应用数学和力学,第 23 卷 第 11 期(2002 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 11_1188_07

一类高阶时滞差分方程的有界持久性与全局渐近稳定性*

李先义[1,2]

(1. 南华大学 数理部, 湖南衡阳 421001; 2. 华东师范大学 数学系, 上海 200062)

(周焕文推荐)

摘要: 获得一类高阶时滞差分方程解的有界持久性和全局渐近稳定性的充分条件; 所得结果部分地解决了 G. Ladas 的 2 个公开问题, 推广了一些已知结果•

关 键 词: 时滞差分方程; 有界持久性; 全局渐近稳定性; 公开问题

中图分类号: O175.7 文献标识码: A

引 言

考虑下列高阶时滞差分方程

$$x_{n+1} = \frac{A_0}{x_n^{p_0}} + \frac{A_1}{x_{n-1}^{p_1}} + \cdots + \frac{A_k}{x_{n-k}^{p_k}} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1}$$

其中

$$A_i, p_i \in [0, \infty), \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots k; k \in \{1, 2, \cdots\}), \tag{2}$$

初值 $x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_{-1}, x_0$ 为任意正数•

方程(1) $k = 1$ 时的特殊情况已被文献广泛地研究过• 例如, 文[1, 2] 得到了当 $A_0, A_1 \in (0, \infty)$, $p_0, p_1 \in (0, 1)$ 时, 方程(1) 的正平衡点是其一切正解的全局吸引子; 文[2] 还证明了 $p_0 = p_1 = 1$ 时方程(1) 的正平衡点是全局渐近稳定的• 对 $A_0, A_1 \in (0, \infty)$, $p_0 = 2$, $p_1 = 1/2$ 时的一些结果及公开问题, 可见文[3, 4]; 当 $p_1 = 0$ 时的一些结果, 见文[5, 6]•

研究方程(1) $k = 1$ 时的情况相对来说是容易的• 但是, 正如 G. Ladas 在文[7] 所说, 我们的最终目标是彻底弄懂方程(1) 中参数取各种值时解的有界性、稳定性及周期性的情况•

对方程(1), G. Ladas 在文[7] 中提出了如下三个公开问题:

公开问题 A 假定(2) 成立, 得到方程(1) 的每个正解有界持久的必要充分条件•

公开问题 B 假定(2) 成立, 并且 $k \geqslant 3$, 得到方程(1) 具有无界正解的充分条件•

公开问题 C 假定(2) 成立, 得到方程(1) 的正平衡点是其所有正解的全局吸引子的必要充分条件•

---

* 收稿日期: 2001_03_27; 修订日期: 2002_06_18

基金项目: 国家数学天元基金资助项目(TY10026002_01_05_03), 湖南省教委科研基金资助项目(81_99C146)

作者简介: 李先义(1966—), 湖南衡县人, 副教授, 博士(E_mail: xianyili6590@sina.com.cn).

公开问题 B 已被本文作者在[8] 中彻底解决• 然而对公开问题 A 和 C, 据我们所知, 目前未见任何结果, 尤其 $k \geqslant 3$时的结果• 本文的目标是对任意的正整数 k 研究过方(1) 解的有界持久性和全局渐近稳定性• 我们的结果部分地解决了公开问题 A 和公开问题 C, 推广了文[2, 9] 中相应的结果•

在条件(2) 下, 不失一般性, 可设 $A_k > 0$, 那么进一步可假设 $A_k = 1$• 故后文中仅考虑 $A_k \equiv 1$•

方程(1) 存在唯一的正平衡点 x, 满足

$$x = \frac{A_0}{x^{p_0}} + \frac{A_1}{x^{p_1}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{x^{p_{k-1}}} + \frac{A_k}{x^{p_k}}. \tag{3}$$

显然,

$$1 < x < A_0 + A_1 + \cdots + A_k.$$

由方程(1) 的一个解, 我们可以定义一实值序列$\{x_n\}$: 对所有的 $n \in \{-k, -k+1, \cdots\}$, x_n 有定义, 而当 $n \in \{1, 2, \cdots\}$ 时 x_n 满足方程(1), 这里$x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_{-1}, x_0$是初值• 由于方程(1) 是一个递归关系, 自然满足解的存在唯一性• 并且在条件(2) 下, 方程(1) 的任一解为正数, 除了 $A_0 = A_1 = \cdots = A_k = 0$ 的特殊情况•

