

文章编号: 1000-0887(2002) 10-1055-06

# 广义疲劳等寿命曲线与二维疲劳极限 概率分布\*

熊峻江, 武哲, 高镇同

(北京航空航天大学 飞机设计所, 北京 100083)

(王彪推荐)

摘要: 基于传统等寿命曲线, 提出了广义疲劳等寿命  $S_a-S_m$  曲线概念, 并找出该曲线的普遍表达式; 根据相关系数优化法建立了该表达式的参数估计公式, 并给出了具有可靠度  $p$  的广义疲劳等寿命  $P-S_a-S_m$  曲线公式; 以广义  $P-S_a-S_m$  曲线为基础, 导出了二维疲劳极限概率分布; 进行了 3 组不同应力均值下的 LY11CZ 铝合金材料的二维配对升降法试验, 试验结果验证了广义疲劳等寿命  $S_a-S_m$  曲线的合理性和算法的拟合精度。

关键词: 疲劳极限; 广义等寿命曲线; 二维配对升降法

中图分类号: O346.2 文献标识码: A

## 引 言

当构件承受的应力水平较低且应力循环数很高时(如传动轴、振动元件等), 属高周疲劳问题, 对构件可进行无限寿命设计, 其安全性由应力控制。当构件在高应力水平作用下工作状态处于低周疲劳占主导地位时(如飞机结构、重型机械部件等), 则应进行有限寿命设计, 其安全性由寿命控制<sup>[1~4]</sup>。按照疲劳可靠性观点, “无限寿命设计”是指构件以一定的可靠度和置信度、在无限长的(理论上)使用期间不出现疲劳裂纹, 或者已存在的裂纹不再扩展。这种设计原则适用于比较平稳的低应力水平并且循环次数很高的情况, 以便将疲劳应力控制在疲劳极限以下, 或将应力强度因子变程控制在疲劳裂纹扩展门槛值以下。当应力水平较高或变化较大时, 则不宜采用此种设计<sup>[5~7]</sup>。进行无限寿命设计时, 通常采用应力\_强度干涉模型。美国波音飞机公司最先采用一维应力\_强度干涉模型对直升机动部件进行可靠性评定。此处, 一维应力\_强度指的是: 对施加于构件上的疲劳应力和构件对疲劳的抗力——疲劳强度, 只考虑其幅值的随机变化, 而将均值视为恒定的, 且疲劳应力和疲劳强度保持相同的平均应力。实践表明: 疲劳寿命和疲劳损伤实际上受应力幅值  $S_a$  和应力均值  $S_m$  二维随机变量共同作用控制, 一维应力\_强度干涉模型只考虑幅值随机变化影响与实际情况不符。在一维应力\_强度干涉模型基础上, 人们建立了二维应力\_强度干涉模型<sup>[8,9]</sup>, 这些模型采用的二维疲劳强度实际上是

\* 收稿日期: 2001\_03\_27; 修订日期: 2002\_04\_23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50005003); 航空基金部分资助项目(01A51011)

作者简介: 熊峻江(1966—), 男, 江西丰城人, 教授, 博士, 飞机设计研究所所长(E\_mail: caifei@hkxb.net.cn).

中等寿命区的疲劳强度, 而不是长寿命区的疲劳极限, 这是因为长寿命区疲劳寿命概率分布难以确定, 采用等同性原理, 也难以导出疲劳强度概率分布。为完善二维应力-强度干涉模型, 本文通过提出广义疲劳等寿命  $S_a-S_m$  曲线, 建立了长寿命区二维疲劳极限概率分布。

