

文章编号: 1000-0887(2002) 08_0783_07

不可压超弹性材料中的空穴分叉^{*}

任九生, 程昌钧

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 力学系, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 研究了一种不可压 Valanis_Landel 材料超弹性球体在表面死载荷作用下的球形空穴的分叉问题, 给出了空穴分叉问题的解析解, 讨论了空穴生成时的应力间断和应力集中问题, 通过能量比较判断了解的稳定性, 并分析了球体中预存微孔的增长情况.

关键词: 不可压超弹性材料; 空穴生成和增长; 应力间断和应力集中

中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

材料中的空穴生成与增长问题是材料损伤和断裂破坏的重要机理, 所以长期以来这类问题受到人们的关注. Gent 和 Lindley 于 1958 年, Williams 和 Schapery 于 1965 年分别在各自的实验中观察到橡胶材料中的空穴的突然生成现象. 但直到 1982 年 Ball^[1]才奠定了这类非线性问题分析的理论基础, 并分析了超弹性材料受临界外力作用时其内部空穴的突然生成问题. Horgan 和 Abeyaratne^[2]与 Sivaloganathan^[3]于 1986 年分析了预存微孔在外力作用下的突然增长问题, 并将此描述成一个分叉问题. 此后 Chou_Wang 和 Horgan^[4]、Horgan 和 Polignone^[5]、Horgan^[6]、Horgan 和 Pence^[7]、尚新春和程昌钧^[8]等人继续研究了超弹性材料的空穴分叉问题. Chou_Wang 和 Horgan 于文[4]中指出, 不可压超弹性材料中的一些材料如 neo_Hookean 材料、Rivlin_Saunders 材料, 参数 n 满足 $1/2 \leq n < 3/2$ 时的 Ogden 材料可以发生空穴分叉, 而 Mooney_Rivlin 材料及其它参数范围的 Ogden 材料则不发生空穴分叉. 因此, 给出超弹性材料存在空穴分叉的必要条件是一个重要的研究内容. 本文的目的是继续深入研究不可压超弹性材料中空穴生成和增长的分叉问题. 文中分析了不可压 Valanis_Landel 材料球体中空穴生成的分叉问题, 发现这类材料可以发生空穴生成的分叉现象, 并用逆解法求得了空穴生成的分叉解; 给出了这类材料中空穴生成的临界力的解析式及其随后空穴增长与外力关系的解析式, 并通过解析式的数值解给出了空穴生成时的分支曲线和应力分布曲线; 讨论了空穴生成时的应力间断和应力集中问题, 并通过能量比较说明空穴分叉解是稳定的; 最后由此分析了球体中预存微孔的增长情况, 且可以解释空穴的突然生成和突然快速增长现象.

* 收稿日期: 2001_03_20; 修订日期: 2002_03_26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19802021)

作者简介: 任九生(1970—), 男, 河南济源人, 博士(chjcheng@mail.shu.edu.cn).

1 问题的数学描述

现考察一个不可压 Valanis_Landel 材料球体在表面载荷作用下的有限变形问题。分别取物质坐标系和空间坐标系为 (R, Θ, Φ) 和 (r, θ, φ) , 设变形前球体所占区域为

$$D_0 = \left\{ (R, \Theta, \Phi) \mid 0 \leq R < b, 0 < \Theta \leq 2\pi, 0 \leq \Phi \leq \pi \right\},$$

球体在外表面 $R = b$ 上受到均布径向拉伸死载荷 p_0 的作用。设球体的变形是球对称的, 于是变形模式可写为

$$r = r(R) > 0, 0 \leq R \leq b; r(0^+) \geq 0, \theta = \Theta, \varphi = \Phi, \quad (1)$$

式中, $r(R)$ 为待定函数。当 $r(0^+) = 0$ 时, 球体不发生空穴生成现象, 而当 $r(0^+) > 0$ 时则发生空穴生成现象。

相应的变形梯度张量 F 为

$$F = \text{diag}(r_{\mathcal{R}}R, r(R)/R, r(R)/R) = \text{diag}(\lambda_{\mathcal{R}}, \lambda_{\Theta}, \lambda_{\Phi}), \quad (2)$$