为了后文叙述的方便, 我们给出下列假设:

C) $A_i, p_i \in (0, +\infty)$, $(i = 0, 1, 2, \cdots, k, k \in \{1, 2, \cdots\})$•

称方程(1) 的一个解$\{x_n\}$是有界持久的, 如果存在正常数 P, Q: $0 < P < Q < \infty$, 使得

$$P \leqslant x_n \leqslant Q, \quad n = -k, -k+1, \cdots$$

对本文中的其它概念, 看文[2, 3, 4, 9, 10]•

1 有界持久性

在阐述方程(1) 的有界持久性之前, 我们需要下列两个引理; 这两个引理总结了方程(1) 半环的一些重要性质, 对证明方程(1) 的有界持久性是非常有用的•

引理 1 假定条件(C) 成立• 那么下列结论成立:

a) 方程(1) 的非平凡正解的每个半环至多包含 $k+1$ 项;

b) 如果对某个 $N \geqslant 0$, $x_N \leqslant \min\{(A_i/(A_0 + A_1 + \cdots + A_k))^{1/p_i}, i = 0, 1, \cdots, k\}$, 那么 $x_{N+i+1} \in (x, \infty)$, $i = 0, 1, \cdots, k$;

c) 如果对某个 $N \geqslant 0$, $x_N \leqslant x$, 那么 $x_{N+i+1} > A_i/(A_0 + A_1 + \cdots + A_k)^{p_i}$, $i = 0, 1, \cdots, k$;

d) 如果对某个 $N \geqslant 1$, $x_N \leqslant \min\{(A_i/(A_0 + A_1 + \cdots + A_k))^{1/p_i}, A_i/(A_0 + A_1 + \cdots + A_k)^{p_i}, i = 0, 1, \cdots, k\}$, 那么 $x_{N-i-1}, x_{N+i+1} \in (x, \infty)$, $i = 0, 1, \cdots, k$•

证明 a) 设$\{x_n\}$是方程(1) 的一个非平凡正解, 若对某个$N \geqslant -k$, $x_N, x_{N+1} \cdots, x_{N+k} \geqslant x$ 但不全为 x, 那么

$$x_{N+k+1} = \frac{A_0}{x_{N+k}^{p_0}} + \frac{A_1}{x_{N+k-1}^{p_1}} + \cdots + \frac{A_k}{x_N^{p_k}} < \frac{A_0}{x^{p_0}} + \frac{A_1}{x^{p_1}} + \cdots + \frac{A_k}{x^{p_k}} = x.$$

类似地, 可以证明 $x_N, x_{N+1}, \cdots, x_{N+k} \leqslant x$ 但不全为x 的情形•

b) 如果对某个 $N \geqslant 0$, $x_N \leqslant \min\{(A_i/(A_0 + A_1 + \cdots + A_k))^{1/p_i}, i = 0, 1, \cdots, k\}$, 那么

$$x_{N+i+1} = \frac{A_0}{x_{N+i}^{p_0}} + \frac{A_1}{x_{N+i-1}^{p_1}} + \cdots + \frac{A_i}{x_N^{p_i}} + \cdots + \frac{A_k}{x_{N+i-k}^{p_k}} >$$

$$\frac{A_i}{x_N^{p_i}} \geqslant \frac{A_i}{A_i/(A_0+A_1+\cdots+A_k)} > x \quad (i=0,1,\cdots,k).$$

c) 如果对某个 $N\geqslant 0$, $x_N\leqslant x$, 那么 $x_{N+i+1} > A_i/x_N^{p_i} \geqslant A_i/x^{p_i} > A_i/(A_0+A_1+\cdots+A_k)^{p_i}$, $i=0,1,\cdots,k$.

d) 如果对某个 $N\geqslant 0$,

$$x_N \leqslant \min\left\{\left(\frac{A_i}{A_0+A_1+\cdots+A_k)}\right)^{1/p_i}, \frac{A_i}{(A_0+A_1+\cdots+A_k)^{p_i}}, i=0,1,\cdots,k\right\},$$

那么 $x_{N+i+1} > A_i/x_N^{p_i} \geqslant A_i/(A_i/(A_0+A_1+\cdots+A_k)) = A_0+A_1+\cdots+A_k > x \quad (i=0,1,\cdots,k)$.

