

文章编号: 1000-0887(2002) 10-1013-12

Burgers 方程的小波近似惯性流形 及数值分析*

田立新¹, 许伯强¹, 刘曾荣²

(1. 江苏大学 理学院, 江苏 镇江 212013; 2. 上海大学 数学系, 上海 200018)

(我刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 研究 Burgers 方程小波基下小波近似惯性流形的存在性, 并作低阶多分辨分析下的数值分析, 数值分析表明小波近似惯性流形更能反映方程的局部行为

关键词: 小波; 小波近似惯性流形; 小波 Galerkin 解; 无穷维动力系统

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

Burgers 方程是一类非常重要的流体方程, 由于其非线性项的影响使得该类方程的动力学行为极其复杂. Teman 等人^[1]研究了该类方程的整体吸引子、惯性流形及近似惯性流形的存在性, 得到该方程的很多有意义的动力学性质. 这些研究均在 Fourier 分析基础上进行的. 随着近年来小波分析在偏微分方程应用中的成功, 小波基取代传统的 Fourier 基, 研究由偏微分方程所描述的动力系统的动力学行为及其局部性质已有这方面的尝试工作. TIAN Li_xin^[2]引入小波近似惯性流形从理论上解决弱阻尼 KdV 方程小波近似惯性流形的存在性, 并用该流形进行小波 Galerkin 解的误差估计. Sonia M. Gomes, Elsa Cortina^[3]研究非线性偏微分方程小波 Galerkin 解及其误差估计. 这些工作都是在理论上进行小波分析在 PDE 中应用的探讨. 本文将研究 Burgers 方程小波近似惯性流形的存在性, 并给出该方程小波近似惯性流形的表示, 作低阶多分辨分析下数值分析, 数值分析表明小波基下的结果比 Fourier 基下的结果更能反映方程的局部行为及动力学行为.

记 $\mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 分别表示整数、实数、复数. $\pi = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 表示一维环面, 记 $C^N(\pi)$ 表示 π 中 N 次连续可微函数的全体, $H^S(\pi)$ 为通常 Sobolev 空间, 仍用 $H^S(\pi)$ 表示 $H^S(\pi)$ 满足如下关系的函数 u : $\int_{\pi} u(x) dx = 0$, $H^S(\pi)$ 上建立如下内积形式的 Hilbert 空间: $(u, v)_S = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |k|^{2S} \times \hat{u}(k) \overline{\hat{v}(k)}$, $\hat{u}(k) = \int_{\pi} u(x) e^{-2ik\pi x} dx$, 设 $\|u\|_S$ 为 $H^S(\pi)$ 中的范数. $\|u\|_S = (u, u)_S^{1/2}$, $S =$

* 收稿日期: 2001_10_09; 修订日期: 2002_05_09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071033); 教育部骨干教师基金资助项目

作者简介: 田立新(1963—), 男, 江苏姜堰人, 教授, 博士, 博士生导师, 从事应用数学中无穷维动力系统方向研究(E-mail: tianlx@uj.s.edu.cn).

1/2 时, $H^0(\pi) = L^2(\pi)$, 记 $L^2(\pi)$ 上通常的内积为 (\cdot, \cdot) , 范数为 $|\cdot|$. 考虑有限维空间

$$V_j = \left\{ v \in C^N(\pi) : v \text{ 为 } [k/2^j, (k+1)/2^{j+1}] \text{ 上阶数 } \leq N+1 \text{ 的分段函数, 节点在 } k/2^j, 0 \leq k \leq 2^j \right\},$$

则成立: $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_i \subset V_{i+1} \subset \dots \subset L^2(\pi)$. 这时 $L^2(\pi) = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$, 定义 $W_j = V_{j+1} \cap (V_j)^\perp$, 则 $L^2(\pi) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j$, \bigoplus 为正交直和, $\{W_j\}$ 形成 $L^2(\pi)$ 的多分辨率分析空间.

本文利用 [4] 中建立的 $L^2(\mathbf{R})$ 中周期正交小波基: Perrier_Basdevant 样条小波基. 由 [2]、[5] 得到对整数 N , 存在函数 $\phi_N \in C^N(\mathbf{R})$, 其中 ϕ_N 为阶数 $\leq N+1$ 的节点在半整数点的 m 阶多项式函数, 使得: (1) 对 $m \leq N+1$, 存在 $\epsilon_N > 0$, $\left| \frac{\partial}{\partial x^m} \phi_N(x) \right| \leq C e^{-\epsilon_N |x|}$; $m \leq N+1$ 时,

$$\int_{\mathbf{R}} x^m \phi_N(x) dx = 0; \text{ 簇 } \left\{ 2^{j/2} \phi_N(2^j x - k) \right\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$$
 为 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交基. 本文为方便省去 ϕ_N 中的 N ,

由 [2]、[5] 得到周期小波为:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \phi(2^j x + 2^j l - k) \quad j \geq 0, 0 \leq k < 2^j. \tag{1}$$

由 [2]、[6] 得到簇 $\{\psi_{j,k}\}_{0 \leq k \leq 2^j}$ 为 W_j 的正交基; 簇 $\{\psi_{j,k}\}_{0 \leq j < +\infty, 0 \leq k \leq 2^j}$ 为 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交基. 取

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \sum_{l < N} \phi(2^j(x+l) - k),$$
 在 [6] 中给出 6 阶样条 P_B 小波函数. 本文的数值分析部分将利用 P_B 样条周期小波作数值计算.

本文分 3 部分. 引言、第 1 节给出 Burgers 方程小波近似惯性流形的定义, 并证明周期边界条件下 Burgers 方程小波近似惯性流形的存在性. 第 2 节, 数值计算低模态下小波近似惯性流形, 并与同阶下 Fourier 基下的近似惯性流形作比较, 发现小波近似惯性流形更能反映 Burgers 方程的局部行为.