式中, $\lambda_{\mathcal{R}} = r_{\mathcal{R}}R = dr/dR$, $\lambda_{\Theta} = \lambda_{\Phi} = r(R)/R$ 为相应的主伸长。

不可压超弹性材料的 Cauchy 应力张量 τ 的各非零分量为

$$\begin{cases} \tau_{rr}(R) = \lambda_{\mathcal{R}} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\mathcal{R}}} - p(R), \\ \tau_{\theta\theta}(R) = \tau_{\varphi\varphi}(R) = \lambda_{\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\Theta}} - p(R), \end{cases} \quad (3)$$

式中, $p(R)$ 为静水压力, 是一个待定函数。

忽略体积力时, 球体应力分量应满足的平衡方程为

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial R} + 2 \frac{r_{\mathcal{R}}R}{r(R)} [\tau_r - \tau_{\theta\theta}] = 0 \quad (4)$$

球体表面受死载荷作用的边界条件为

$$\tau_r(b) = p_0 \left[\frac{b}{r(b)} \right]^2, \quad (5)$$

式中 $p_0 > 0$ 为给定的外加死荷载。不受任何约束的空穴边界条件为

$$\tau_r(0) = 0 \quad (6)$$

现取 Valanis 和 Landel 在实验基础上给出的描述不可压超弹性材料的 Valanis_Landel 应变能函数如下^[9]

$$W = 2\mu [\lambda_{\mathcal{R}}(\ln \lambda_{\mathcal{R}} - 1) + \lambda_{\Theta}(\ln \lambda_{\Theta} - 1) + \lambda_{\Phi}(\ln \lambda_{\Phi} - 1)], \quad (7)$$

式中, μ 为材料的线性剪切模量。

材料的不可压条件要求其 Jacobi 行列式 $J = \text{Det}F = 1$, 即

$$r_{\mathcal{R}}R r^2(R)/R^2 = 1 \quad (8)$$

积分此式可得

$$r(R) = (R^3 + c^3)^{1/3}, \quad (9)$$

式中, c 为待定常数。 $c = 0$ 意味着在现时构形中原球体仍保持为实心球体, 而 $c > 0$ 即表示 $r(0^+) = c > 0$ 意味着在现时构形中原球体中有一个半径为 c 的空穴生成, 这种情况下假设空穴表面是无约束的。

令

$$v = v(R) = r(R)/R = (1 + c^3/R^3)^{1/3}, \quad (10)$$

于是有

$$r \neq R) = v^{-2}. \quad (11)$$

则(7)式可改写为

$$W = 2\mu[v^{-2}(\ln v^{-2} - 1) + 2v(\ln v - 1)], \quad (12)$$

则相应的 Cauchy 应力分量为

$$\begin{cases} \tau_{rr}(R) = 2\mu v^{-2} \ln v^{-2} - p(R), \\ \tau_{\theta\theta}(R) = \tau_{\varphi\varphi}(R) = 2\mu \ln v - p(R). \end{cases} \quad (13)$$

现在的问题是对给定的死荷载 $p_0 > 0$ 寻求满足平衡方程(4)和边界条件(5)、(6)的待定函数 $p(R)$ 及待定常数 c . 如果 $c > 0$ 意味着在现时构形中原球体中有一个半径为 c 的球形空穴生成, 因此问题有分叉解存在; 如果 $c = 0$ 意味着在现时构形中原球体仍保持为实心球体, 问题不存在分叉解, 只有平凡解.

2 问题的求解及数值结果

不难看到, 对任意的 p_0 上述问题总存在一个平凡解

$$p(R) = -p_0, \quad c = 0, \quad (14)$$

该解相应于初始的未变形状态 $r(R) = R$, 相应的应力分量为 $\tau_r = \tau_{\theta} = \tau_{\varphi} = p_0$, 即球体处于均匀应力状态.

