应用数学和力学,第 23 卷 第 11 期(2002 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 11_1141_09

外部非定常 Navier_Stokes 方程的非线性 Galerkin 算法*

何银年, 李开泰

(西安交通大学 理学院科学计算系, 西安 710049)

(许政范推荐)

摘要: 提出了求解外部非定常 Navier_stokes 方程的有限元边界元耦合的非线性 Galerkin 算法, 证明了相应变分问题的正则性和数值解的收敛速度• 收敛性分析表明如果选取粗网格尺度 H 是细网格尺度 h 的开平方数量级, 则该算法提供了与古典 Galerkin 算法同阶的收敛速度• 然而非线性 Galerkin 算法仅仅需要在粗网格解非线性问题, 在细网格上解线性问题• 因此, 该算法可以节省计算工作量•

关键词: Navier_Stokes 方程; 有限元; 边界元; 外部; 非线性; Galerkin 算法

中图分类号: O242.21; O241.82 文献标识码: A

引 言

设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中一单连通有界开集, 具有充分光滑边界 Γ, 设 Ω' 表示 $\Omega\cup\Gamma$ 的补集, 坐标原点位于 Ω_0 的内部• 在充满流体的区域 Ω' 上, 外部非定常 Navier_Stokes 问题在于求流体的速度向量 $\boldsymbol{u}(x, t)$ 和它的压力 $P(x, t)$ 使得

$$
(S)\qquad\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nabla\cdot\sigma(\boldsymbol{u}, P) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} & ((x, t)\in\Omega'\times(0, T]),\\
\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 & ((x, t)\in\Omega'\times(0, T]),\\
\boldsymbol{u}(x, 0) = \boldsymbol{u}_0(x) & (x\in\Omega')\\
\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0,\ \lim\limits_{|X|\to\infty}\boldsymbol{u}(x, t) = 0 & (\forall t\in[0, T]),
\end{cases}
$$

其中 $\nu > 0$ 是流动的动力粘性系数, $\boldsymbol{f}(x, t)$ 表示外力密度, $\boldsymbol{u}_0(x)$ 是初始速度向量, 在 Ω' 中满足无散度条件 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0 = 0$, 此外, T 是一有限时间, 应力张量 $\sigma = (\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}, p))$ 以及形变速度张量 $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}))$ 满足 $\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}, p) = -\delta_{ij}p + 2\nu\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})$, $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ $(i, j = 1, 2)$ 在 Ω' 中引入一光滑的人工边界 $\Gamma_2 = \{x\in\Omega'; |x| = R_1\}$, 分裂 Ω' 为一个无界区域 Ω_2 的一个包含 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{u}_0$ 的支集的有界区域 Ω_1 之并, 以及使得 $\boldsymbol{u}$ 在 Ω_2 中充分小•

---

* 收稿日期: 2001_03_27; 修订日期: 2002_05_28

基金项目: 国家重大基础研究发展规划专项基金资助项目(G1999032801_07); 国家自然科学基金资助项目(19971067); 陕西省自然科学基金资助项目(99SL05); 教育部留学回国人员基金资助项目; ([1999]747)

作者简介: 何银年(1953—), 男, 陕西长安人, 教授, 博士(E_mail: heyn@xjtu.edu.cn).

由于惯性项$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ 在 Ω_2 中是小的以及为了计算简单, 我们将考虑问题(S)的一个 N_S 方程和 Stokes 耦合逼近:

$$
(\mathrm{S})'\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}-\nabla\cdot\sigma(\boldsymbol{u},p)+\chi_{\Omega_1}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(x,t) & ((x,t)\in\Omega'\times(0,T]),\\
\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 \quad ((x,t)\in\Omega'\times(0,T]) & \\
\boldsymbol{u}(x,t)\mid_{\Gamma}=0,\ \lim\limits_{|x|\to\infty}\boldsymbol{u}(x,t)=0 & (\forall t\in[0,T]),\\
\boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x) & (x\in\Omega'),
\end{cases}
$$

其中

$$
\chi_{\Omega_1}(x)=\begin{cases}1 & (x\in\Omega_1),\\ 0 & (x\notin\Omega_1),\end{cases}
$$

以及 R_1 被选择使得 Ω_1 包含$\boldsymbol{f}(x,t)$和 $\boldsymbol{u}_0(x)$的支集以及使得

$$
|\boldsymbol{u}(x,t)|\leqslant\varepsilon,\ |\nabla\boldsymbol{u}(x,t)|\leqslant\varepsilon\qquad(\forall(x,t)\in(\Omega_2\cup\Gamma_2)\times[0,T])\cdot \tag{1}
$$