由于 $A_i/x_{N-i-1}^{p_i} < x_N \leqslant A_i/(A_0+A_1+\cdots+A_k)^{p_i}$, $i=0,1,\cdots,k$, 因此

$$x_{N-i-1} > A_0+A_1+\cdots+A_k > x \quad (i=0,1,\cdots,k).$$

现在条件(C)下考虑函数

$$f(x)=\frac{A_0x^{p_kp_0-1}}{(x^{p_k}(A_0+A_1+\cdots+A_{k-1})+A_k)^{p_0}}+\frac{A_1x^{p_{k-1}p_1-1}}{(x^{p_{k-1}}(A_0+A_1+\cdots+A_{k-2}+A_k)+A_{k-1})^{p_1}}+\cdots+\frac{A_kx^{p_0p_k-1}}{(x^{p_0}(A_1+A_2+\cdots+A_k)+A_0)^{p_k}}=\sum_{i=0}^{k}A_ix^{p_{k-i}p_i-1}/(x^{p_{k-i}}(\sum_{j=0,\,j\neq k-i}^{k}A_j)+A_{k-i})^{p_i},$$

$$x>0 \tag{4}$$

显然, 当 $p_{k-i}p_i\in(0,1]$, $i=0,1,\cdots,k$ 时, $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内严格递减. 又当 $p_{k-i}p_i=1$, $i=0,1,\cdots,k$ 时,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{A_0}{A_k^{p_0}}+\frac{A_1}{A_{k-1}^{p_1}}+\cdots+\frac{A_k}{A_0^{p_k}}>1;$$

易见, 当 $p_{k-i}p_i\in(0,1]$, $i=0,1,\cdots,k$, 但 $p_{k-i}p_i$, $i=0,1,\cdots,k$ 不全为1时, $\lim_{x\to0^+}f(x)=\infty$. 故当 $p_{k-i}p_i\in(0,1]$, $i=0,1,\cdots,k$ 时, 总有 $\lim_{x\to0^+}f(x)>1$. 而 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, 因此, 存在唯一的 $s\in(0,\infty)$, 使得

$$f(s)=1. \tag{5}$$

而且

$$(x-s)(f(x)-f(s))<0,\ x\in(0,s)\cup(s,\infty). \tag{6}$$

引理2 假定(C)成立, 且 $p_{k-i}p_i\in(0,1]$, $i=0,1,\cdots,k$; 设

$$m=\min\left\{s,\left(\frac{A_i}{A_0+A_1+\cdots+A_k}\right)^{1/p_i},\frac{A_i}{(A_0+A_1+\cdots+A_k)^{p_i}}, i=0,1,\cdots,k\right\}, \tag{7}$$

这里 s 由(5)所定义. 假设 $\{x_n\}$ 是方程(1)的一个解, 使得对某个 $N\geqslant 1$, $x_N\leqslant m$, 那么

$$x_{N-i-1}, x_{N+i+1}\in(x,\infty),\quad i=0,1,\cdots,k;\ x_N<x_{N+k+2}<x. \tag{8}$$