为了判断是否有 $c > 0$ 的解存在, 应用变换 $r(R) = Rv(R)$ 将平衡方程(4)改写为

$$\frac{\partial}{\partial R} [2\mu v^{-2} \ln v^{-2} - p(R)] + 2 \frac{v^{-2}}{vR} [2\mu v^{-2} \ln v^{-2} - 2\mu \ln v] = 0, \quad (15)$$

将(15)式对 R 积分可得

$$2\mu v^{-2} \ln v^{-2} - p(R) + p(0) + 4\mu \int_0^R (v^{-5} \ln v^{-2} - v^{-2} \ln v) \frac{ds}{s} = 0. \quad (16)$$

上式可简写为

$$p(R) - p(0) = 2\mu v^{-2} \ln v^{-2} + J(R), \quad (17)$$

式中

$$J(R) = 4\mu \int_0^R (v^{-5} \ln v^{-2} - v^{-2} \ln v) \frac{ds}{s}. \quad (18)$$

将(17)代入应力分量表达式(13)可得

$$\tau_{rr}(R) = -p(0) - J(R) \quad 0 < R < b. \quad (19)$$

注意到(19)式及 $J(0) = 0$, 则由边界条件(6)可得

$$p(0) = 0. \quad (20)$$

从而由(19)和边界条件(5)可得

$$-J(b) = p_0 [v(b)]^{-2}, \quad (21)$$

式中

$$J(b) = 4\mu \int_0^b (v^{-5} \ln v^{-2} - v^{-2} \ln v) \frac{ds}{s}. \quad (22)$$

由(9)和(10)可得

$$v^3(R) = 1 + \frac{c^3}{R^3}. \quad (23)$$

利用(23)式及其导数关系以 v 代替积分(21)式中的 s 可得

$$p_0 = 4\mu \left[1 + \frac{c^3}{b^3} \right]^{2/3} \int_{(1+c^3/b^3)^{1/3}}^{\infty} \frac{v^{-3} \ln v^{-2} - \ln v}{1 - v^3} dv. \quad (24)$$

这就是空穴半径 c 与球体表面死荷载 p_0 的一个解析表达式, 是一个精确的关系。可见它不仅与材料参数 μ 有关, 还与球体的几何尺寸 b 有关。对给定的荷载 p_0 可由 (24) 式求得相应的待定常数 c 。如果 (24) 存在 $c > 0$ 的解, 则意味着球体中有一个半径为 c 的空穴生成, 此时待定函数 $p(R)$ 由 (17) 式给出, 即

$$p(R) = 4\mu v^{-2} \ln v^{-2} + J(R) \tag{25}$$

相应的非零应力分量为

$$\begin{cases} \tau_r(R) = -J(R) = -4\mu \int_{(b^3 + c^3/R^3)^{1/3}}^{\infty} \frac{v^{-3} \ln v^{-2} - \ln v}{1 - v^3} dv, \\ \tau_{\theta\theta}(R) = \tau_{\varphi\varphi}(R) = 2\mu(v \ln v - v^{-2} \ln v^{-2}) + \tau_r(R) \end{cases} \tag{26}$$

球体的径向位移可由 (9) 式求得

$$u(R) = r(R) - R = (R^3 + c^3)^{1/3} - R \tag{27}$$

令 $c = 0$, 由 (24) 式可以得到空穴生成时的临界力 p_{cr} 如下

$$p_{cr} = 4\mu \int_1^{\infty} \frac{v^{-3} \ln v^{-2} - \ln v}{1 - v^3} dv \tag{28}$$

(28) 式的数值结果为 $p_{cr} = 2.08517 \mu$, 即当 $p_0 < p_{cr}$ 时, 对任何 p_0 (24) 式只有零解 $c = 0$, 此时问题只有平凡解; 当 $p_0 \geq p_{cr}$ 时 (24) 式除有零解 $c = 0$ 外还有非零解 $c > 0$, 说明问题存在分叉解, 即球体中有半径为 c 的空穴生成, 且 c 和 p_0 的关系即空穴生成后空穴的增长情况可由 (24) 式计算得到, (24) 式的数值结果即空穴的分叉情况如图 1 所示。由图可见空穴在球体中是当 $p_0 \geq p_{cr}$ 时突然生成的, 并能够得到迅速增长。 $R = 0$ 和 $R = b$ 时, (27) 式表示的球体中心与球体表面的径向位移与死荷载 p_0 的关系, 其数值结果如图 2 所示。显然, 当 $p_0 < p_{cr}$ 时球体位移保持为零, 而当 $p_0 \geq p_{cr}$ 时球体位移随死荷载 p_0 的增加而增加, 这种现象和材料的不可压缩性相吻合。