### 1 广义疲劳等寿命曲线

建立二维疲劳极限概率分布的先决条件是获得具有可靠度的等寿命曲线。通过对大量疲劳试验数据的统计分析, 人们归纳总结出了多种经验性等寿命曲线方程, 如 Goodman 直线方程:  $S_a/S_{-1} + S_m/\sigma_b = 1$ , 式中  $\sigma_b$  为材料的拉伸强度极限,  $S_{-1}$  为对称循环载荷下材料疲劳极限; Gerber 抛物线方程:  $S_a/S_{-1} + (S_m/\sigma_b)^2 = 1$ ; Soderberg 直线方程:  $S_a/S_{-1} + S_m/\sigma_s = 1$ , 式中  $\sigma_s$  为材料的拉伸屈服极限; 折线方程:  $S_a/S_{-1} + [(2/S_0 - 1/S_{-1})S_m] = 1$ , 式中  $S_0$  为脉动循环载荷下材料疲劳极限; Bagci 4 次方程:  $S_a/S_{-1} + (S_m/\sigma_s)^4 = 1$ , 等等。在这 5 种等寿命曲线中, Soderberg 直线对大多数情况偏于保守。Bagci 4 次方程对大多数情况偏于危险。Goodman 直线适用于脆性材料, 对延性材料偏于保守。Gerber 抛物线适用于延性材料, 但由于它是非线性关系, 使用起来没有直线方便。折线与数据吻合较好, 但它必须在已知脉动循环疲劳极限的情况下才能使用。研究表明: 上述 5 种等寿命曲线并不符合大多数材料, 其幂指数与上述 5 种等寿命曲线幂指数不同, 有些材料幂指数大于 1 小于 2, 有些则大于 2 小于 4, 因此, 材料不同, 其疲劳等寿命曲线幂指数也不同, 即材料疲劳等寿命曲线幂指数随材料而变化的参数。由此, 根据上述 5 种等寿命曲线, 归纳出适合于各种材料的等寿命曲线普遍式:

$$\frac{S_a}{S_{-1}} + \left(\frac{S_m}{\sigma_b}\right)^m = 1, \tag{1}$$

式中:  $S_{-1}$ ,  $\sigma_b$  和  $m$  为材料常数;  $\sigma_b$  为材料的拟合拉伸强度极限;  $S_{-1}$  为拟合对称循环载荷下材料疲劳极限。疲劳极限曲线拟合方程(1)称为广义疲劳等寿命曲线,  $S_{-1}$ ,  $\sigma_b$  和  $m$  由疲劳试验数据拟合得到。利用相关系数优化法, 由配对升降法测定的中值疲劳极限 ( $S_{ai}$ ,  $S_{mi}$ ) 数据, 可以拟合出疲劳极限曲线, 即中值  $S_a-S_m$  曲线; 由具有可靠度  $p$  的安全疲劳极限数据, 可以拟合出安全疲劳极限曲线, 即  $P-S_a-S_m$  曲线。疲劳极限曲线和安全疲劳极限曲线示于图 1 中。

### 2 广义疲劳等寿命曲线参数估计式

对式(1)作变换, 可以得到

$$\left(\frac{S_m}{\sigma_b}\right)^m = \frac{S_{-1} - S_a}{S_{-1}}$$

对上式取对数并变换, 则

$$\lg S_m = \lg \sigma_b - \frac{1}{m} \lg S_{-1} + \frac{1}{m} \lg(S_{-1} - S_a), \tag{2}$$

令

$$X = \lg S_m, \quad Y = \lg[S_{-1} - S_a],$$

$$A = \lg \sigma_b - \frac{1}{m} \lg S_{-1}, \quad B = \frac{1}{m},$$

式(2)变为

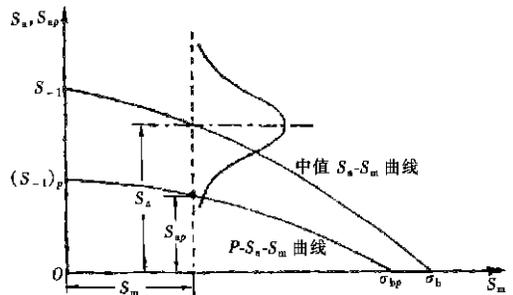


图 1 疲劳极限曲线

$$X = A + B \cdot Y$$

上式表明:  $Y$  与  $\lg S_m$  成直线关系。根据这一条件, 即可用线性回归的相关系数优化法<sup>[1-3]</sup> 求出待定常数  $S_{-1}$ 、 $\sigma_b$  和  $m$ 。根据线性回归理论, 可得待定常数  $A$ 、 $B$  和相关系数  $r$ :

$$A = \bar{X} - B \cdot \bar{Y}, \quad B = \frac{L_{XY}}{L_{YY}}, \quad r = \frac{L_{XY}}{\sqrt{L_{XX} \cdot L_{YY}}}, \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad L_{XX} = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2, \\ L_{YY} &= \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right)^2, \quad L_{XY} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right), \end{aligned}$$

