应用数学和力学, 第 23 卷 第 12 期(2002 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 12_1255_06

一种古代的中国算法: 盈不足术与牛顿迭代算法的比较*

何吉欢[1,2,3]

(1. 中国科学院院力学研究所 LNM; 2 东华大学 理学院, 上海 200051;
3. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊原编委何吉欢来稿)

摘要: 详细讨论了大约在公元前二世纪广泛流行的一种中国算法, 这种算法在西方被称作为双假设法• 强调指出双假设法是中国算法的一种译版• 首次给出了中国算法与牛顿迭代算法之间的联系, 如果引入了导数的概念, 中国算法可以非常方便地转化为牛顿迭代算法• 提出了一种改进的中国算法, 并给出中国算法在非线性振动方程中的应用•

关 键 词: 中国古代数学; 九章算术; 牛顿迭代算法; Duffing 方程
中图分类号: N09; O112; O322 文献标识码: A

1 九章算术简介

西方几乎对中国的古代数学一无所知, 在一些非常有名的关于古代数学史的专著中, 很少或几乎没有介绍中国古代数学史的伟大成就[1~3]• 本作者感到一种强烈的责任感, 觉得非常有必要向不懂汉语的西方学者介绍一些中国的古代巨著, 本文将主要介绍九章算术中的一种非常有名的算法, 即盈不足术• 九章算术, 顾名思义, 是由九章组成的, 即方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程和勾股• 九章算术是最古老、影响最广的一部巨著, 它共有 246 个问题, 并给出详细的计算过程, 但是没有给出严密的数学证明•

正如西方学者 Dauben[4] 提出的那样, 九章算术可以看成东方的几何原本• 欧几里得的几何原本是西方人的圣经, 同样九章算术统治了中国数学界两千年以上! 但是它的作者和创作年代现在很难精确考证, 有一种传统的说法: 九章算术是在公元前 27 世纪即在黄帝时代完成的• 但该书成于公元前 213 年是不争的事实• 在公元 213 年, 秦始皇(221~ 207 年 BC) 的焚书运动把几乎所有的学术书刊都烧掉了, 九章算术也毁在其中• 原版九章算术现在不复存在, 现在的版本是以后的数学家通过回忆记载下来的• 很多书中的内容在公元前 213 以前就被广泛

* 收稿日期: 2001_07_19; 修订日期: 2002_04_01
基金项目: 中国科学院院力学研究所非线性力学国家重点实验室资助项目
作者简介: 何吉欢(1965—) , 男, 浙江诸暨人, 博士, 教授, 担任以下两个国际杂志主编: International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation(以色列 Freund 出版公司) 和 International Journal of Nonlinear Modeling in Science and Engineering(英国 Cambridge 国际科技出版公司) (E_mail: jhhe@ dhu. edu. cn) .

应用,如勾股定理在公元前 1 100 年被广泛应用于工程问题(见周髀算经)•

2 盈不足术

九章算术中的第七章是盈不足术,这是求解方程的一种最古老的方法• 为了说明该方法的基本思想,我们考虑该章的第一个例子:

今有共买物,人出 8,盈 3;人出 7,不足 4• 问人数、物价各几何?

其求解过程为(见图 1):

1) 把出率(**8**)和(**7**)放在第一行;

2) 把盈数(**3**)和不足数(**4**)放置在出率下面;

3) 计算维积(交差积)得(**32**)和(**21**),得和为(**53**);

4) 盈减去不足数为 4- 3= 1;

5) 从而得物价为 53/1= 53•

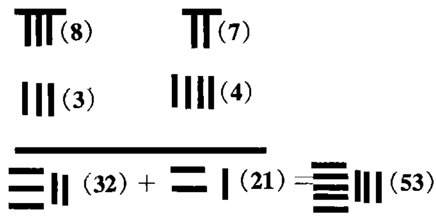

图 1 中国古代盈不足术的图解法

用现代数学的观点,盈不足术可表示为:

设 x_1 和 x_2 为两个近似物价,R_1 和 R_2 分别为盈或不足数,则物价为:

$$x = \frac{x_2 R_1 - x_1 R_2}{R_1 - R_2}, \tag{1}$$

人数为

$$y = \frac{R_1 + R_2}{|x_1 - x_2|}. \tag{2}$$

正如白尚恕[5]指出的那样,在隋唐(581~ 618 年 AD)盈不足术在中东被广泛流传,最早的阿拉伯算术书是由 al_Khowarizmi 在公元 825 年写的,英文中的算术一词(algorithm)来自他的名字,他应该对九章算术和其他古代中国巨著很了解,并把盈不足术称为中国方法(Khitai Method)• Khitai 指 China,类似的写法有 Khatai, Chatayn, Chataain 等等•