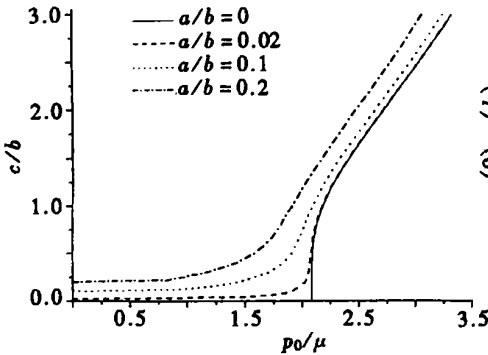


图 1 空穴的分叉及增长曲线

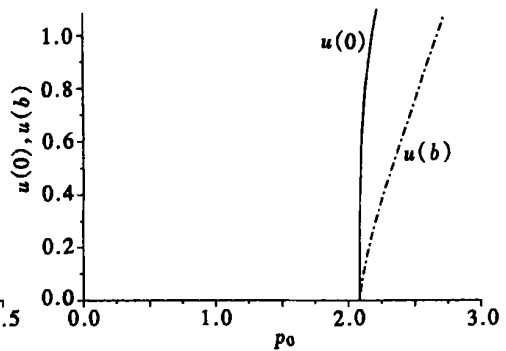


图 2 球体径向位移曲线

当 $p_0 \geq p_{cr}$ 时球体中的应力分布由 (26) 式给出, 其数值结果示于图 3 和图 4 中。由图可见, 径向应力 τ_r 的分布随球体半径 R 的增加而增加, 在空穴表面处其值为零; 而环向应力 $\tau_{\theta\theta}$ 的分布随球体半径 R 的增加而减少, 在空穴表面处其值为无穷大。而对 $p_0 < p_{cr}$ 时的均匀应力状态有, $\tau_r = \tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = p_0$ 。可见当 $p_0 = p_{cr}$ 时, 原球体中的均匀应力状态发生突然的变化, 有明显的应力间断现象。典型的是球体中心的应力 τ_r 由 p_0 变为零, $\tau_{\theta\theta}$ 由 p_0 变为无穷大, 如图 5 所示。由环向应力 $\tau_{\theta\theta}$ 的分布可见球体中在空穴附近产生明显的应力集中现象, 其应力集中程度随 R 的增加而迅速降低。可以说应力集中是一个局部现象, 且正是空穴附近强烈的

应力集中造成了空穴的突然生成及其后的迅速增长。

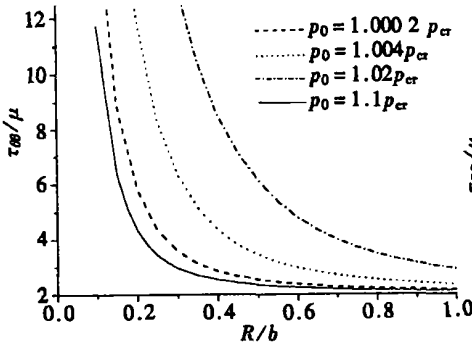


图3 环向应力分布曲线

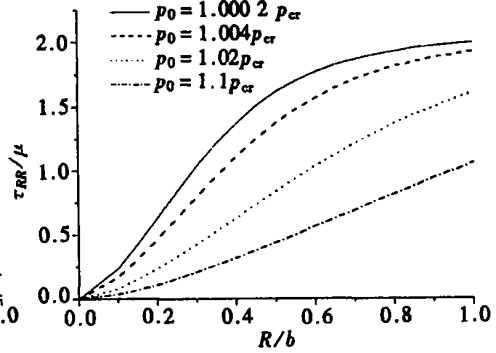


图4 径向应力分布曲线

3 能量分析

对不可压 Valanis-Landel 材料球体在表面死载荷作用下的变形问题, 在 $p_0 \geq p_{cr}$ 时我们已经得到了两个解, 为了判断解的稳定性我们有必要比较两种变形状态下球体的能量。表面死载荷作用下球体的总能量为

$$E = \int_V W dV - \int_A p_0 u(b) dA = 4\pi \int_0^b R^2 W dR - 4\pi b^2 p_0 u(b). \quad (29)$$