1 Burgers 方程的小波近似惯性流形

考虑非线性发展方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda Au + B(u, u) = f \quad (\lambda > 0), \tag{2}$$

$$u(0) = u_0 \in H = L^2[0, 1], \tag{3}$$

其中 A 为 Hilbert 空间 H 上的正定自共轭算子且具有紧的预解式, $D(A) = \{u \in H, Au \in H\}$. 记 $V = D(A^{1/2})$, B 为从 $D(A) \times D(A) \rightarrow D(A^{1/2})$ 的双线性算子. H 中的内积为 (\cdot, \cdot) , 范数为 $|\cdot|$. 进一步对算子 A, B 作假设:

- 1) $(Au, u) \geq \|u\|^2$;
- 2) 记 $b(u, v, w) = (B(u, v), w)$, 对任意 $u, v, w \in V$, 则有 $b(u, v, w) = 0$, 且存在常数 C_1 , 使对任意 $u, v, w \in V$ 成立: $|b(u, v, w)| \leq C_1 |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\| \|w\|^{1/2} \|w\|^{1/2}$;

- 3) 存在 $C_i > 0, i = 2, 3$ 使得对任意 $u, v \in D(A)$ 成立

$$|B(u, v)| \leq C_2 |u|^{1/2} |Au|^{1/2} \|v\|,$$

$$|B(u, v)| \leq C_3 \|u\| \|v\| \left[1 + \lg \left(\frac{|Au|^2}{\lambda \|u\|^2} \right) \right],$$

其中 λ_1 为 A 的最小特征值.

本文研究的 Burgers 方程是方程 (2) ~ (3) 的特殊情况. 在 (2) ~ (3) 中, $A = -\Delta, B(u, v)$

$= uu_x: D(A) \times D(A) \rightarrow D(A)^{1/2}$ 的双线性算子, $f = 0$ 且在周期边界条件下研究我们的问题, 即研究如下的 Burgers 方程:

$$u_t - \nu u_{xx} + uu_x = 0 \quad (u \in L^2[0, 1]), \quad (4)$$

$$u(t, 1+x) = u(t, x), \quad (5)$$

$$u(0, t) = u_0 \in H. \quad (6)$$

这时关于算子 A, B 的假设: 1)、2)、3) 均成立, 由 [1]、[5] 得到如下命题:

命题 1.1 方程 (4) ~ (6) 存在唯一解 $u(x, t)$ 且 $u(x, t) \in C([0, 1], H) \cap L^2([0, 1], D(A)^{1/2})$; 当 $u_0 \in V$ 时成立 $u \in C([0, 1], H) \cap L^2([0, 1], D(A))$.

命题 1.2 存在 V 中的吸引集 $B_0 = \{u \in V \mid |u| \leq M_0, \|u\| \leq M_1\}$ 及 $t_0 > 0$ 使得当 $t \geq t_0$ 时方程 (4) ~ (6) 的任何解 $u(t) \in B_0$, 其中 M_0, M_1 为仅与 $f, |u_0|, \nu, \lambda$ 有关的常数.

关于方程 (4) ~ (6) 已有很多深刻的结果, 见 [1]、[5]. 已获得 Fourier 分析下 Fourier 基的惯性流形及近似惯性流形的存在性. 文 [3] 研究小波基下该类方程的 Galerkin 解, 发现小波基下的数值结果优于 Fourier 基下的数值结果, 并且更能反映该方程的局部行为. 由于小波基在偏微分方程应用中对非线性项的处理比较困难, 增加了本项研究工作的难度. 文 [2] 建立小波近似惯性流形, 研究由偏微分方程描述的无穷维动力系统行为, 但未作数值计算. 本文在 [2]、[3] 研究的基础上建立 Burgers 方程的小波近似惯性流形并作数值计算, 数值计算表明, 所建立的小波近似惯性流形更能反映 Burgers 方程的动力学行为.

定义 1.1 对方程 (4) ~ (6) 的解 $u(t)$, 在 $H = L^2[0, 1]$ 中存在有限维光滑流形 M , 及依赖于初始条件 u_0 的 $t_0 > 0$, 使当 $t \geq t_0$ 时成立 $\text{dist}_H(u(t), M) \leq \eta$, 则称 M 为方程 (4) ~ (6) 的 η 阶近似惯性流形.

由引言得到 $H = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j = \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j$, 设 $u = \sum_{k=0}^j \psi_{j,k} \phi_k$, $k \in V_j$ 代入方程 (4) ~ (6) 得到的 Galerkin 解称为小波 Galerkin 解. V_j 中方程 (4) ~ (6) 的小波 Galerkin 解形成的解空间仍为 V_j . 则 V_j 为 H 的方程 (4) ~ (6) 的光滑流形. 记 P_j 为 H 到 V_j 的正交投影, $Q_j = I - P_j$, 记 P_{V_j} 是 V 到 V_j 的正交投影, $Q_{V_j} = I - P_{V_j}$, 在本文中不作特别说明均省略下标 j . 从而得到方程 (4) ~ (6) 在 H 及 V 上的投影 $p(t), p_1(t)$ 及 $q(t), q_1(t)$ 为:

$$p(t) = Pu(t), \quad p_1(t) = P_1u(t); \quad q(t) = Qu(t), \quad q_1(t) = Q_1u(t).$$

设 $u = p + q$ 满足方程 (4) ~ (6) 且 $p \in V_j, q \in V_j^\perp$, 则方程 (4) ~ (6) 在 P, Q 作用下的投影方程如下

$$p_t - p_{xx} - P u u_x = 0, \quad (7)$$

$$q_t - q_{xx} - Q u u_x = 0. \quad (8)$$

为引入小波近似惯性流形, 如同 Fourier 基下的近似惯性流形的构造一样, 我们引入如下方程

$$q_{xx} + Q p p_x = 0, \quad (9)$$

注意到当 $N \geq m + 1$, 由 [2]、[5] $V_j \subset V$.

定义 1.2 记 $M_j = \{u = p + q, \text{ 其中 } p \in V_j, \text{ 且 } p \text{ 满足 (7), } q \in V_j^\perp \text{ 且 } q \text{ 满足 (9)}\}$, 则称 M_j 为方程 (4) ~ (6) 的小波近似惯性流形.

小波近似惯性流形与近似惯性流形不同之处在于, 小波近似惯性流形比小波 Galerkin 解多了一块补偿部分, 而补偿部分更能反映局部行为.