非线性 Galerkin 算法在于分裂速度的有限元空间 W_h 为 $W_h=W_H+W_h^H$, 其中 $H>>h$ 以及 W_h^H 是 W_H 在 W_h 的补集· 单就速度而论, 人们希望在 Ω_1 中寻求问题(S)′的逼近 $\boldsymbol{u}^h$ 使它位于 W_h 的一个流形 $\Sigma=\mathrm{graph}\,\Phi$ 上, 使得 $\boldsymbol{u}^h$ 呈现形式 $\boldsymbol{u}^h=\boldsymbol{v}^H+\Phi(\boldsymbol{v}^H)$, 其中 $\boldsymbol{v}^H$ 位于 W_H 内, $\Phi(\boldsymbol{v}^H)$位于 W_h^H 内· 通过将所考虑的问题投影到流形 $\Sigma=\mathrm{graph}\,\Phi$ 上, 则在 Ω_1 上将问题(S)′归结为未知量为 $\boldsymbol{v}^H$ 的发展方程· 对于古典的 Galerkin 方法, 我们有 $\Phi\equiv0$· 非线性 Galerkin 有限元算法主要由 Marion_Temam[1], Marion_Xu[2], Ait Ou Ammi_Marion[3]和李开泰等[4]作者研究过· 此外, 求解外部区域上偏微分方程主要有边界元方法和有限元与边界元耦合方法, 例如, 对于椭圆方程的边界元分析见 Johnson_Nedelec[5], 祝家麟[6]等人工作, 对于 Stokes 方程的有限元边界无耦合方法见于德浩[7], Sequeira[8], 何银年和李开泰[9]等人的工作, 对于 Navier_Stokes 方程的有限元边界元耦合方法见何银年和李开泰[10,11]等人的工作· 本文的目的是应用非线性 Galerkin 算法在混合有限元与边界元结合的框架下来研究外部非定常 Navier_Stokes 方程的数值求解问题·

在这篇文章里, 通过引入一人工光滑边界并在无界区域对 Stokes 方程应用 Green 公式给出外部非定常 Navier_Stokes 方程的耦合变分形式; 偏微分提供了逼近问题(S)′对 Navier_Stokes 问题(S)的逼近精度; 提出了求解变分形式(Q)的非线性 Galerkin 有限元方法并给出了它的逼近精度· 文中的讨论表明: 如果选择 $H=O(h^{1/2})$, 则非线性 Galerkin 有限元逼近提供了和古典 Galerkin 有限元逼近相同阶的收敛精度· 然而非线性 Galerkin 有限元逼近仅仅在粗网格上处理非线性性, 在细网格上处理线性性, 而古典 Galerkin 有限元逼近需要在细网格上处理非线性性· 因此, 非线性 Galerkin 有限元逼近在数值计算方面比古典 Galerkin 有限元逼近节约计算工作量·

1 耦合变分形式

为了将 Ω_2 上的 Stokes 问题归结为边界 Γ_2 上的积分方程, 非定常 Stokes 方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{U}_k}{\partial t}-\nabla\cdot\sigma(\boldsymbol{U}_k,P_k)=\delta(x-y)\,\delta(t-\tau)\,\boldsymbol{e}_k,\\
\operatorname{div}\boldsymbol{U}_k=0
\end{cases}
$$

的基本解$(\boldsymbol{U}_k,P_k)(k=1,2)$, 将被使用· 由文献[9~11]已知,

$$
\boldsymbol{U}_k(x-y,t-\tau)=-\Delta\boldsymbol{E}_k(x-y,t-\tau)+\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{E}_k(x-y,t-\tau)), \tag{2}
$$

$$P_k = \mathrm{div}\left(-\frac{\partial}{\partial t}+\nu\Delta\right)\boldsymbol{E}_k(x-y,t-\tau)=\frac{\delta(t)(x_k-y_k)}{2\pi|x-y|^2} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}_k(x-y,t-\tau)=\frac{1}{2\pi\nu(t-\tau)}\int_{\mathbf{R}^2}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\xi-x|}\exp\left(-\frac{|\xi-y|}{4\nu(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\xi\boldsymbol{e}_k\cdot \tag{4}$$

这里 $\delta(x-y)\delta(t-\tau)\boldsymbol{e}_k$ 表示沿着坐标轴 $\boldsymbol{e}_k$ 的集中载荷力, $\delta(x-y)$, $\delta(t-\tau)$ 分别是空间和时间变量的 Dirac 函数•

利用文献[8~ 11]中的方法, 可由问题(S)′导出下列积分方程

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_k(x,t)=-\int_0^t\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{u}(y,\tau)\cdot\sigma(\boldsymbol{U}_k,P_k)(x-y,t-\tau)\cdot\boldsymbol{n}(y)\,\mathrm{d}s_y\,\mathrm{d}\tau+$$

$$\int_0^t\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{U}_k(x-y,t-\tau)\cdot\lambda(\boldsymbol{u},p)(y,\tau)\,\mathrm{d}s_y\,\mathrm{d}\tau\qquad x\in\Gamma_2, \tag{5}$$