证明　由于 $x_N\leqslant m$, 故根据引理 1d) 知: $x_{N-i-1}, x_{N+i+1}\in(x,\infty)$, $i=0,1,\cdots,k$; 从而

$$x_{N+k+1}=\frac{A_0}{x_{N+k}^{p_0}}+\frac{A_1}{x_{N+k-1}^{p_1}}+\cdots+\frac{A_k}{x_N^{p_k}}<A_0+A_1+\cdots+A_{k-1}+\frac{A_k}{x_N^{p_k}},$$

$$x_{N+k}=\frac{A_0}{x_{N+k-1}^{p_0}}+\frac{A_1}{x_{N+k-2}^{p_1}}+\cdots+\frac{A_{k-1}}{x_N^{p_{k-1}}}+\frac{A_k}{x_{N-1}^{p_k}}<A_0+A_1+\cdots+\frac{A_{k-1}}{x_N^{p_{k-1}}}+A_k,\ \cdots,$$

$$x_{N+2}=\frac{A_0}{x_{N+1}^{p_0}}+\frac{A_1}{x_N^{p_1}}+\cdots+\frac{A_k}{x_{N-k+1}^{p_k}}<A_0+\frac{A_1}{x_N^{p_1}}+A_2+\cdots+A_k,$$

$$x_{N+1}=\frac{A_0}{x_N^{p_0}}+\frac{A_1}{x_{N-1}^{p_1}}+\cdots+\frac{A_k}{x_{N-k}^{p_k}}<\frac{A_0}{x_N^{p_0}}+A_1+A_2+\cdots+A_k,$$

因此

$$x_{N+k+2}=\frac{A_0}{x_{N+k+1}^{p_0}}+\frac{A_1}{x_{N+k}^{p_1}}+\cdots+\frac{A_k}{x_{N+1}^{p_k}}>\frac{A_0x_N^{p_kp_0}}{(x_N^{p_k}(A_0+A_1+\cdots+A_{k-1})+A_k)^{p_0}}+$$

$$\cdots+\frac{A_kx_N^{p_0p_k}}{(x_N^{p_0}(A_1+A_2+\cdots+A_k)+A_0)^{p_k}}=x_Nf(x_N),$$

这里$f(\cdot)$如(4)所定义．

由于$0<x_N\leqslant m<k$，因此据(6)有$f(x_N)>f(s)=1$，故$x_{N+k+2}>x_Nf(x_N)>x_N$． 又由引理1a)知$x_{N+k+2}<x$，故结论成立．

现在我们阐述本节主要结果．

定理1 假定条件(C)成立且$p_{k-i}p_i\in(0,1]$，$i=0,1,\cdots,k$． 那么方程(1)的每一个正解是有界持久的．

证明 设$\{x_n\}$是方程(1)的任意一个正解． 很明显，如果μ是$\{x_n\}$的一个下界，那么$\lambda=A_0/(\mu^{p_0})+A_1/(\mu^{p_1})+\cdots+A_k/(\mu^{p_k})$就是$\{x_n\}$的一个上界． 因此，证明$\{x_n\}$有下界就够了． 设

$$\alpha=\frac{A_0}{m^{p_0}}+\frac{A_1}{m^{p_1}}+\cdots+\frac{A_k}{m^{p_k}},\quad \beta=\min\left\{m,\frac{A_0}{\alpha^{p_0}}+\frac{A_1}{\alpha^{p_1}}+\cdots+\frac{A_k}{\alpha^{p_k}}\right\},$$

这里m由(7)所定义．

现在β要么是$\{x_n\}$的一个下界，要么对某个$N\geqslant 0$，

$$x_N<\beta\leqslant x_i\quad(i=-k,-k+1,\cdots,0,1,\cdots,N-1)．\tag{9}$$

(不失一般性，甚至可以假定$N\geqslant 2k+2$．)如果是前者，那么定理的结论成立；如果是后者，证明x_N是$\{x_n\}$当$n\geqslant N$时的下界就可以了． 假定$\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}$中还存在比x_N小的项． 设x_L，这里$L>N$，是小于x_N的第一项，即

$$x_L<x_N．\tag{10}$$

那么

$$x_L<x_N<\beta\leqslant m．\tag{11}$$

由$x_L=\dfrac{A_0}{x_{L-1}^{p_0}}+\dfrac{A_1}{x_{L-2}^{p_1}}+\cdots+\dfrac{A_k}{x_{L-k-1}^{p_k}}$，知

$$\frac{A_i}{x_{L-i-1}^{p_i}}<x_L\leqslant m\leqslant\frac{A_i}{(A_0+A_1+\cdots+A_k)^{p_i}}\quad(i=0,1,\cdots,k)．$$