定理 1.1 1) $N \geq m + 1$ 时, 存在仅与初始条件 u_0 有关的 t_0 , 当 $t \geq t_0$ 时成立, 在 V_j 上

$$|q(t)|, |q_1(t)|, |q'(t)|, |q_1'(t)| \leq c \frac{\sqrt{j}}{16^j};$$

$$\|q(t)\|, \|q_1(t)\| \leq c \frac{\sqrt{j}}{16^j},$$

其中 c 为与初始条件有关的常数, $q'(t) = dq/dt$, $q_1'(t) = dq_1/dt$.

2) $N \geq m + 1$ 时, 方程(4) ~ (6) 在 H 中具有 $\sqrt{j}/16^j = \eta$ 阶的光滑近似惯性流形又是小波近似惯性流形; 同时方程(4) ~ (6) 在 V 中具有 $\sqrt{j}/16^j = \eta$ 阶的小波近似惯性流形.

证明 $H = L^2[0, 1]$, $QH = V_j^\perp = \bigoplus_{l \geq j+1} w_l$, 对任意 $z \in QH$,

$$z = \sum_{l=j+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} v_{l,k} \Phi_{l,k}, \quad |z|^2 = \sum_{l,k} |v_{l,k}|^2.$$

$$\text{由[2]} \quad \sum_{l,k} 4^l |v_{l,k}|^2 \leq C_1 \|z\|^2, \quad \sum_{l=j+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^j} 4^{2l} |v_{l,k}|^2 = 4^{2j} \sum_{l=j+1}^{\infty} 4^{2(l-j)} |v_{l,k}|^2,$$

$$\text{则} \quad |z|^2 \leq \sum_{l=j}^{\infty} 4^{2(l-j)} |v_{l,k}|^2 \leq \frac{C_2}{4^{2j}} \|z\|^2, \quad (10)$$

同理存在 C_3 , 对

$$z_1 \in Q_1 V, \quad |z_1|^2 \leq C_3 \frac{\|z\|^2}{4^{2j}}. \quad (11)$$

方程(4)与 z_1 作内积, $z_1 \in Q_1 V$,

$$y \|z_1\|^2 = - \left[\frac{du}{dt}, z_1 \right] - (B(u, u), z_1). \quad (12)$$

因为方程(4) ~ (6) 存在整体吸引子(见[2],[5]), 则

$$|B(u, u)| \leq C_4 \|u\| \leq M_0. \quad (13)$$

下面证明 $|du/dt| \leq C_5$. 记 $0 < h < t_0$, $w(t) = u(t+h)$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{u(t) - w(t)}{h} \right|^2 + y_0 \left| \frac{u(t) - w(t)}{h} \right|^2 \leq \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{u(t) - w(t)}{h} \right|^2 + \varepsilon \left[A \frac{u(t) - w(t)}{h}, \frac{u(t) - w(t)}{h} \right] \leq \\ & \frac{1}{h^2} (B(u(t) - w(t), u(t) - w(t)), u(t) - w(t)) \leq \\ & \frac{1}{k} |B(u(t) - w(t), u(t) - w(t))|^2 + k \left| \frac{u(t) - w(t)}{h} \right|^2. \end{aligned}$$

令 $k = y_0/2$, 由(13)式得到:

$$|B(u(t) - w(t), u(t) - w(t))| \leq M_1.$$

记 $y = [u(t) - w(t)]/h$, 则有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} y + \frac{y_0}{2} y \leq M_1 \quad \text{或} \quad \frac{d}{dt} y + y_0 y \leq 2M_1,$$

由 Gronwall 不等式, 则

$$y = y(0) e^{-y_0 t} + \frac{M_1}{y_0} (1 - e^{-y_0 t}) \leq C_4,$$

令 $h \rightarrow 0$, 则得到 $|du/dt| \leq C_4$. 由(12)式得到, $\|z_1\|^2 \leq C_5 |z_1| \leq C_5/4^j$. 从而由(11)

得到 $|z_1| \leq C_5/16^j$. 设 $z = Qz_1$, 则 $|z| \leq |z_1| \leq C_5/16^j$, 所以 $|z| \leq C_5/16^j$.

设 $H_c, V_c, V_c^j, D(A^{V^2})_c$ 是 $H, V, V^j, D(A^{V^2})$ 的复数化空间. 在 H_c 上, 元素 $u_1 + iu_2 \in H_c$, 算子 A 自然定义为 $A(u_1 + iu_2) = Au_1 + iAu_2$. 若 $u_1 + iu_2, v_1 + iv_2 \in H_c$, 定义内积为

$$(u_1 + iu_2, v_1 + iv_2) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2) + i[(u_2, v_1) - (u_1, v_2)],$$

易得簇 $\{\phi_{m,k}\}_{0 \leq m \leq j, 0 \leq k \leq 2^m}$ 仍是 V_j^c 中正交基, 簇 $\{\psi_{m,k}\}_{0 \leq m \leq \infty, 0 \leq k \leq 2^m}$ 是 $L^2(\Omega)_c$ 中正交基, 并且 y_1, z_1 可以被扩张到与 u 扩张有相同定义域对时间的解析函数, 分别设 Y_1, Z_1, U_1 是 y_1, z_1, u_1 的扩张. 对

$$\rho \in \Gamma = \left\{ \rho \in \Gamma: \operatorname{Re} \rho > 0, |\operatorname{Im} \rho| \leq T_0, \text{ 若 } \operatorname{Re} \rho > T_0; \right. \\ \left. |\operatorname{Im} \rho| \leq \operatorname{Re} \rho, \text{ 若 } \operatorname{Re} \rho \leq T_0 \right\},$$

方程(4)复数化为:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} + \varepsilon U + B(U, U) = 0. \quad (14)$$

(14)式与 Z_1 作内积, 则得到

$$\varepsilon \|Z_1\|^2 \leq |(B(U, U), Z_1)| + \left| \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}, Z_1 \right) \right| \leq \\ |B(U, U)| \|Z_1\| + \left| \frac{\partial U}{\partial \rho} \right| \|Z_1\|. \quad (15)$$