其中 $\lambda(\boldsymbol{u},p)=\sigma(\boldsymbol{u},p)\cdot\boldsymbol{n}|_{\Gamma_2}$, $0\leqslant t\leqslant T$, $k=1,,2$, $\boldsymbol{n}$ 表示 Γ 和 Γ_2 的单位外法向量(相对于 Ω_1 和 Ω_2 的外部)•

设

$$H=\{\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega_1)^2;\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|_{\Gamma}=0\},\ W=\{\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega_1)^2;v|_{\Gamma}=0\},$$

$$V=\{\boldsymbol{v}\in W;\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0\},M=\{q\in L^2(\Omega_1);\int_{\Omega_1}q\,\mathrm{d}x=0\},$$

$$H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^2=\{\boldsymbol{w}\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)^2;\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s_x=0\},\ \Lambda=H_0^{1/2}(\Gamma_2)^2\text{ 的对偶空间}\cdot$$

此外, 如果引进下列三线性形式和双线形式:

$$a_D(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\int_D(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x,\ a_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=2\nu\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega_1}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,dx,$$

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_D=\int_D\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x,\ \langle\boldsymbol{v},\lambda\rangle=\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{v}\cdot\lambda\,\mathrm{d}s_x,$$

$$b(t,\lambda,\mu)=\int_0^t\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_2}\mu\cdot\boldsymbol{U}\cdot\lambda\,\mathrm{d}s_y\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}\tau,\quad\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2),$$

$$G_k(t,\gamma_0\boldsymbol{u})=-\int_0^t\int_{\Gamma_2}u\cdot\sigma(\boldsymbol{U}_k,P_k)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s_y\,\mathrm{d}\tau,\quad\gamma_0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}|_{\Gamma_2}$$

则(S)′和 Green 公式可给出外部非定常 Navier_Stokes 问题的耦合变分形式[9~ 11]: 找$(\boldsymbol{u},\lambda,P)$使得 $\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)^2)\cap L^2(0,T;W)$, $\lambda\in L_2(0,T,\Lambda)$ $P\in D'(0,T,M)$且满足

$$(\mathrm{Q})\quad\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t},\boldsymbol{v}\right)+a_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+a_{\Omega_1}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\langle\boldsymbol{v},\lambda\rangle+(q,\mathrm{div}\boldsymbol{u})-(p,\mathrm{div}\boldsymbol{v})=\\ \qquad(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})\qquad(\forall(\boldsymbol{v},q)\in(W,M)),\\ b(t,\lambda,\mu)-\dfrac{1}{2}\langle\boldsymbol{u},\mu\rangle+\langle\boldsymbol{G}(t,\gamma_0\boldsymbol{u}),\mu\rangle=0\qquad(\forall\mu\in\Lambda),\\ \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0,\end{cases}$$

其中$(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_{\Omega_1}$•

通过回忆文献[12~ 15], 下列的估计式:

$$|a_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant\nu|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega_1}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega_1},\ a_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\geqslant\alpha|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega_1}^2\qquad(\forall\boldsymbol{u}\in W), \tag{6}$$

$$|a_{\Omega_1}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant c_0|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega_1}(|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega_1}|\boldsymbol{w}|_{0,\Omega_1}|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega_1})^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega_1}$$

$$(\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in W), \tag{7}$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega')^2}^2 \leqslant 2^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega'} \qquad (\forall \boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega')^2), \tag{8}$$

$$|a_{\Omega'}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})| \leqslant 2^{\frac{1}{2}}(|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega'}|\boldsymbol{w}|_{0,\Omega'}|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega'})^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega'} \qquad (\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in H_0^1(\Omega')^2), \tag{9}$$

$$a_{\Omega'}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = -a_{\Omega'}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) \qquad (\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in H_0^1(\Omega')^2 \text{ 且满足 } \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0) \tag{10}$$

成立，其中 $\alpha > 0$ 是一常数，这里 c_0 及以后出现的 $c_1, c_2, \ldots$ 均表示依赖于 Ω_1 的常数，c 表示可以依赖于数据$(\nu, \Omega_1, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f})$ 的一般性常数．此外，记号 $\|\cdot\|_{m,D}$，$|\cdot|_{m,D}$ 分别表示 Sobolev 空间 $H^m(D)$ 或 $H^m(D)^2$ 的范数和半范数，$m = 0, 1, 2$.