故

$$x_{L-i-1}>A_0+A_1+\cdots+A_k>m\quad(i=0,1,\cdots,k)．\tag{12}$$

现在证明

$$x_{L-(k+1)-i-1}>m\quad(i=0,1,\cdots,k)．\tag{13}$$

如果$x_{L-k-2}\leqslant m$，那么从引理2知

$$x_L>x_{L-k-2}．\tag{14}$$

如果$L-k-2<N$，那么(14)与(9)和(11)矛盾；如果$L-k-2=N$，那么这与$x_{L-k-2}<x_L<x_N$矛盾；如果$L-k-2>N$，那么$x_{L-k-2}<x_L<x_N$与事实"x_L，这里$L>N$，是小于x_N的

第一项’矛盾•

如果 $x_{L-(k+1)-i-1} \leqslant m,\ i = 1, \dots, k$, 那么, 仍由引理 2 有

$$x_{L-(k+1)-i-1} < x_{L-1} < x \quad (i = 1, \dots, k)\text{•}$$

又根据引理 1 c) 有,

$$x_{L-i+j+1} > \frac{A_j}{(A_0 + A_1 + \dots + A_k)^{p_j}} \quad (j = 0, 1, \dots, k;\ i = 1, 2, \dots, k)\text{•}$$

在上面不等式中取 $j = i - 1 = 0$, 就有 $x_L > A_0/(A_0 + A_1 + \dots + A_k)^{p_0} \geqslant m$, 这与 (11) 矛盾• 因此

$$x_{L-k-1} = \frac{A_0}{x^{p_0}_{L-k-2}} + \frac{A_1}{x^{p_1}_{L-k-3}} + \dots + \frac{A_k}{x^{p_k}_{L-2k-2}} < \frac{A_0}{m^{p_0}} + \frac{A_1}{m^{p_1}} + \dots + \frac{A_k}{m^{p_k}} = \alpha,$$

$$x_{L-k} = \frac{A_0}{x^{p_0}_{L-k-1}} + \frac{A_1}{x^{p_1}_{L-k-2}} + \dots + \frac{A_k}{x^{p_k}_{L-2k-1}} < \frac{A_0}{m^{p_0}} + \frac{A_1}{m^{p_1}} + \dots + \frac{A_k}{m^{p_k}} = \alpha,$$

……

$$x_{L-1} = \frac{A_0}{x^{p_0}_{L-2}} + \frac{A_1}{x^{p_1}_{L-3}} + \dots + \frac{A_k}{x^{p_k}_{L-k-2}} < \frac{A_0}{m^{p_0}} + \frac{A_1}{m^{p_1}} + \dots + \frac{A_k}{m^{p_k}} = \alpha,$$

故 $$x_L = \frac{A_0}{x^{p_0}_{L-1}} + \frac{A_1}{x^{p_1}_{L-2}} + \dots + \frac{A_k}{x^{p_k}_{L-k-1}} > \frac{A_0}{\alpha^{p_0}} + \frac{A_1}{\alpha^{p_1}} + \dots + \frac{A_k}{\alpha^{p_k}} \geqslant \beta,$$

这与 (11) 矛盾• 证毕•

关于方程 (1) 的有界持久性, 我们还有下列结果:

定理 2 假设条件 (2) 成立• 如果不等式组 $y < \sum_{i=0}^{k} A_i/x^{p_i}$ 和 $x > \sum_{i=0}^{k} A_i/y^{p_i}$ 在区域 $\{(x, y): 0 < x < y\}$ 中无解, 那末方程 (1) 的每个正界是有界持久的•

证明 设 $\{x_n\}$ 是方程 (1) 的任意一个正解• 显然, 如果 $\{x_n\}$ 有上界 T, 那末它也有下界 $\sum_{i=0}^{k} A_i/T^{p_i}$; 而且, 如果 $\{x_n\}$ 有下界 P, 那末它也有上界 $\sum_{i=0}^{k} A_i/P^{p_i}$• 反证• 假设

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty,\ 且 \liminf_{n\to\infty} x_n = 0\text{•}$$