参照文[5]中的计算方法, 上式可写为

$$E = \frac{4}{3}\pi b^3 \left[W(\lambda_R, \lambda_\theta, \lambda_\phi) - (\lambda_R - \lambda_\theta) \frac{\partial W}{\partial \lambda_R}(\lambda_R, \lambda_\theta, \lambda_\phi) \right] - 4\pi b^2 p_0 u(b). \quad (30)$$

对平凡解, $\lambda_R = \lambda_\theta = 1, u(b) = 0$, 由(30)式可得

$$E_t = \frac{4}{3}\pi b^3 (-6\mu). \quad (31)$$

对空穴分叉解,

$$c > 0, \lambda_R = v^{-2} = \left(1 + \frac{c^3}{b^3} \right)^{-2/3}, \lambda_\theta = v = \left(1 + \frac{c^3}{b^3} \right)^{1/3}, \\ u(b) = (b^3 + c^3)^{1/3} - b,$$

由(30)式可得

$$E_c = \frac{4}{3}\pi b^3 [4\mu(v \ln v - v) + 2\mu(v \ln v^{-2} - v^{-2})] - 4\pi b^2 p_0 u(b). \quad (32)$$

E_t, E_c 及其差 $E_t - E_c$ 的数值结果示于图6。可见在 $p_0 \geq p_{cr}$ 时, E_t 的值总是大于 E_c 的值, 所以在 $p_0 \geq p_{cr}$ 时, 空穴分叉解总是稳定的, 球体中完全可以发生空穴生成的分叉现象。

4 预存微孔的增长

现考虑中心存在一个半径为 a 的微孔的空心球体, 在表面载荷作用下其中微孔的增长情况。这种情况下问题的基本方程仍然如(1) ~ (13)所示, 但要将内边界条件(6)改为

$$\tau_{rr}(a) = 0, \quad (33)$$

所有方程中 R 的取值范围为 $a \leq R \leq b$ 。

和前面的分析与计算过程相同可得到

$$p_0 = 4\mu \left[1 + \frac{c^3}{b^3} \right]^{2/3} \int_{(1+c^3/b^3)^{1/3}}^{(1+c^3/a^3)^{1/3}} \frac{v^{-3} \ln v^{-2} - \ln v}{1 - v^3} dv. \quad (34)$$

对给定的载荷 p_0 可由(34)式求得相应的待定常数 c 。 $c > a$ 表示空心球体中半径为 a 的微孔的增长情况, 此时待定函数 $p(R)$ 为

$$p(R) = 4\mu v^{-2} \ln v^{-2} + J(R), \quad (35)$$

式中,

$$J(R) = 4\mu \int_a^R (v^{-5} \ln v^{-2} - v^{-2} \ln v) \frac{ds}{s}. \quad (36)$$

相应的非零应力分量为

$$\begin{cases} \tau_{rr}(R) = -J(R) = -4\mu \int_{(4c^3/R^3)^{1/3}}^{(4c^3/a^3)^{1/3}} \frac{v^{-3} \ln v^{-2} - \ln v}{1-v^3} dv, \\ \tau_{\theta\theta}(R) = \tau_{\varphi\varphi}(R) = 2\mu(v \ln v - v^{-2} \ln v^{-2}) + \tau_{rr}(R). \end{cases} \quad (37)$$

描述微孔的增长情况的(34)式的数值结果如图1中虚线表示的曲线所示。可见对预存微孔当 $p_0 < p_{cr}$ 时, 尽管 p_0 不断增加, 但微孔几乎没有增长; 当 p_0 接近于 p_{cr} 时, 微孔突然发生快速增长。且微孔半径 a 越小, 微孔的增长曲线越靠近空穴生成的分叉曲线, 可以说空穴生成的分叉曲线是一条特殊的微孔的增长曲线。