上面诸式中  $Y$ 、 $L_{YY}$  和  $L_{XY}$  均与  $S_{-1}$  有关, 是  $S_{-1}$  的函数。故  $A$ 、 $B$  和  $r$  也为  $S_{-1}$  函数, 即  $A(S_{-1})$ 、 $B(S_{-1})$  和  $r(S_{-1})$ 。为此要求解  $A$ 、 $B$  和  $r$  值, 须先求  $S_{-1}$ 。根据相关系数优化法, 所求  $S_{-1}$  必须使线性相关系数绝对值  $|r(S_{-1})|$  取最大, 所以可由下式求得  $S_{-1}$ 。

$$\frac{d|r(S_{-1})|}{dS_{-1}} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{dr^2(S_{-1})}{dS_{-1}} = 0,$$

因为

$$\frac{dr^2(S_{-1})}{dS_{-1}} = 2r^2(S_{-1}) \left( \frac{1}{L_{XY}} \frac{dL_{XY}}{dS_{-1}} - \frac{1}{2L_{YY}} \frac{dL_{YY}}{dS_{-1}} \right),$$

所以下式成立,

$$\frac{1}{L_{XY}} \frac{dL_{XY}}{dS_{-1}} - \frac{1}{2L_{YY}} \frac{dL_{YY}}{dS_{-1}} = 0 \quad (4)$$

令

$$L_{X0} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{S_{-1} - S_a} - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_{-1} - S_a} \right), \quad (5)$$

$$L_{Y0} = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{S_{-1} - S_a} - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_{-1} - S_a} \right), \quad (6)$$

将式(5)和(6)代入式(4), 则得

$$\frac{L_{Y0}}{L_{YY}} - \frac{L_{X0}}{L_{XY}} = 0 \quad (7)$$

由式(7)可求得  $S_{-1}$ , 然后通过式(3)可求出  $m$  和  $\sigma_b$ 。式(7)较复杂, 需要迭代法求解。令  $H(S_{-1}) = L_{Y0}/L_{YY} - L_{X0}/L_{XY}$ , 并且  $H(S_{-1})$  具有如下性质: 设  $S_{-1}$  为  $S_{-1}$  的预估值, 则当  $S_{-1} < S_{-1}$  时,  $H(S_{-1}) > 0$ ; 而当  $S_{-1} > S_{-1}$  时,  $H(S_{-1}) < 0$ ; 又因为  $S_{-1}$  必位于区间  $[0, (S_a)_{\max}]$  内, 那么, 可以很容易地用二分法求得  $S_{-1}$ 。在求得  $A$ 、 $B$  和  $S_{-1}$  后, 通过如下变换可求出  $m$  和  $\sigma_b$ :

$$m = \frac{1}{B} = \frac{L_{YY}}{L_{XY}}, \quad \sigma_b = S_{-1}^{1/m} \times 10^{(X - Y_{XY}/L_{YY})}$$

### 3 二维疲劳极限概率分布

中值  $S_a$ - $S_m$  曲线方程和  $P$ - $S_a$ - $S_m$  曲线方程分别由以下二式表示:

$$\frac{S_a}{S_{-1}} + \left( \frac{S_m}{\sigma_b} \right)^m = 1, \quad (8)$$

$$\frac{S_{ap}}{(S_{-1})_p} + \left( \frac{S_m}{\sigma_{bp}} \right)^{m_p} = 1, \quad (9)$$

式中:  $S_a$  和  $S_{ap}$  分别为对应任一平均应力  $S_m$  的疲劳极限幅值和安全疲劳极限幅值;  $S_{-1}$  和  $(S_{-1})_p$  分别为对称循环下的疲劳极限和安全疲劳极限;  $\sigma_{bp}$  为具有可靠度  $p$  的安全拉伸强度极限。

假定疲劳极限幅值遵循正态分布(图 1),按统计学知识,具有可靠度  $p$  的安全疲劳极限幅值可表示为

$$S_{ap} = S_a + u_p \sigma, \quad (10)$$

根据可靠度  $p$  由统计用表可查出标准正态偏量  $u_p$  之值。将式(8)中  $S_a$  和式(9)中  $S_{ap}$  代入式(10),则得母体标准差估计量  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{1}{u_p} \left\{ (S_{-1})_p \left[ 1 - \left( \frac{S_m}{\sigma_{bp}} \right)^{m_p} \right] - S_{-1} \left[ 1 - \left( \frac{S_m}{\sigma_b} \right)^m \right] \right\}. \quad (11)$$