对任意整数 $n > -k$, 定义 $L_n = \min\{m \in \{n, n+1, \dots\}: x_m > \max_{-k \leqslant r \leqslant n-1} x_r\}$• 易见 $\{L_n\}$ 是一个递增的整数序列且满足 $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} x_{L_n} = \infty$• 也可以看到, 对任意大于 $-k$ 的整数 n, 当 $-k \leqslant k \leqslant r \leqslant L_n - 1$ 时, $x_r < x_{L_n}$• 进一步, 对每个大于 $-k$ 的整数 n, 设 $l_n = \max\{m \in \{-k, -k+1, \dots, L_n - 1\}: x_m = \lim_{-k \leqslant r \leqslant L_n - 1} x_r\}$• 显然, $\{l_n\}$ 也是一个递增的整数序列且满足 $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$ 并使得 $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$•

现在考虑一整数 $n_0 > -k$ 使得 $L_{n_0} > l_{n_0} \geqslant 0$• 那么从方程 (1) 得到: 对所有整数 $n \geqslant n_0$,

$$x_{L_n} = \sum_{i=0}^{k} A_i/x^{p_i}_{L_n-i-1} < \sum_{i=0}^{k} A_i/x^{p_i}_{l_n},\ 且\ x_{l_n} = \sum_{i=0}^{k} A_i/x^{p_i}_{l_n-i-1} > \sum_{i=0}^{k} A_i/x^{p_i}_{L_n}\text{•}$$

这与已知假定矛盾• 证毕•

2 全局渐近稳定性

在这部分我们将证明在一定条件下方程 (1) 的正平衡点 x 是全局渐近稳定的• 在给出结果之前, 我们需要下面两个引理•

引理 3　假定条件(C)成立且 $p_i \in (0, 1]$ 并且 p_i, $i = 0, 1, \cdots, k$ 不全为 1, 那么方程(1)的正平衡点 x 是局部渐近稳定的•

证明　方程(1)关于正平衡点 x 的线性化方程是

$$y_{n+1} = \frac{A_0 p_0}{x^{p_0+1}} y_n + \frac{A_1 p_1}{x^{p_1+1}} y_{n-1} + \cdots + \frac{A_k p_k}{x^{p_k+1}} y_{n-k} \quad (n = 0, 1, \cdots)•$$

由[10, P_{12}的注 1.3.1], 知方程(1)的正平衡点 x 是局部渐近稳定的, 如果

$$\frac{A_0 p_0}{x^{p_0+1}} + \frac{A_1 p_1}{x^{p_1+1}} + \cdots + \frac{A_k p_k}{x^{p_k+1}} < 1• \tag{15}$$

从(3)我们知道 $A_0/(x^{p_0+1}) + A_1/(x^{p_1+1}) + \cdots + A_k/x^{p_k+1} = 1$•　由假设 $p_i \in (0, 1]$ 且 p_i(, $i = 0, 1, \cdots, k$) 不全为 1, 易见

$$\frac{A_0 p_0}{x^{p_0+1}} + \frac{A_1 p_1}{x^{p_1+1}} + \cdots + \frac{A_k p_k}{x^{p_k+1}} < \frac{A_0}{x^{p_0+1}} + \frac{A_1}{x^{p_1+1}} + \cdots + \frac{A_k}{x^{p_k+1}} = 1•$$

因此(15)成立, 命题正确•

引理 4　假定引理 3 中的条件满足, 那么方程(1)的正平衡点 x 是全局吸引的•

证明　显然, $p_i \in (0, 1]$, $i = 0, 1, \cdots, k$ 蕴含着 $p_i p_{k-i} \in (0, 1]$, $i = 0, 1, \cdots, k$•　因此定理 1 的条件满足, 从而方程(1)的每一个正解是有界持久的•　设 $\{x_n\}$ 是方程(1)的任意一个正解•设

$$\lambda = \liminf_{n\to\infty} x_n, \quad \mu = \limsup_{n\to\infty} x_n•$$

那么 λ, μ 存在且

$$\lambda \leqslant x \leqslant \mu• \tag{16}$$

从方程(1)我们有

$$\lambda \geqslant \frac{A_0}{\mu^{p_0}} + \frac{A_1}{\mu^{p_1}} + \cdots + \frac{A_k}{\mu^{p_k}}, \quad \mu \leqslant \frac{A_0}{\chi^{p_0}} + \frac{A_1}{\chi^{p_1}} + \cdots + \frac{A_k}{\chi^{p_k}}•$$