2　逼近精度

在这一节，我们将给出问题(S)′解 $(\boldsymbol{u}, p)$ 的逼近精度，其中$(\boldsymbol{u}, p)$ 满足下列的弱形式

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{v}\right)_{\Omega'} + a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + a_{\Omega_1}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_{\Omega'} \qquad (\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega')^2 \cap H(\Omega')), \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \nu\int_{\Omega'} \nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x,$$

$$H(\Omega') = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega')^2;\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|_\Gamma = 0, \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0\}.$$

相似的，也可以得到问题(S)的弱形式：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}, \boldsymbol{v}\right)_{\Omega'} + a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + a_{\Omega'}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_{\Omega'} \qquad (\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega')^2 \cap H(\Omega')), \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \end{cases} \tag{12}$$

通过在(12)中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ 并利用(10)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}^2 + \nu|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega'}^2 \leqslant \nu^{-1}|\boldsymbol{f}|_{-1,\Omega'}^2. \tag{13}$$

关于 t 积分(13)得到

$$|\boldsymbol{u}(t)|_{0,\Omega'}^2 + \nu\int_0^t|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega'}^2\mathrm{d}\tau \leqslant |\boldsymbol{u}_0|_{0,\Omega'}^2 + \nu^{-1}\int_0^T|\boldsymbol{f}|_{-1,\Omega_1}^2\mathrm{d}t, \qquad (\forall t \in [0,T]). \tag{14}$$

再由(12)减去(11)并设 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}$，则对一切 $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega')^2 \cap H(\Omega')$，

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}, \boldsymbol{v}\right) + a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) + a_{\Omega'}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + a_{\Omega'}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) - a_{\Omega_2}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) + a_{\Omega_2}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0, \tag{15}$$

且 $\boldsymbol{w}(0) = 0$.

通过在(15)中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ 且利用(10)，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{w}|_{0,\Omega'}^2 + \nu|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega'}^2 + a_{\Omega'}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) - a_{\Omega_2}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) + a_{\Omega_2}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = 0. \tag{16}$$

由于(1)和(8)~(10), 可由(16)得到:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{w}|_{0,\Omega'}^2+\nu|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega'}^2\leqslant\frac{8}{\nu}(|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega'}^2+\varepsilon^2)|\boldsymbol{w}|_{0,\Omega'}^2+\nu\varepsilon^2. \tag{17}$$

积分(17)并利用(14), 可以给出下列的逼近性质•

定理 2.1　问题(S)′对于问题(S)有下列的逼近精度:

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}(t)|_{0,\Omega'}^2+\nu\int_0^t|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}|_{1,\Omega'}^2\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\qquad\nu\varepsilon^2\exp\Big(\frac{8}{\nu^2}\Big(|\boldsymbol{u}_0|_{0,\Omega'}^2+\nu^{-1}\int_0^T|\boldsymbol{f}|_{-1,\Omega'}^2\mathrm{d}t+\nu\varepsilon^2T\Big)\Big).\end{aligned} \tag{18}$$

3　正　则　性

在这一节, 我们将提供问题(Q)的解$(\boldsymbol{u},\lambda,p)$的正则性•

定理 3.1　如果 $\boldsymbol{u}_0\in V,\boldsymbol{f}\in L^2(0,T;L^2(\Omega_1)^2)$, 则问题(Q)有一个唯一解$(\boldsymbol{u},\lambda,p)$使得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;W)}^2+\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega_1)^2)}^2+\|p\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_1))}^2+\\&\quad\Big\|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_1)^2)}^2+\|\lambda\|_{L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_2)^2)}^2\leqslant\\&\qquad c(|\boldsymbol{u}_0|_{1,\Omega_1}^2+\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_1)^2)}^2).\end{aligned} \tag{19}$$

证　在$H(\Omega')$中引进 Stokes 算子 $A=-P\triangle$ 具有定义域 $D(A)=H^2(\Omega')^2\cap V(\Omega')$, 并设 P 表示由$L^2(\Omega')^2$到$H(\Omega')$上的正交投影算子•　此外, 由文献[15~16]得知

$$\left.\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\Omega_1)^2}\leqslant c_4|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega_1}^{1/2}|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega_1}^{1/2}\leqslant c_4|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega_1}^{1/2}|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}^{1/2},\\&\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega_1}\leqslant c|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega_1}\leqslant|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}\bullet\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

应用投影算子 P 作用于问题(S)′的两边, 形式上得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\nu A\boldsymbol{u}+X_{\Omega_1}P(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=P\boldsymbol{f},\\\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0\bullet\end{cases} \tag{21}$$

现在, 用 A$\boldsymbol{u}$ 和方程(21)在$H(\Omega')$作内积, 则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega_1}^2+\nu|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}^2+a_{\Omega_1}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},A\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{f},A\boldsymbol{u})\leqslant\\&\qquad\frac{\nu}{4}|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}^2+\nu^{-1}|\boldsymbol{f}|_{0,\Omega_1}^2\bullet\end{aligned} \tag{22}$$