式(8)中  $S_a$  乃母体平均值估计量  $\mu$ , 故有

$$\mu = S_{-1} \left[ 1 - \left( \frac{S_m}{\sigma_b} \right)^m \right],$$

于是,按正态分布可得任一平均应力  $S_m$  下的疲劳极限幅值概率密度函数  $g_1(S_a)$ :

$$g_1(S_a) = \frac{u_p}{\sqrt{2\pi} \left\{ (S_{-1})_p \left[ 1 - \left( \frac{S_m}{\sigma_{bp}} \right)^{m_p} \right] - S_{-1} \left[ 1 - \left( \frac{S_m}{\sigma_b} \right)^m \right] \right\}} \times \exp \left\{ - \frac{u_p^2 \left\{ S_a - S_{-1} \left[ 1 - \left( \frac{S_m}{\sigma_b} \right)^m \right] \right\}^2}{2 \left\{ (S_{-1})_p \left[ 1 - \left( \frac{S_m}{\sigma_{bp}} \right)^{m_p} \right] - S_{-1} \left[ 1 - \left( \frac{S_m}{\sigma_b} \right)^m \right] \right\}^2} \right\}. \quad (12)$$

鉴于疲劳极限数据测试是在任一指定平均应力  $S_m$  下进行的,各点  $S_m$  在区间:  $(S_m)_{\min} \sim (S_m)_{\max}$  内取值的概率相同,故可假定  $S_m$  遵循均匀分布,其概率密度函数为

$$g_2(S_m) = \frac{1}{(S_m)_{\max} - (S_m)_{\min}}, \quad (13)$$

式中  $(S_m)_{\max}$  和  $(S_m)_{\min}$  分别为平均应力的最大值和最小值,根据实际情况选定。由式(12)和式(13)可写出二维疲劳极限概率密度函数  $g(S_a, S_m)$ :

$$g(S_a, S_m) = g_1(S_a) \cdot g_2(S_m). \quad (14)$$

显然,  $g(S_a, S_m)$  在一定积分域  $\Omega$  内的二重积分等于 1, 满足二维概率密度函数的条件:

$$\iint_{\Omega} g(S_a, S_m) dS_a dS_m = 1.$$

## 4 二维配对升降法试验

为验证本文方法的可行性,进行了下述二维配对升降法试验,并以该试验数据为例进行等寿命曲线的拟合。

试样: LY11CZ 铝合金经阳极化,试样从直升机旋翼纵向取样。试样形状: 光滑板状试样,厚度 5 mm,  $K = 1$ 。加载方式: 轴向加载。试验频率:  $f = 130$  Hz。试验环境: 室温空气中进行。试验设备: AMSKR1478\_10 吨高频疲劳试验机。试验选择 3 个配对升降法试验( $N = 10^7$ )(如图 2 所示)。试验结果如表 1 所示。按本文方法对表 1 中的试验数据进行等寿命曲线的拟合,其结果如表 2 和图 3 所示。

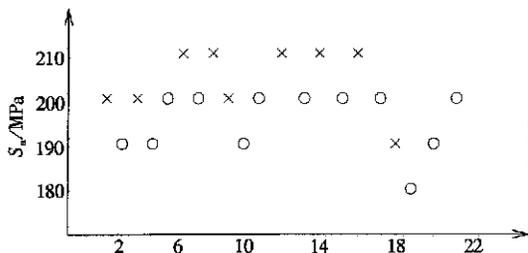


图 2a 配对升降法 ( $N = 10^7, S_m = 58 \text{ MPa}$ )

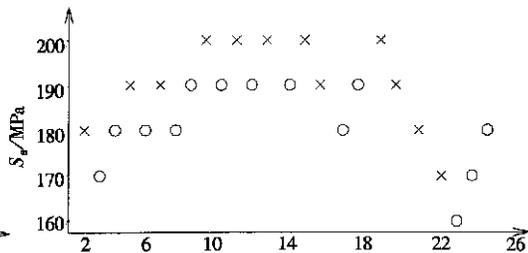


图 2b 配对升降法 ( $N = 10^7, S_m = 69 \text{ MPa}$ )