因 $|B(U, U)| \leq C \|U\| \leq M_1$, 与上述证明 $|dz/dt| \leq C_4$ 类似可得 $|dU/d\rho| \leq C_6$, 从而由(15)式得到: $\|Z_1\| \leq C_8 \|Z_1\| \leq C_9 \|Z_1\|/4^j, \|Z_1\| \leq C_{10}/4^j$. 设 $Z = QZ_1$, 则 $\|Z\| \leq \|Z_1\| \leq C_9/16^j$, 同理可得: $\|Z\|, \|Z_1\| \leq C_{10}/4^j$. 当 $\rho \in \Gamma$ 时, 由 Cauchy 积分公式, 对 Γ 中的中心在 ρ 半径为 $T_0/2$ 的球 B 积分得到

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| \leq C_{11} \sup_{p \in B} |Z(p)| \leq C_{12} \|Z\| \leq \frac{C_9}{16^j},$$

同理 $\left| \frac{dz_1}{dt} \right| \leq \frac{C_9}{16^j}.$

2 小波近似惯性流形的数值分析

$H = L^2[0, 1]$ 中多分辨率簇 $\{V_j, j \in \mathbb{N}\}$, 周期小波基为 $\{\phi_{k,l}\}_{0 \leq k \leq \infty, 0 \leq l \leq 2^j}$, 对任意的 $u = p + q \in H$, 其中 $p \in V_j, q \in V_j^\perp$, 则

$$p = \sum_{0 \leq k \leq j, 0 \leq l \leq 2^k} v_{kl}, \quad q = \sum_{j+1 \leq k \leq \infty, 0 \leq l \leq 2^k} v_{kl}.$$

由定理 1.1, 方程(4)、(5)、(6) 存在小波近似惯性流形, 当投影空间取为 V_j 时, 得到 V_j 上的与 j 有关的小波近似惯性流形表示式, 本节给出这一表示, 并就低模下 $j = 1$ 进行数值计算. 数值计算的结果表明小波下 Burgers 方程的动力学行为比 Fourier 基下更能反映局部行为.

定理 2.1 $N \geq m + 1$ 时, 方程(4)、(5)、(6) 在 H 中具有阶数 $\sqrt{j}/16^j$ 的小波近似惯性流形为

$$M = \left\{ u = p + q, \text{ 其中 } p \in V_j, q \in V_j^\perp \right\},$$

且 p, q 满足下述方程

$$\begin{cases} p' - \Phi_{xx} - P(p+q)(p+q)_x = 0, \\ q_{xx} + Qpp_x = 0, \end{cases}$$

其中 $p = \sum_{0 \leq k \leq j, 0 \leq l \leq 2^k} a_{kl} v_{kl}, \quad q = \sum_{j+1 \leq k \leq \infty, 0 \leq l \leq 2^k} a_{kl} v_{kl}.$

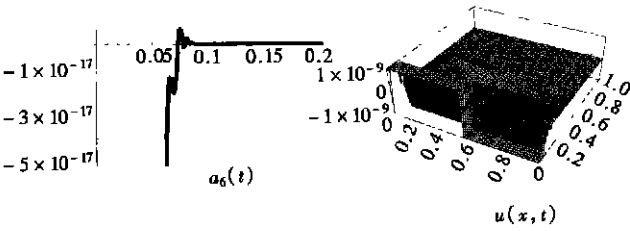
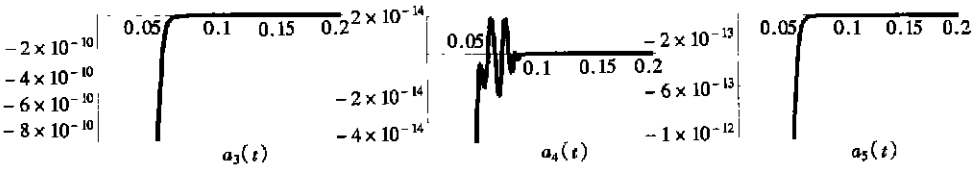
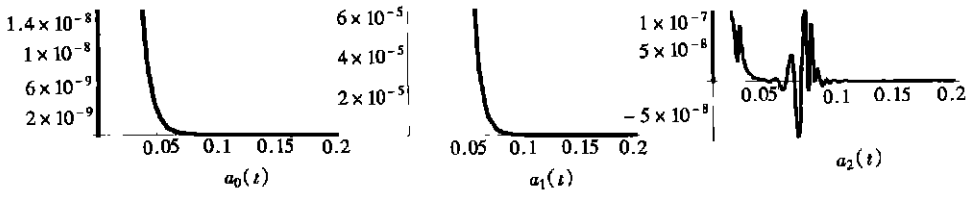
定理 2.1 由第 1 节易得, 为方便本节取 $j = 1$ 作数值分析, 这时投影空间的小波基取为低模态.