根据(20)得

$$\begin{aligned}&|a_{\Omega_1}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},A\boldsymbol{u})|\leqslant\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\Omega_1)^2}|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega_1}|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}\leqslant\\&\qquad\frac{\nu}{4}|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}^2+\frac{c_5}{2}|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega_1}^2|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega_1}^4\bullet\end{aligned} \tag{23}$$

这样, (22)和(23)产生

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega'}^2+\nu|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}^2\leqslant\frac{2}{\nu}|\boldsymbol{f}|_{0,\Omega_1}^2+c_5|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega_1}^2|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega_1}^4\bullet \tag{24}$$

积分(24)并应用 Gronwall 引理, 得到

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{u}(t)|_{1,\Omega'}^2+\nu\int_0^T|A\boldsymbol{u}|_{0,\Omega'}^2d\tau\leqslant\\&\qquad\exp\Big(\int_0^t c_5|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega_1}^2|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega_1}^2\mathrm{d}\tau\Big)\Big(|\boldsymbol{u}_0|_{1,\Omega'}^2+\frac{2}{\nu}\int_0^t|\boldsymbol{f}|_{0,\Omega_1}^2\mathrm{d}\tau\Big)\bullet\end{aligned} \tag{25}$$

再利用(21), (14)和(25), 导出

$$\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\|_{L^2(0,T;H(\Omega))}\leqslant$$

$$c\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T(c_5|\boldsymbol{u}|_{0,\Omega_1}^2|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega_1}^2\mathrm{d}\tau)(|\boldsymbol{u}_0|_{1,\Omega}^2+\int_0^T|\boldsymbol{f}|_{0,\Omega_1}^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{26}$$

再应用 inf- sup 条件和方程(S)′, 则导出

$$\|p\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_1))}\leqslant c\left(\int_0^T(\|A\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega_1}^2)+|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}|_{0,\Omega_1}^2+|\boldsymbol{f}|_{0,\Omega_1}^2)\mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{27}$$

此外, 通过应用迹定理[6,16]得到

$$\|\lambda\|_{L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_2)^2)}\leqslant c\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega_1)^2)}+c\|P\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_1))}. \tag{28}$$

于是, (20)和(25)~(28)推出(19).

4 Galerkin 有限元逼近

为了简单, 主要考虑 Ω_1 是多边形区域, 其它情况可以通过引入一个逼近边界 $\Gamma\cup\Gamma_2$ 得一推广. 设 $h>0$ 是一个趋于零的正参数, 引进两个有限元空间 $(W_h,M_h)\subset(W,M)$, 并设 $P_h: L^2(\Omega_1)^2\to W_h$ 表示 L^2_正交投影算子.

我样也假定 (W_h,M_h) 满足下列的假设:

(H_1) 对于每一个 $\boldsymbol{v}\in H^2(\Omega_1)^2\cap W$ 和 $q\in H^1(\Omega_1)\cap M$, 存在逼近 $I_h\boldsymbol{v}\in W_h$ 和 $J_hq\in M_h$ 使得

$$|\boldsymbol{v}-I_h\boldsymbol{v}|_{1,\Omega_1}\leqslant c_6h\|\boldsymbol{v}\|_{2,\Omega_1},\quad |q-J_hq|_{0,\Omega_1}\leqslant c_6h\|q\|_{1,\Omega_1}.$$

(H_2) (反估计式)

$$|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega_1}\leqslant c_6h^{-1}|\boldsymbol{v}|_{0,\Omega_1}\qquad(\forall\boldsymbol{v}\in W_h).$$

(H_3) (inf_sup 条件)

$$\beta|q_h|_{0,\Omega_1}\leqslant\sup_{v_h\in W_{oh}}\frac{(q_h,\operatorname{div}v_h)}{|\boldsymbol{v}_h|_{1,\Omega_1}}\qquad(\forall q_h\in M_h)$$

其中 $W_{oh}=\{\boldsymbol{v}_h\in W_h;\boldsymbol{v}_h|_{\Gamma_2}=0\}$, β 是一个与 h 无关的正常数.

问题(Q) 的古典 Galerkin 有限元逼近是: 找 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in L^2(0,T;W_h)\times D'(0,T;M_h)$ 使得

$$(Q_h)\begin{cases}(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial t},\boldsymbol{v})+a_0(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v})+a_{\Omega_1}(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v})+<\boldsymbol{v},\lambda(t,\gamma_0\boldsymbol{u}_h)>-(p_h,\operatorname{div}\boldsymbol{v})=\\ \quad(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})\qquad(\forall\boldsymbol{v}\in W_h),\\ (q,\operatorname{div}\boldsymbol{u}_h)=0\qquad(\forall q\in M_h),\\ \boldsymbol{u}_h(0)=\boldsymbol{u}_{0h}=P_h\boldsymbol{u}_0,\end{cases}$$

其中为了简单, 未知量 λ 的求解可以参考文献[9, 11]. 这里, 假定 $\lambda(t,\gamma_0\boldsymbol{u}_h)$ 是严格由变分问题

$$(B_h)\ \int_0^T b(t,\lambda,\mu)\,\mathrm{d}t=\int_0^T<\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_h+\boldsymbol{G}(t,\gamma_0\boldsymbol{u}_h),\mu>\mathrm{d}t\qquad(\forall\mu\in L^2(0,T,\Lambda)).$$

求解的. 此外我们已在文献[10] 中证明问题(Q^h) 和(B_h) 具有下列的逼近结果.