于是,

$$\begin{aligned} A_0 \mu^{1-p_0} + A_1 \mu^{1-p_1} + \cdots + A_k \mu^{1-p_k} &\leqslant \lambda\mu \leqslant \\ A_0 \lambda^{1-p_0} + A_1 \varphi\lambda^{1-p_1} &+ \cdots + A_k \lambda^{1-p_k}• \end{aligned} \tag{17}$$

记 $h(x) = A_0 x^{1-p_0} + A_1 x^{1-p_1} + \cdots + A_k x^{1-p_k}$, $x \in (0, \infty)$•　显然, 由(17)有

$$h(\mu) \leqslant h(\lambda)• \tag{18}$$

按照 $p_i \in (0, 1]$ 且 p_i, $i = 0, 1, \cdots, k$ 不全为 1, 知 $h(x)$ 在 $x \in (0, \infty)$ 时是严格递增的•　因此由(16)有 $h(\mu) \geqslant h(\lambda)$, 结合(18)就有 $\lambda = \mu$•　所以 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 证毕•

合并引理 3 与引理 4, 就有

定理 3　假定条件(C)成立且 $p_i \in (0, 1]$, p_i, $i = 0, 1, \cdots, k$ 不全为 1, 那么方程(1)的正平衡点 x 是全局渐近稳定的•

[参　考　文　献]

[1] De Vault R, Ladas G, Schultz S W. On the recursive sequence $x_{n+1} = (A/x_n^p) + B/(x_{n-1}^q)$ [A]. In: Proceedings of the Second International Conference on Difference Equations [C]. Basel: Gorden and Breach Science Publishers, 1996.

[2] Philos Ch G, Purnaras I K, Sficas Y G. Global attractivity in a nonlinear difference equation[J]. Appl Math Comput, 1994, **62**: 249—258.

[3] Ladas G. Open problems and conjectures[A]. In: Proceedings of the First International Conference on Difference Equations[C]. Basel: Gorden and Breach Science Publishers, 1995, 337—349.

[4] Arciero M, Ladas G, Schultz S W. Some open problems about the solutions of the delay difference equation $x_{n+1} = A/(x_n^2) + 1/(x_{n-k}^p)$ [J]. Proceedings of the Georgian Academy of Science Mathematics, 1993, **1**: 257—262.

[5] Brand L. A sequence defined by a difference equation[J]. Amer Math Monthly, 1995, **62**: 489—492.

[6] De Vault R, Kocic V L, Ladas G. Global stability of a recursive sequence[J]. Dynamics Systems and Applications, 1992, **1**: 13—21.

[7] Ladas G. Open problems and conjectures[A]. In: Proceedings of the First International Conference on Differnce Equations[C]. Basel: Gorden and Breach Science Publishers, 1995, 337—349.

[8] 李先义, 金银来. 对 G.Ladas 的一个 Open 问题的解答[J]. 数学杂志, 2002, **22**(1): 50—52.

[9] 李先义. 一类非线性时滞差分方程解的若干性质[J]. 应用数学, 2000, **13**(1): : 27—30.

[10] Kocic V L, Ladas G. Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications[M]. Dordrect: Kluwer Academic Publishers, 1993.

Boundedness and Persistence and Global Asymptotic Stability for a Class of Delay Difference Equations With Higher Order

LI Xian_yi[1, 2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Nanhua University, Hengyang, Hunan 421001, P R China;
2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, P R China)

Abstract: Some sufficient conditions for boundedness and persistence and global asymptotic stability of solutions for a class of delay difference equations with higher order are obtained, which partly solve G. Ladas' two open problems and extend some known results.

Key words: delay difference equation; boundedness and persistence; global asymptotic stability; open problem