定理 2.2 当 $j = 1, N \geq 2$ 时, Burgers 方程的小波近似惯性流形为

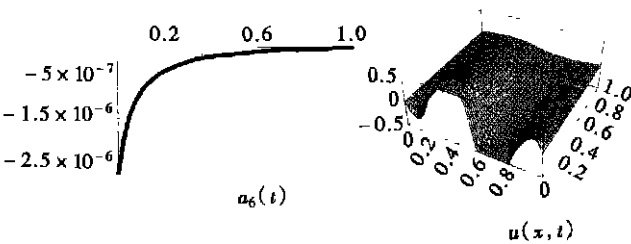
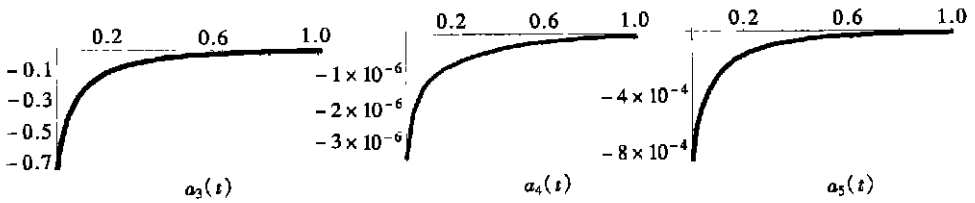
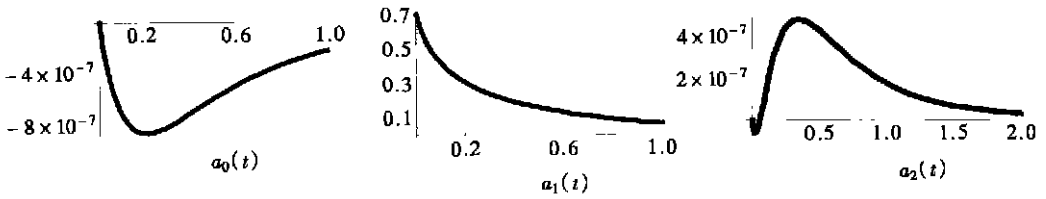
$$M = \left\{ u = p + q, \text{ 其中 } p \in V_1, q \in V_1^\perp, \text{ 且 } p = a_0(t) \phi_{00}(x) + a_1(t) \phi_{01}(x) + a_2(t) \phi_{11}(x), q = a_3(t) \phi_{02}(x) + a_4(t) \phi_{12}(x) + a_5(t) \phi_{22}(x) + a_6(t) \phi_{32}(x) \right\},$$

具体形式如下:

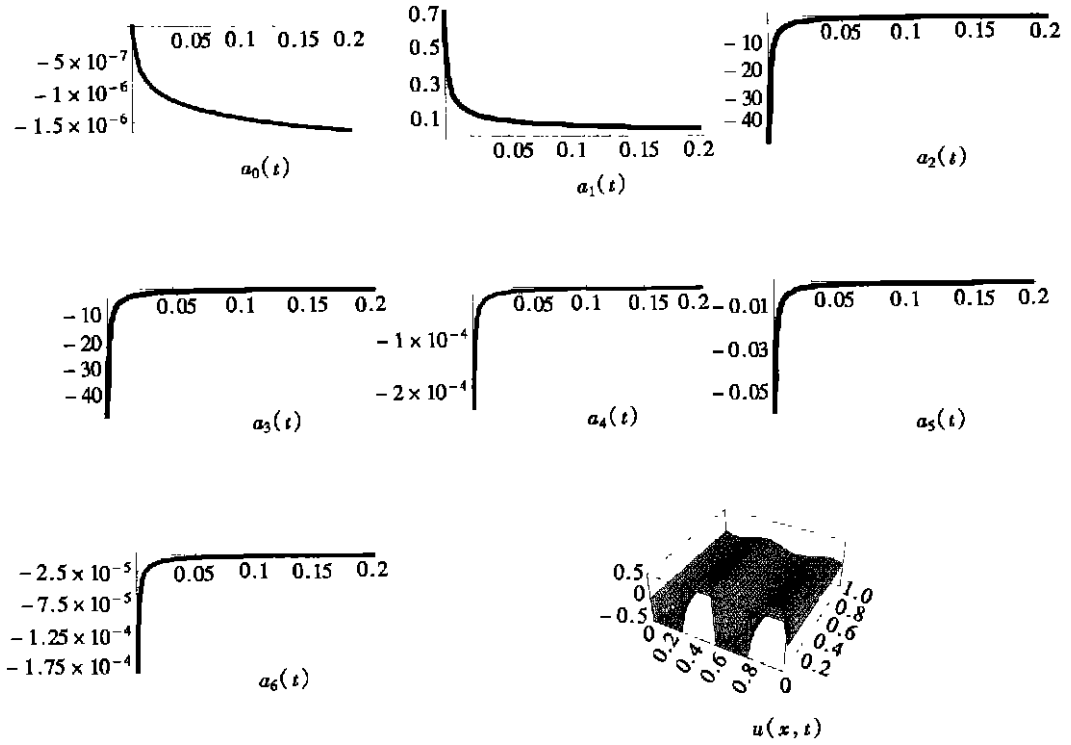
$$\begin{aligned} \dot{a}_0(t) &= \left[157.9160 \gamma a_0(t) + \frac{0.1250 a_0(t)^3}{\gamma} - 0.0348 a_0(t) a_1(t) + 0.00003 a_1(t)^2 - \frac{0.1249 a_0(t) a_1(t)^2}{\gamma} - 0.00013 a_0(t) a_2(t) - \frac{0.0022 a_0(t)^2 a_2(t)}{\gamma} - 8.8960 a_1(t) a_2(t) + \frac{0.0024 a_0(t)^2 a_1(t) a_2(t)}{\gamma^2} + \frac{0.0015 a_1(t)^2 a_2(t)}{\gamma} - \frac{0.0024 a_1(t)^3 a_2(t)}{\gamma^2} - 0.00011 a_2(t)^2 + \frac{0.1640 a_0(t) a_2(t)^2}{\gamma} + \frac{0.00004 a_0(t) a_1(t) a_2(t)^2}{\gamma^2} \right], \\ \dot{a}_1(t) &= \left[157.6100 \gamma a_1(t) + 0.00003 a_0(t) a_1(t) - \frac{0.1259 a_0(t)^2 a_1(t)}{\gamma} + \frac{0.1259 a_1(t)^3}{\gamma} - 8.8613 a_0(t) a_2(t) - \frac{0.0023 a_0(t)^3 a_2(t)}{\gamma^2} - \frac{0.0008 a_0(t) a_1(t) a_2(t)}{\gamma} + \frac{0.0024 a_0(t) a_1(t)^2 a_2(t)}{\gamma^2} + \frac{0.1653 a_1(t) a_2(t)^2}{\gamma} \right], \\ \dot{a}_2(t) &= \left[-\frac{0.0007 a_0(t)^3}{\gamma} + 17.6881 a_0(t) a_1(t) + \frac{0.0002 a_0(t) a_1(t)^2}{\gamma} + 631.6642 \gamma a_2(t) + \frac{0.3295 a_0(t)^2 a_2(t)}{\gamma} - 0.0347 a_1(t) a_2(t) + \frac{0.00002 a_0(t)^2 a_1(t) a_2(t)}{\gamma^2} + \frac{0.3329 a_1(t)^2 a_2(t)}{\gamma} - \frac{0.00002 a_1(t)^3 a_2(t)}{\gamma^2} - \frac{0.0018 a_0(t) a_2(t)^2}{\gamma} + \frac{0.0006 a_0(t) a_1(t) a_2(t)^2}{\gamma^2} \right], \\ a_3(t) &= \frac{0.0141 a_0(t)^2}{\gamma} - \frac{8.3705^{-8a_0(t)a_1(t)}}{\gamma} - \frac{0.0141 a_1(t)^2}{\gamma} + \frac{0.00005 a_0(t) a_2(t)}{\gamma} - \frac{2.2689^{-7a_1(t)a_2(t)}}{\gamma} - \frac{1.5751^{-9a_2(t)^2}}{\gamma}, \\ a_4(t) &= \frac{6.7707^{-8a_0(t)^2}}{\gamma} + \frac{0.00003 a_0(t) a_1(t)}{\gamma} - \frac{6.7242^{-8a_1(t)^2}}{\gamma} + \frac{1.8711^{-7a_0(t)a_2(t)}}{\gamma} - \frac{0.0186 a_1(t) a_2(t)}{\gamma} + \frac{7.9232^{-8a_2(t)^2}}{\gamma}, \\ a_5(t) &= \frac{0.00002 a_0(t)^2}{\gamma} - \frac{5.1484^{-8a_0(t)a_1(t)}}{\gamma} - \frac{0.00002 a_1(t)^2}{\gamma} + \frac{0.0187 a_0(t) a_2(t)}{\gamma} - \frac{1.3955^{-7a_1(t)a_2(t)}}{\gamma} - \frac{9.6881^{-10a_2(t)^2}}{\gamma}, \end{aligned}$$