5 结 论

本文研究了不可压 Valanis-Landel 材料球体中的空穴分叉问题, 得到了不可压材料中空穴生成的一个新的解析解, 通过能量比较发现空穴分叉解是稳定的, 超弹性材料中的空穴在外加载荷达到临界力时突然生成, 预存微孔在外加载荷接近临界力时突然增长, 空穴生成时有应力间断和应力集中现象, 而应力集中正是空穴生成和迅速增长的原因。

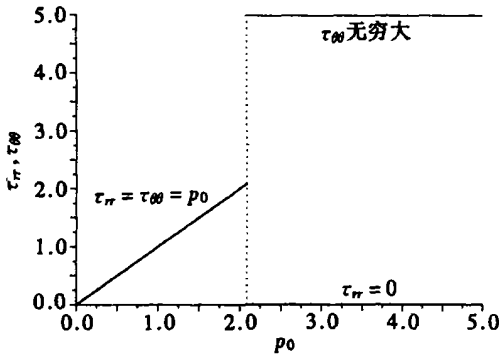


图5 应力间断示意

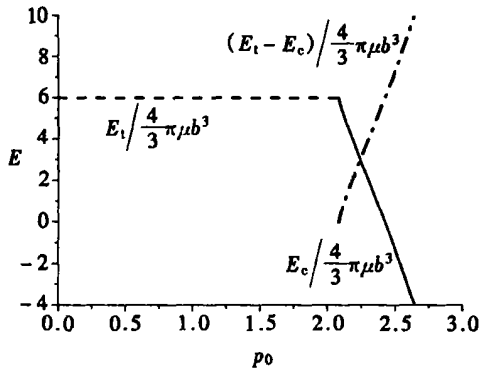


图6 球体能量曲线

[参 考 文 献]

- [1] Ball J M. Discontinuous equilibrium solutions and cavitations in nonlinear elasticity[J]. Philos Trans Roy Soc Lond Ser A, 1982, 306(3): 557—610.
- [2] Horgan C O, Abeyaratne R. A bifurcation problem for a compressible nonlinearly elastic medium: growth of a microvoid[J]. J Elasticity, 1986, 16(1): 189—200.
- [3] Sivaloganathan J. Uniqueness of regular and singular equilibria for spherically symmetric problems of nonlinear elasticity[J]. Arch Rail Mech Anal, 1986, 96(1): 97—136.
- [4] Chou Wang M_S, Horgan C O. Void nucleation and growth for a class of incompressible nonlinearly elastic materials[J]. Internat J Solids Structures, 1989, 25(11): 1239—1254.

- [5] Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinearly elastic solids: A review[J]. Appl Mech Rev, 1995, **48**(8): 471—485.
- [6] Horgan C O, Void nucleation and growth for compressible non_linearly elastic materials: An example [J]. Internat J Solids Structures, 1992, **29**(2): 279—291.
- [7] Horgan C O, Pence T J. Void nucleation in tensile dead_loading of a composite incompressible non_linearly elastic sphere[J]. J Elasticity, 1989, **21**(1): 61—82.
- [8] 尚新春, 程昌钧. 超弹性材料中的球体空穴分叉[J]. 力学学报, 1996, **28**(6): 751—755.
- [9] Valanis K C, Landel R F. The strain energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios[J]. J Applied Physics, 1967, **38**(28): 2997—3002.

Cavitated Bifurcation for Incompressible Hyperelastic Material

REN Jiu_sheng, CHENG Chang_jun

(Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Department of Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: The spherical cavitated bifurcation for a hyperelastic solid sphere made of the incompressible Valanis_Landel material under boundary dead_loading is examined. The analytic solution for the bifurcation problem is obtained. The catastrophe and concentration of stresses are discussed. The stability of solutions is discussed through the energy comparison. And the growth of a pre_existing micro_void is also observed.

Key words: incompressible hyperelastic material; void nucleation and growth; catastrophe and concentration of stress