定理 4.1 假定 $\boldsymbol{u}_0\in V$, $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega_1)^2)$ 以及假设(H_1) ~ (H_3) 有效, 则逼近解$(\boldsymbol{u}_h,\lambda(t,\gamma_0\boldsymbol{u}_h),p_h)$ 满足下列的误差估计:

$$|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}_h(t)|_{0,\Omega_1}^2+\nu\int_0^t(|u-u_h|_{1,\Omega_1}^2+\|\lambda(\tau,\gamma_0\boldsymbol{u})-\lambda(\tau,\gamma_0\boldsymbol{u}_h)\|_\Lambda^2)\mathrm{d}\tau+$$

$$\int_0^t (p - p_h)\mathrm{d}\tau|_{0,\Omega_1}^2 \leqslant c(\Omega_1, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f}, t)h^2, \tag{29}$$

其中 $t \in [0, T]$, 常数 $c(\Omega_1, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f}, t)$ 依赖数据 $(\Omega_1, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f}, t)$•

5 非线性Galerkin有限元逼近

引入离散速度的一个分裂, 对离散压力不进行分裂• 因此, 需要三个有限元空间 W_H, W_h 和 M_h; W_h 和 M_h 是对应于细网格剖分 $\mathcal{T}_h$ 的速度_压力有限元空间, 满足假设 (H_1) – (H_3), 而 W_H 是对应于粗网格剖分 $\mathcal{T}_H$ 的速度有限元空间• 引入有限元空间的一个分裂: $W_h = W_H + W_h^H$, $W_h^H = (I - P_H)W_h$(参见Ait Ou Ammi和Marion[3],) 空间 W_h^H 是 W_H 在 W_h 中的 L^2_正交补集• 在算法上, 寻求逼近解

$$\boldsymbol{u}^h(t) = \boldsymbol{y}^h(t) + \boldsymbol{z}^h(t),\ \boldsymbol{y}^h \in W_H, \boldsymbol{z}^h \in W_h^H,\ P^h(t) \in M_h,$$

使其满足

$$(\mathrm{Q}^h)\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^h}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{v}\right) + a_0(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}) + a_{\Omega_1}(\boldsymbol{u}^h; \boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}) - a_{\Omega_1}(\boldsymbol{z}^h; \boldsymbol{z}^h, (I - P_h)\boldsymbol{v}) + (q, \operatorname{div}\boldsymbol{u}^h) - \\ \qquad (p^h, \operatorname{div}\boldsymbol{v} + \langle\boldsymbol{v}, \lambda(t, \gamma_0\boldsymbol{u}^h)\rangle = (\boldsymbol{f}, \upsilon) \qquad (\forall(\boldsymbol{v}, q) \in (W_h, M_h)), \\ \boldsymbol{u}^h(0) = P_h\boldsymbol{u}_{0h}, \boldsymbol{z}^h(0) = (I - P_H)u_{0h}, \end{cases}$$

其中 $\lambda(t, \gamma_0\boldsymbol{u}^h)$ 是严格由变分问题

$$(\mathrm{B}^h)\ \int_0^T b(t, \lambda(t, \gamma_0\boldsymbol{u}^h), \mu)\mathrm{d}t = \int_0^T \left\langle \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^h + G(t, \gamma_0\boldsymbol{u}^h), \mu\right\rangle \mathrm{d}t \qquad (\forall \mu \in L^2(0, T; \Lambda))$$

求解的, W_h^H 满足下列性质:

$$|\boldsymbol{w}|_{0,\Omega_1} \leqslant c_7 H|\boldsymbol{w}|_{1,\Omega_1},\ \gamma^2(|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega_1}^2 + |\boldsymbol{w}|_{1,\Omega_1}^2) \leqslant |\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}|_{1,\Omega_1}^2 \qquad (\forall \boldsymbol{v} \in w_H, \boldsymbol{w} \in W_h^H), \tag{30}$$