(a) $\gamma = 1$



(b) $\gamma = 0.01$



(c) $\nu = 0.0001$

(初始条件为 $a_1(0) = a_3(0) = 0, a_2(0) = 1/\sqrt{2}$), $a_i(t)$ 为系数, $u(x, t)$ 为数值解

图 1 小波基下 Burgers 方程的近似惯性流形

$$a_6(t) = \frac{5.3589 a_0^8(t)^2}{\nu} + \frac{0.00001 a_0(t) a_1(t)}{\nu} - \frac{5.3339 a_1^8(t)^2}{\nu} + \frac{1.3243 a_0^7(t) a_2(t)}{\nu} + \frac{0.00001 a_1(t) a_2(t)}{\nu} + \frac{4.2884 a_2^8(t)^2}{\nu}$$

在 $\nu = 0.0001$, 小波基下 Burgers 方程的近似惯性流形(初始条件为 $a_1(0) = a_3(0) = 0, a_2(0) = 1/\sqrt{2}$, $a_i(t)$ 为系数, $u(x, t)$ 为数值解) 如图 1 所示。

为比较我们给出的 Fourier 基下近似惯性流形, 关于 Fourier 基下近似惯性流形 M_0 的存在性^[7]。这时有

定理 2.3 方程(4)、(5)、(6)在 Fourier 基下近似惯性流形为

$$M_0 = \left\{ u = p + q, \text{ 其中 } p \in H_N, q \in H_N^\perp \right\},$$

且 p, q 满足下述方程

$$\begin{cases} p' - \Phi_{xx} - P(p+q)(p+q)_x = 0, \\ q_{xx} + Qpp_x = 0, \end{cases}$$

其中 H_N 为算子 $A = -\Delta$ 按特征值从小到大的特征向量张成的 $2N + 1$ 的子空间, H_N^\perp 在 $L^2[0, 1]$ 中的正交补空间, 即

$$p = a_0(t) + \sum_{n=1}^N (a_n(t) \cos(n\pi x) + b_n(t) \sin(n\pi x)),$$

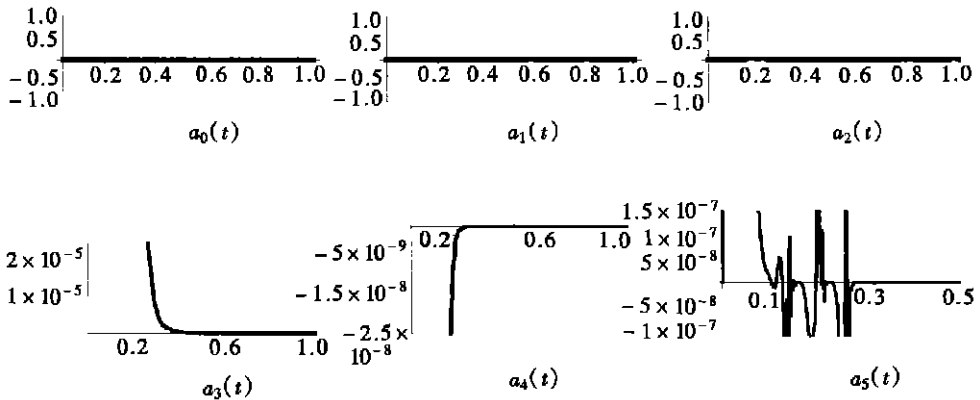
$$q = \sum_{n=N+1}^{2N} (a_n(t) \cos(n\pi x) + b_n(t) \sin(n\pi x)) \cdot$$

