quad (n > 0), \quad S_n^{(2)} \equiv C_n/C_{n+1} \quad (n < 0). \quad (12)$$

对式(12) 取极限, 利用式(11), 记  $S^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)}$ ,  $S^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)}$ , 解  $S^{(1)}$  和  $S^{(2)}$  的二次式, 得

$$S^{(1)} = i(1/\alpha \pm \sqrt{1/\alpha^2 - 1}), \quad S^{(2)} = -i(1/\alpha \pm \sqrt{1/\alpha^2 - 1}). \quad (13)$$

能够证明<sup>[12]</sup>,  $S_n^{(1)} \equiv C_n/C_{n-1}$  和  $S_n^{(2)} \equiv C_n/C_{n+1}$  分别收敛到其极限二次式的“大根”, 即式(13) 中绝对值较大者, 所以它们是收敛的, 且收敛速度很快.

实际计算中, 对一充分大的  $n(n > 0)$ , 可设  $S_n^{(1)} \equiv C_n/C_{n-1} \approx i(1/\alpha + \sqrt{1/\alpha^2 - 1})$ ,  $S_n^{(2)} \equiv C_{-n}/C_{-n+1} \approx -i(1/\alpha + \sqrt{1/\alpha^2 - 1})$ . 由式(11) 的前二式逐一反推, 得  $S_{n-1}^{(1)}, S_{n-2}^{(1)}, \dots, S_1^{(1)} = C_1/C_0$  和  $S_{-n+1}^{(2)}, S_{-n+2}^{(2)}, \dots, S_{-1}^{(2)} = C_{-1}/C_0$ ; 再从  $C_0$  (为任意待定复常数) 按顺序 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 逐一求出  $C_n = S_n^{(1)}C_{n-1}$  和  $C_{-n} = S_{-n}^{(2)}C_{-n+1}$ ; 把  $C_1/C_0$  和  $C_{-1}/C_0$  代入式(11) 的第3式, 用 Newton 迭代法能容易地求得  $\lambda$ .  $\lambda$  和  $C_n (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$  都是复数. 如果把  $V_{(2)}^0$  代入式(9), 将得到和上面相同的递推公式和结论, 但  $C_0$  为另一个任意待定复常数. 因此齐次方程的解(10) 共有 2 个任意待定复常数, 须由 4 个边界条件来确定.

设环壳的域为  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ ,  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  为壳的 2 条边界. 令

$$\lambda = \beta + i\gamma, \quad C_n/C_0 = (a_n + ib_n)/2, \quad C_{-n}/C_0 = (a_{-n} + ib_n)/2, \quad (14)$$

则  $V_{(1)}^0$  和  $V_{(2)}^0$  可表为

$$\left. \begin{aligned} V_{(1)}^0 &= (\dot{C}_0 + i\dot{C}_0)e^{-\beta(\varphi_2 - \varphi)} (\cos \gamma\varphi + i \sin \gamma\varphi) [f_1(\varphi) + if_2(\varphi)], \\ V_{(2)}^0 &= (\dot{B}_0 + i\dot{B}_0)e^{-\beta(\varphi_2 - \varphi)} (\cos \gamma\varphi - i \sin \gamma\varphi) [g_1(\varphi) + ig_2(\varphi)], \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中  $\dot{C}_0, \dot{C}_0, \dot{B}_0$  和  $\dot{B}_0$  为待定实数.  $f_1(\varphi), f_2(\varphi), g_1(\varphi), g_2(\varphi)$  为实函数

$$f_1(\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\varphi - q_n \sin n\varphi), \quad (16a)$$

$$f_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \sin n\varphi + q_n \cos n\varphi), \quad (16b)$$

$$g_1(\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (p_n \cos n\varphi + q_n \sin n\varphi), \quad (16c)$$

$$g_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-p'_n \sin n\varphi + q'_n \cos n\varphi) \quad (16d)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} p_n &= (a_n + a_{-n})/2, & q_n &= (b_n + b_{-n})/2, \\ p'_n &= (a_n - a_{-n})/2, & q'_n &= (b_n - b_{-n})/2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

解(15)适用于环壳全域, 没有奇点。但由于含衰减指数, 所以实质上只在边界附近起作用。在环壳的内部主要是非齐次解起作用。

设方程(7)的非齐次解为  $V^P = V_L + V_P$ 。  $V_L$  代表端面弯矩  $L_y$  作用下的解,  $V_P$  代表端面横向力  $P_x$  作用下的解。我们先讨论  $V_L$ , 设

$$V_L = -\frac{L_y^0}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n(\pi/2 - \varphi) \quad (18)$$

代入方程(7), 令  $P_x^0 \equiv 0$ , 得到有关系数的递推公式

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\mu}{1 + m\alpha^2 + (\alpha - i\mu)S_2^L}, \\ A_2 &= \frac{-\alpha\mu - 2(\alpha - i\mu)A_1}{8 + 2m\alpha^2 + 2(3\alpha - i\mu)S_3^L}, \\ A_n &= A_{n-1}S_n^L \quad (n \geq 3) \quad (m \text{ 见式 } 6). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$S_n^L \equiv \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{n\alpha - n^2\alpha + 2i\mu}{2(n^2 + m\alpha^2) + (n\alpha + n^2\alpha - 2i\mu)A_{n+1}/A_n} \quad (n \geq 2). \quad (20)$$

对式(20)两边取极限, 记  $S^L = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^L$ , 解极限二次式, 得

$$S^L = -\frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \quad (21)$$

用文[12]的方法可证明, 连分式(20)的极限比例收敛到式(21)的“小根”。当  $\alpha < 1$  时,  $|S^L| < 1$ , 所以式(18)绝对收敛。