具有 $0 < \gamma < 1$ (见[2, 3])•

此外, 根据问题 (Q) 的正则性结果(19), 误差估计(29)和(30), 可以证明Galerkin逼近解 $(u^h, \lambda(t, \gamma_0\boldsymbol{u}_h), p_h)$ 的一些正则性以及非线性Galerkin逼近解 $(\boldsymbol{u}^h, \lambda(t, \gamma_0\boldsymbol{u}^h), p^h)$ 的一些正则性•

定理 5.1 假定 $\boldsymbol{u}_0 \in V$, $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega_1)^2)$, $h < H \leqslant H_0$ 和假设 $\mathrm{H}_1)$ – $\mathrm{H}_3)$ 是有效的• 则 $\boldsymbol{u}_h$ 和 $\boldsymbol{u}^h$ 满足下列正则性估计:

$$|\boldsymbol{u}_h(t)|_{1,\Omega_1}^2| + |\boldsymbol{u}^h(t)|_{1,\Omega_1}^2 \leqslant c_8 = c(\Omega_1, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f}, T) \qquad (\forall t \in [0, T])• \tag{31}$$

定理 5.2 在定理5.1的假设下, 如果 H 充分小使得

$$\frac{24}{\alpha\gamma_4}c_0^2 c_7^2 c_8^2 H^2 \leqslant \frac{\alpha}{8}, \tag{32}$$

则问题 (Q^h) 和 (B^h) 和解 $(\boldsymbol{u}^h, \lambda(t, \gamma_0 u^h)p^h)$ 满足下列的误差估计

$$|\boldsymbol{u}_h(t) - u^h(t)|_{0,\Omega_1}^2 + \int_0^T (|\boldsymbol{u}^h - \boldsymbol{u}^h|_{1,\Omega_1}^2 + \|\lambda(\tau, \gamma_0\boldsymbol{u}_h) - \lambda(\tau, \gamma_0\boldsymbol{u}^h)\|_\Lambda^2)\mathrm{d}\tau + \left|\int_0^T (p_h - p^h)\mathrm{d}t\right|_{0,\Omega_1}^2 \leqslant CH^4• \tag{33}$$

注 进而通过将(29)和(33)结合起来, 我们得到

$$|u(t)-u^h(t)|_{0,\Omega_1}^2+\int_0^t(|u-u^h|_{1,\Omega_1}^2+\|\lambda(\tau,\gamma_0 u)-\lambda(\tau,\gamma_0 u^h)\|_\Lambda^2)d\tau+\left|\int_0^T(p-p^h)\mathrm{d}t\right|_{0,\Omega_1}^2\leqslant C(h^2+H^4)\text{。}\tag{34}$$

这是非线性Galerkin算法的一个渐进误差估计。它表明如果选取$H=O(h^{1/2})$非线性Galerkin算法提供了和Galerkin方法相同阶的逼近精度。

证 通过设

$$E_h=u^h-u_h,\quad \delta_h=p_h-p^h,\quad \eta_h=\lambda(t,\gamma_0 u_h)-\lambda(t,\gamma_0 u^h)=\lambda(t,\gamma_0 E_h),$$

则(Q_h)和(Q^h)产生

$$\left(\frac{\partial E_h}{\partial t},v\right)+a_0(E_h,v)+a_{\Omega_1}(E_h;u_h,v)+a_{\Omega_1}(u^h;E_h,v)+(q,\operatorname{div}E_h)-(\delta_h,\operatorname{div}v)+a_{\Omega_1}(z^h;z^h,(I-P_H)v)+\langle v,\lambda(t,\gamma_0 E_h)\rangle=0,\ \forall(v,q)\in(W_h,M_h)\text{。}\tag{35}$$

其中$E_h(0)=0$。通过在(35)中取$v=E_h$, $q=\delta_h$,我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|E_h|_{0,\Omega_1}^2+a|E_h|_{1,\Omega_1}^2+a_{\Omega_1}(E_h;u_h,E_h)+a_{\Omega_1}(u^h;E_h,E_h)+a_{\Omega_1}(z^h;z^h,(I-P_h)E_h)+\langle E_h,\lambda(t,\gamma_0 E_h)\rangle=0\text{。}\tag{36}$$

根据正则性估计(19),(30)_(31)和(36)中关于三线性形式的一些估计式,能够导出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|E_h|_{0,\Omega_1}^2+\alpha|E_h|_{1,\Omega_1}^2+\langle E_h,\lambda(t,\gamma_0 E_h)\rangle\leqslant c(\Omega_1,u_0,f,t)H^4+g(t)|E_h|_{0,\Omega_1}^2,\tag{37}$$

其中$g(t)\in L^1(0,T)$。利用文献[8,10]中得到的结论,有$\int_0^t\langle E_h,\lambda(\tau,\gamma_0 E_h)\rangle\mathrm{d}\tau\geq 0$。因此,通过积分(37)并利用Gronwall引理,有

$$|E_h(t)|_{0,\Omega_1}^2+\alpha\int_0^t|E_h|_{1,\Omega_1}^2d\tau\leqslant C(\Omega_1,u_0,f,t)H^4\text{。}\tag{38}$$