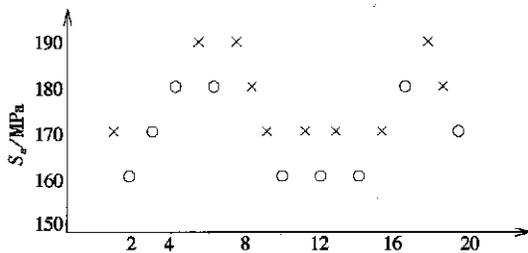


图 2c 配对升降法 ( $N = 10^7, S_m = 82 \text{ MPa}$ )

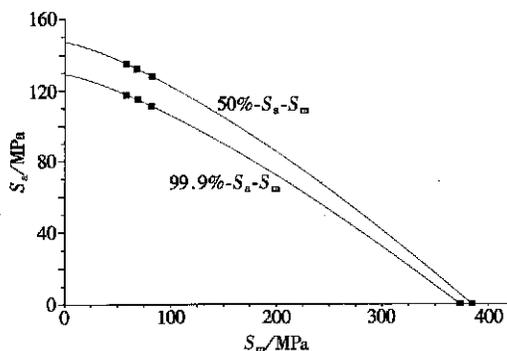


图 3 广义疲劳等寿命  $P_{a-S_a-S_m}$  曲线

表 1 试验数据 ( $N = 10^7$ )

组号	子样大小 (对)	应力幅值 $S_a/\text{MPa}$	标准差 $s$	标准差修正系数 $k$	$u_{99.9\%}$	$(S_a)_{99.9\%}/\text{MPa}$	应力均值 $S_m/\text{MPa}$
1	10	135	5.446	1.028	-3.09	117.70	58
2	12	132	5.46	1.023	-3.09	114.74	69
3	9	128	5.277	1.031	-3.09	111.19	82

表 2 拟合结果

50% $S_a-S_m$	$\frac{(S_a)_{50\%}}{147.0345} + \left[ \frac{(S_m)_{50\%}}{384.5787} \right]^{1.324439} = 1$	线性相关系数 $R = 0.9998412$
99.9% $S_a-S_m$	$\frac{(S_a)_{99.9\%}}{129.147} + \left[ \frac{(S_m)_{99.9\%}}{373.4504} \right]^{1.300438} = 1$	线性相关系数 $R = 0.9999508$

[ 参 考 文 献 ]

[1] 高镇同. 疲劳应用统计学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1986, 336—343.  
 [2] 高镇同, 熊峻江. 疲劳可靠性[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2000, 366—372.  
 [3] 高镇同, 蒋新桐, 熊峻江, 等. 疲劳性能试验设计与数据处理[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1999, 21—23.  
 [4] 赵少汴, 王忠保. 疲劳设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1992, 48—51.  
 [5] 熊峻江, 王三平, 高镇同. 疲劳寿命估算的能量法及其实验研究[J]. 力学学报, 2000, 32(4): 420—

427.

- [6] 熊峻江. 结构断裂可靠性“等损伤设计”方法及其实验研究[J]. 机械工程学报, 2000, 36(3): 32—36.
- [7] 熊峻江. 结构疲劳可靠性设计的“等损伤设计方法”[J]. 北京航空航天大学学报, 1999, 25(5): 554—557.
- [8] 凌静. 疲劳可靠性分析与设计[D]. 北京: 北京航空航天大学研究生院, 1989, 37—73.
- [9] 熊峻江, 高镇同. 稳态循环载荷下结构疲劳可靠性分析技术[J]. 强度与环境, 1996, 23(4): 16—20.

## Generalized Fatigue Constant Life Curve and Two\_Dimensional Probability Distribution of Fatigue Limit

XIONG Jun\_jiang, WU Zhe, GAO Zhen\_tong

( Aircraft Design Bureau, Beijing University of Aeronautics and  
Astronautics, Beijing 100083, P R China )

**Abstract:** According to the traditional fatigue constant life curve, the concept and the universal expression of the generalized fatigue constant life curve were proposed. Then, on the basis of the optimization method of the correlation coefficient, the parameter estimation formulas were induced and the generalized fatigue constant life curve with the reliability level  $p$  was given. From  $P-S_a-S_m$  curve, the two\_dimensional probability distribution of the fatigue limit was derived. After then, three set of tests of LY11CZ corresponding to the different average stress were carried out in terms of the two\_dimensional up\_down method. Finally, the methods are used to analyze the test results, and it is found that the analyzed results with the high precision may be obtained.

**Key words:** fatigue limit; generalized constant life curve; two dimension up\_down method