定理 2.4 当 $N = 1$, 方程(4)、(5)、(6) 在 Fourier 基的低模态下的近似惯性流形为

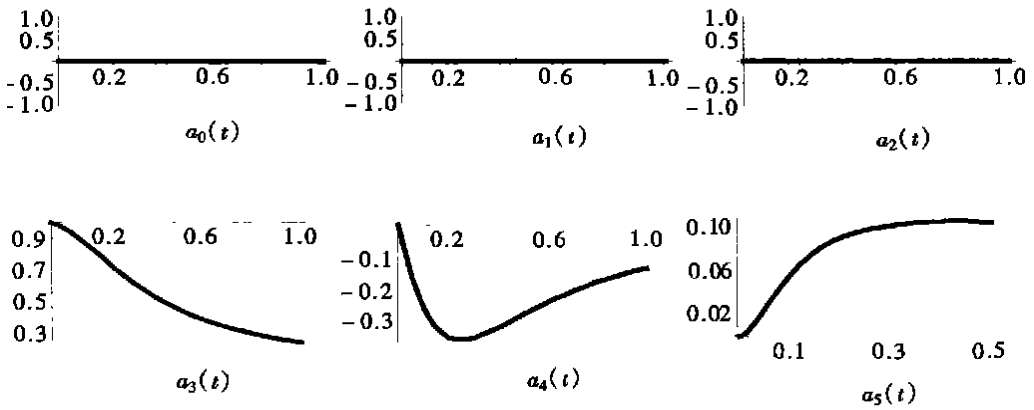
$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) = & -4\pi^2 \nu a_1(t) - 2\pi a_0(t) b_1(t) + \pi a_2(t) b_1(t) - \pi a_1(t) b_2(t) + \pi a_3(t) b_2(t) - \\ & \pi a_2(t) b_3(t) - \frac{1}{16\nu} (b_3(t) (a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t))) + \\ & \frac{1}{32\nu} (a_3(t) (-a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + b_2(t)^2 + 2b_1(t) b_3(t))) + \\ & \frac{1}{640\pi \nu^2} ((a_3(t) b_2(t) + a_2(t) b_3(t)) (-a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + b_2(t)^2 + \\ & 2b_1(t) b_3(t))) + \frac{1}{480\pi \nu^2} (a_3(t) b_3(t) (-a_2(t) a_3(t) + b_2(t) b_3(t))) - \\ & \frac{1}{320\pi \nu^2} ((a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t)) (-a_2(t) a_3(t) + b_2(t) b_3(t))) - \\ & \frac{1}{960\pi \nu^2} ((a_3(t) b_2(t) + a_2(t) b_3(t)) (-a_3(t)^2 + b_3(t)^2)), \\ \dot{a}_2(t) = & -16\pi^2 \nu a_2(t) - 2\pi a_1(t) b_1(t) + 2\pi a_3(t) b_1(t) - 4\pi a_0(t) b_2(t) - \\ & 2\pi a_1(t) b_3(t) - \frac{1}{8\nu} (b_2(t) (a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t))) - \\ & \frac{b_3(t) (a_3(t) b_2(t) + a_2(t) b_3(t))}{10\nu} + \frac{1}{16\nu} (a_2(t) (-a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + \\ & b_2(t)^2 + 2b_1(t) b_3(t))) + \frac{1}{384\pi \nu^2} (a_3(t) b_3(t) (-a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + \\ & b_2(t)^2 + 2b_1(t) b_3(t))) + \frac{a_3(t) (-a_2(t) a_3(t) + b_2(t) b_3(t))}{10\nu} - \\ & \frac{1}{384\pi \nu^2} ((a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t)) (-a_3(t)^2 + b_3(t)^2)), \\ \dot{a}_3(t) = & -36\pi^2 \nu a_3(t) - 3\pi a_2(t) b_1(t) - 3\pi a_1(t) b_2(t) - 6\pi a_0(t) b_3(t) - \\ & \frac{a_3(t) b_3(t)^2}{8\nu} - \frac{1}{16\nu} (3b_1(t) (a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t))) - \\ & \frac{3b_2(t) (a_3(t) b_2(t) + a_2(t) b_3(t))}{20\nu} + \frac{1}{32\nu} (3a_1(t) (-a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + \\ & b_2(t)^2 + 2b_1(t) b_3(t))) + \frac{3a_2(t) (-a_2(t) a_3(t) + b_2(t) b_3(t))}{20\nu} + \\ & \frac{a_3(t) (-a_3(t)^2 + b_3(t)^2)}{16\nu}, \\ \dot{b}_1(t) = & 2\pi a_0(t) a_1(t) + \pi a_1(t) a_2(t) + \pi a_2(t) a_3(t) - 4\pi^2 \nu b_1(t) + \pi b_1(t) b_2(t) + \\ & \pi b_2(t) b_3(t) - \frac{1}{16\nu} (a_3(t) (a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t))) + \\ & \frac{a_3(t) b_3(t) (a_3(t) b_2(t) + a_2(t) b_3(t))}{480\pi \nu^2} + \frac{1}{320\pi \nu^2} ((a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + \\ & a_1(t) b_3(t)) (a_3(t) b_2(t) + a_2(t) b_3(t))) - \frac{1}{32\nu} (b_3(t) (-a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + \\ & b_2(t)^2 + 2b_1(t) b_3(t))) + \frac{1}{640\pi \nu^2} ((-a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + b_2(t)^2 + \\ & 2b_1(t) b_3(t)) (-a_2(t) a_3(t) + b_2(t) b_3(t))) + \frac{1}{960\pi \nu^2} ((-a_2(t) a_3(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b_2(t) b_3(t))(- a_3(t)^2 + b_3(t)^2)), \\
 \dot{b}_2(t) = & \pi a_1(t)^2 + 4\pi a_0(t) a_2(t) + 2\pi a_1(t) a_3(t) - \pi b_1(t)^2 - 16\pi^2 \gamma b_2(t) + \\
 & 2\pi b_1(t) b_3(t) - \frac{1}{8\gamma}(a_2(t)(a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t))) + \\
 & \frac{1}{192\pi\gamma^2}(a_3(t) b_3(t)(a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t))) - \\
 & \frac{a_3(t)(a_3(t) b_2(t) + a_2(t) b_3(t))}{10\gamma} - \frac{1}{16\gamma}(b_2(t)(- a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + \\
 & b_2(t)^2 + 2b_1(t) b_3(t))) - \frac{b_3(t)(- a_2(t) a_3(t) + b_2(t) b_3(t))}{10\gamma} + \\
 & \frac{1}{768\pi\gamma^2}((- a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + b_2(t)^2 + 2b_1(t) b_3(t))(- a_3(t)^2 + b_3(t)^2)), \\
 \dot{b}_3(t) = & 3\pi a_1(t) a_2(t) + 6\pi a_0(t) a_3(t) - 3\pi b_1(t) b_2(t) - 36\pi^2 \gamma b_3(t) - \\
 & \frac{a_3(t)^2 b_3(t)}{8\gamma} - \frac{1}{16\gamma}(3a_1(t)(a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t))) - \\
 & \frac{3a_2(t)(a_3(t) b_2(t) + a_2(t) b_3(t))}{20\gamma} - \frac{1}{32\gamma}(3b_1(t)(- a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + \\
 & b_2(t)^2 + 2b_1(t) b_3(t))) - \frac{3b_2(t)(- a_2(t) a_3(t) + b_2(t) b_3(t))}{20\gamma} - \\
 & \frac{b_3(t)(- a_3(t)^2 + b_3(t)^2)}{16\gamma}, \\
 a_4(t) = & - \frac{a_3(t) b_1(t) + a_2(t) b_2(t) + a_1(t) b_3(t)}{16\pi\gamma}, \\
 b_4(t) = & - \frac{1}{32\pi\gamma}(- a_2(t)^2 - 2a_1(t) a_3(t) + b_2(t)^2 + 2b_1(t) b_3(t)), \\
 a_5(t) = & - \frac{a_3(t) b_2(t) + a_2(t) b_3(t)}{20\pi\gamma}, \quad b_5(t) = - \frac{- a_2(t) a_3(t) + b_2(t) b_3(t)}{20\pi\gamma}, \\
 a_6(t) = & - \frac{a_3(t) b_3(t)}{24\pi\gamma}, \quad b_6(t) = - \frac{- a_3(t)^2 + b_3(t)^2}{48\pi\gamma}.
 \end{aligned}$$