再利用迹定理[6,16],得到

$$\|\lambda(t,\gamma_0 E_h)\|_{L^2(0,T,\Lambda)}\leqslant c\int_0^T|E_h|_{1,\Omega_1}^2d\tau\leqslant CH^4\text{。}\tag{39}$$

最后由(35)导出

$$\left(\int_0^T\delta_h d\tau,\operatorname{div}v\right)=(E_h,v)+\int_0^T\alpha_0(E_h,v)\mathrm{d}t+\int_0^T\langle E_h,\lambda(t,\gamma_0 E_h)\rangle\mathrm{d}\tau+\int_0^T[a_{\Omega_1}(E_h,u_h,v)+a_{\Omega_1}(u^h;E_h,v)+\alpha_{\Omega_1}(z^h;z^h,(I-P_H)v]\mathrm{d}\tau,\ \forall v\in W_{0h}\text{。}$$

根据假设H_3)和上述估计式,可推出$\left|\int_0^T\delta_h\mathrm{d}\tau\right|_{0,\Omega_1}^2\leqslant c(\Omega_1,u_0,f,T)H^4$。将上述估计和(38)~(39)结合得到(33)。

[参 考 文 献]

[1] Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods: the finite elements case[J]. Numer, Math, 1990, **57**(3): 205—226.

[2] Marion M, XU Jin_chao. Error estimates on a new nonlinear Galerkin method bsed on two_grid finite elements[J]. SIAM J Numer Anal, 1995, **32**(4): 1170—1184.

[3] Ait Ou Ammi A, Marion M. Nonlinear Galerkin methods and mixed finite elements: two_grid algo-

rithms for the Navier_Stokes equations[J]. Numer Math, 1994, **68**(2): 189—213.

[4] 李开泰, 周磊. 加罚 Navier_stokes 问题的有限非线性 Galerkin 方法[J]. 计算数学, 1995, **17**(4): 360—380.

[5] Johnson C, Nedelec J C. On the coupling of boundary integral and finite element methods[J]. Math Comp, 1980, **35**(152): 1063—1079.

[6] 祝家麟. 椭圆边值问题的边界元分析[M]. 北京: 科学出版社, 1991.

[7] Yu D H. The coupling of natural BEM and FEM for the Stokes problem on unbounded domain[J]. Chinese J Numer Math Appl, 1992, **14**(4): 111—120.

[8] Sequeira A, The coupling of boundary integral and finite element methods for the bidimensional exterior steady Stokes problem[J]. Math Methods Appl Sci, 1983, **5**(3): 356—375

[9] HE Yin_nian, LI Kai_tai. The coupling of boundary element and finite element methods for exterior nonstationary Stokes problem[J]. Acta Mathematica Scientia, 1991, **11**(2): 190—207.

[10] LI Kai_tai, HE Yin_nian. Stokes coupling method for the exterior flow, Part Ⅱ: Well_posedness analysis[J]. Acta Mathematica Scientia, 1996, **16**(4): 442—457.

[11] HE Yin_nian, LI Kai_tai. The coupling of boundary integral and finite element methods for the nonstationary exterior flow[J]. Numer Methods for Partial Differential Equations, 1988, **14**(5): 549—565.

[12] Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for Navier_Stokes Equations[M]. Heidelberg: Springer, 1986.

[13] Bernardi C, Raugel G A. Conforming Finite element method for the time_dependent Navier_Stokes equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1985, **22**(3): 455—473.

[14] Temam R. Navier_Stokes Equations[M]. Amsterdam: North_Holland, 1984.

[15] Ladyzhenskava Q A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow[M]. New York: Gordon and Breach, 1969.

[16] Lions J L, Magenes E. Non_Homogeneous Boundary Value Problem and Applications[M]. Berlin, New York: Springer_Verlag, 1972.

Nonlinear Galerkin Method for the Exterior Nonstationary Navier_Stokes Equations

HE Yin_nian, LI Kai_tai

(Departement of Scientific Computing, Faculty of Science,
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049 P R China)

Abstract: A new algorithm combining nonlinear Galerkin method and coupling method of finite element and boundary element is introduced to solve the exterior nonstationary Navier_Stokes equations. The regularity of the coupling variational formulation and the convergence of the approximate solution corresponding to the algorithm are proved. If the fine mesh h is choosed as coarse mesh H _sgure, , the nonlinear Galerkin method, nonlineatity is only treated on the coarse grid and linearity is treated on the fine grid. Hence, the new algorithm can save a large amount of computational time.

Key words: Navier_Stokes equation; finite element; boundary element; exterior, nonlinear; galerkin merhod