实际计算时, 当  $n$  充分大时, 可取  $S_n^L \approx -(1 - \sqrt{1 - \alpha^2})/\alpha$ , 由式(20)逐一反推算出  $S_{n-1}^L, S_{n-2}^L, \dots, S_2^L$ ; 然后由式(19)按顺序求出  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 。必须指出, 由式(18)确定的解是周期性的, 无法处理边界问题。

同理, 我们讨论端面横向力  $P_x$  作用下的解  $V_P$ , 设

$$V_P = -\frac{P_x^0}{\mu} \left[ B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n(\pi/2 - \varphi) \right] \quad (22)$$

代入方程(7), 令  $L_y^0 \equiv 0$ , 得到有关系数的递推公式

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{i\mu B_1}{m\alpha^2}, & B_1 &= -\frac{\mu + (\alpha - i\mu)B_2}{1 + m\alpha^2 + 2\mu^2/(m\alpha^2)}, \\ B_2 &= -\frac{\mu}{\alpha - i\mu + [1 + m\alpha^2 + 2\mu^2/(m\alpha^2)]/S_2^P}, \\ B_n &= B_{n-1}S_n^P \quad (n \geq 3) \quad (m \text{ 见式 } (6)). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$S_n^P \equiv \frac{B_n}{B_{n-1}} = \frac{n\alpha - n^2\alpha + 2i\mu}{2n^2 + 2m\alpha^2 + (n\alpha + n^2\alpha - 2i\mu)B_{n+1}/B_n} \quad (n \geq 2). \quad (24)$$

对式(24)两边取极限, 记  $S^P = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^P$ , 解极限二次式, 得到和式(21)相同的根

$$S^p = - \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}. \quad (25)$$

如前所述,连分式(24)的极限比例收敛到式(25)的“小根”。当  $\alpha < 1$  时,  $|S^p| < 1$ , 所以式(22)绝对收敛。

实际计算时,当  $n$  充分大时,可取  $S_n^p \approx - (1 - \sqrt{1 - \alpha^2}) / \alpha$ , 由式(24)逐一反推算出  $S_{n-1}^p, S_{n-2}^p, \dots, S_2^p$ ; 然后由式(23)的前3式推求出  $B_2, B_1, B_0$ ; 从  $n \geq 3$  起,则按式(23)的第4式进行,一一算得  $B_n$ 。同样,由式(22)确定的解是周期性的,无法处理边界问题。

最后,我们将所要求的中细柔性环壳一般解写成

$$V = V_{(1)}^0 + V_{(2)}^0 + V_P + V_L. \quad (26)$$

### [参 考 文 献]

- [1] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1976.
- [2] Axelrad E L. Theory of Flexible Shells [M]. New York: Elsevier Science Publishing Company, Inc, 1987.
- [3] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解 [J]. 清华大学学报, 1979, 19(1): 27—47.
- [4] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的一般解 [J]. 应用数学和力学, 1980, 1(3): 287—299.
- [5] 钱伟长. 半圆弧波纹管的计算——细环壳理论的应用 [J]. 清华大学学报, 1979, 19(1): 84—99.
- [6] 钱伟长, 郑思梁. 半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用 [J]. 应用数学和力学, 1981, 2(1): 97—111.
- [7] CHEN Shan\_lin. General solution of the bending of ring shells with equations in complex [A]. In: Yeh K Y Ed. Progress in Applied Mechanics [C]. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987, 181—192.
- [8] 朱卫平, 黄黔, 郭平. 柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的复变量方程及细环壳的一般解 [J]. 应用数学和力学, 1999, 20(9): 889—895.
- [9] ZHU Wei\_ping, HUANG Qian, GUO Ping, et al. General solution for C-shaped bellows overall bending problems [A]. In: N E Shanmugam, J Y Kichard, V Thevendran Eds. Thin Walled Structures — Research and Development, Proc 2nd ICTWS. 1998, Singapore [C]. Oxford, UK: Elsevier Science Ltd, 1998, 477—484.
- [10] 朱卫平, 郭平, 黄黔. U型波纹管整体弯曲问题的一般解 [J]. 应用数学和力学, 2000, 21(4): 331—341.
- [11] 朱卫平. 用初参数法解 C型波纹管在子午面内整体弯曲 [J]. 力学季刊, 2000, 21(3): 311—315.
- [12] 钱伟长. 环壳方程级数解的收敛性问题及其有关收敛定理的研究 [J]. 兰州大学学报, 1979, (力学专号): 1—38.

# General Solution of the Overall Bending of Flexible Circular Ring Shells With Moderately Slender Ratio and Applications to the Bellows( I )—Governing Equation and General Solution

ZHU Wei ping, HUANG Qian

( Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China )

**Abstract:** The overall bending of circular ring shells subjected to bending moments and lateral forces is discussed. The derivation of the equations was based upon the theory of flexible shells generalized by E. L. Axelrad and the assumption of the moderately slender ratio less than  $1/3$  (i. e. ratio between curvature radius of the meridian and distance from the meridional curvature center to the axis of revolution). The present general solution is an analytical one convergent in the whole domain of the shell and with the necessary integral constants for the boundary value problems. It can be used to calculate the stresses and displacements of the related bellows. The whole work is arranged into four parts: ( I ) Governing equation and general solution; ( II ) Calculation for Omega\_shaped bellows; ( III ) Calculation for C\_shaped bellows; ( IV ) Calculation for U\_shaped bellows. This paper is the first part.

**Key words:** theory of flexible shell; circular ring shell; bellows; lateral bending load; moderately slender ratio; general solution