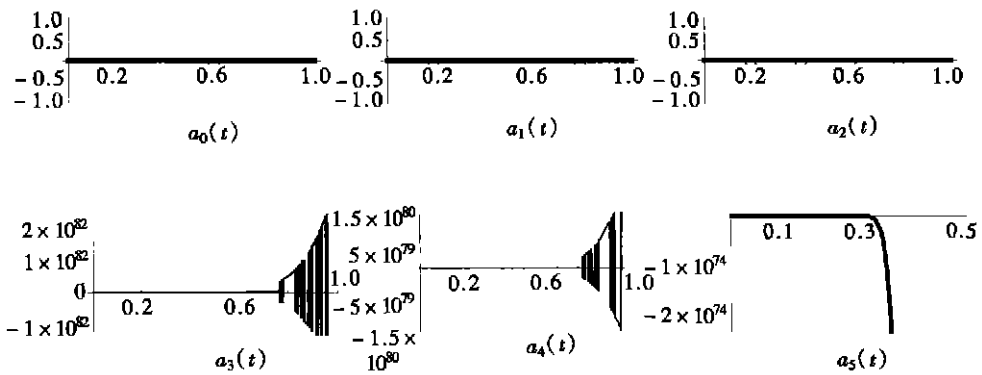
Fourier 基下 Burgers 方程的近似惯性流形(初始条件为 $a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = b_2(0) = b_3(0) = 0, b_1(0) = 1, a_i(t)$ 为系数, $u(x, t)$ 为数值解) 如图 2 所示.



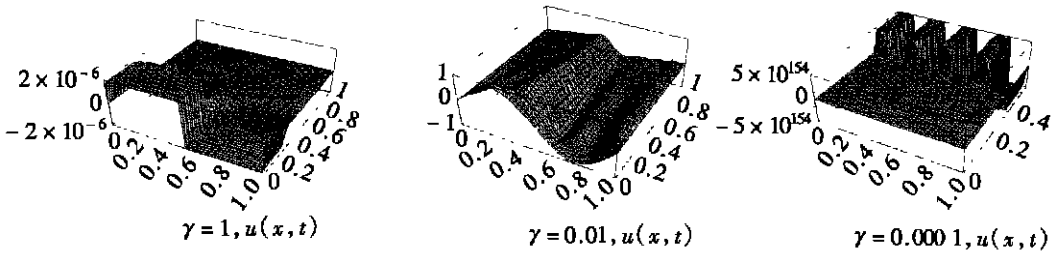
(a) $\gamma = 1$



(b) $\gamma = 0.01$



(c) $\gamma = 0.0001$



(初始条件为 $a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = b_2(0) = b_3(0) = 0,$

$b_1(0) = 1), a_i(t)$ 为系数, $u(x, t)$ 为数值解

图2 Fourier 基下 Burgers 方程的近似惯性流形

[参 考 文 献]

[1] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1988.

[2] TIAN Li_xin. Wavelet approximate inertial manifold in nonlinear solitary wave equation[J]. J Math Phy, 2000, 41(8): 5771—5792.

[3] Gomes Soana M, Cortina Elsa. Convergence estimate for the wavelet Galerkin method[J]. SIAM J Num Anal, 1996, 33(1): 149—161.

[4] Perrier V, Basdevant C. Periodical wavelet analysis[J]. Rech Aerosp, 1989, 3(1): 54—67.

- [5] Bacry E, Mallat S, Colau G, Papauw. A wavelet based space-time adaptive numerical method for partial differential equations[J]. *Math Mod Numer Anal*, 1992, **26**(4): 793—834.
- [6] 许伯强, 田立新. 周期小波基下 Burgers 方程的数值解[J]. *江苏理工大学学报*, 2001, **22**(3): 1—6.
- [7] 田立新, 储志俊, 刘曾荣, 等. 低模态下弱阻尼 KdV 方程约化形式的数值分析[J]. *应用数学和力学*, 2000, **21**(10): 1013—1020.

Wavelet Approximate Inertial Manifold and Numerical Solution of Burgers' Equation

TIAN Li_xin¹, XU Bo_qiang¹, LIU Zeng_rong²

(1. Faculty of Science, Jiangsu University of Science and Technology,
Zhenjiang, Jiangsu 212013, P R China;

2 Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200018, P R China)

Abstract: The existence of approximate inertial manifold using wavelet to Burgers' equation, and numerical solution under multiresolution analysis with the low modes were studied. It is shown that the Burgers' equation has a good localization property of the numerical solution distinguishably.

Key words: wavelet; wavelet approximate inertial manifold (WAIM); wavelet Galerkin solution; infinite dimensional dynamic system