普遍认为中国算法是通过古代著名的意大利数学家 Leonardo Fibonacci(1170? ~ 1250? 年)传给西方的,据记载[2] Fibonacci 随他父亲周游了埃及、西西里、希腊和叙利亚,这次周游使他接触了东方和阿拉伯的计算方法• 在 1202 年,即他回家后不久他就出版了著名的《算经 Liber Abaci》• 该书也介绍了盈不足术,并把这种方法称为 De Regulis el_Chatayn,即中国规则• 这个名字来自中东,在那里中国算法称为 hisab al_Chataain,这里 Chataain 指 China• 该书中的一些例子和算法和中国古代数学巨著完全一样• 如在 23.8 节中(中文版见文献[5], p. 202)来自 4 世纪的孙子算经:

今有物不知其数,三三数之胜二,五五数之胜三,七七数之胜二,问物几何?

该问题的解题方法就是数论中的中国余数定理•

在 Fibonacci 的《算经》中阿拉伯语 De Regulis el_Chatayn 或 De Regulis el_Chataieyn 被译成拉丁文 Duarum Falsarum Posicionum Regula• 所以在西方这种方法被称作双假定方法(method of double false position),这实际上是九章算术中的盈不足术,即中国算法,它起源于中国是毫无疑问的,这正如钱宝琮[6]指出的那样• 可惜的是很多西方人认为这种方法起源于印度,并被阿拉伯人所掌握• 所以本作者强烈建议把双假设法改称为中国算法或中国方法•

3 中国算法与牛顿迭代算法

考虑方程

$$f(x) = 0\cdot \tag{3}$$

设 x_1 和 x_2 为方程的两个近似解, 于是我们得残量 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$, 应用中国算法, 我们可得

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}\cdot \tag{4}$$

在九章算术中给出了在下列情况下的一些不等式: 1) 双盈, 即 $f(x_1) > 0$ 和 $f(x_2) > 0$; 2) 双亏, 即 $f(x_1) < 0$ 和 $f(x_2) < 0$; 3) 一盈一亏, 即 $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0\cdot$

上述算法可以根据不等式的性质确定更合适的两个数 (x_1, x_2) 或 (x_2, x_3), 再进行计算确定更精确的近似解•

为了与牛顿迭代算法比较, 我们把(4) 写成如下形式

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 (f_2)}{f(x_1) - f(x_2)} = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}\cdot \tag{5}$$

如果引入导数 $f'(x_1)$, 它定义为

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \tag{6}$$

那么我们马上可得

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \tag{7}$$

这就是著名的牛顿(1642~ 1727 年) 的迭代算法! 当两个近似值(x_1 和 x_2) 位于真解的两侧时, 即 $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$, 中国算法比牛顿迭代算法具有很大的优越性, 牛顿迭代算法的更进一步的发展可参考文献[7, 8]•

4 中国算法的改进

中国算法可以看成是通过两个近似解的线性近似方法, 见图 2•

为了提高中国算法的精度, 我们用三点 (x_1, x_2, x_3), 而不用两点 (x_1, x_2), 用抛物线拟合该曲线, 我们得近似解为:

$$x = \frac{x_1 f_2 f_3}{(f_1 - f_2)(f_1 - f_3)} + \frac{x_2 f_1 f_3}{(f_2 - f_1)(f_2 - f_3)} + \frac{x_3 f_1 f_2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)}, \tag{8}$$

式中 $f_i = f(x_i)\cdot$

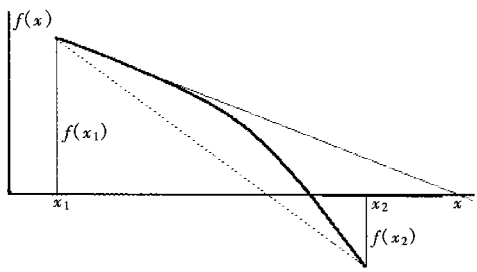

图 2 中国算法与牛顿迭代算法的比较

5 中国算法在非线性振动方程中的应用

本文作者首先猜想中国算法可能能应用于求解非线性振动方程的角频率• 我们考虑 Duffing 方程

$$R(u) = u'' + u + \varepsilon u = 0, \tag{9}$$

其初始条件为 $u(0) = A$ 和 $u'(0) = 0\cdot$

如果我们选 $u(t) = A\cos\omega t$ 作为试函数, 并把它作为方程(9) 的近似解• 当 $\omega_1^2 = 1$ 时, 得残量 $R_1(t, \varepsilon) = \varepsilon A\cos t$; 当 $\omega_2^2 = \omega^2$, 得残量 $R_2(t, \varepsilon) = (-\omega^2 + 1)A\cos\omega t + \varepsilon A\cos\omega t\cdot$ 本作

者大胆提出以下猜想：非线性振动方程的角频率的平方可用中国算法求得，即

$$\omega^2=\frac{\omega_1^2R_2(t_0,\varepsilon)-\omega_2^2R_1(t_0,\varepsilon)}{R_2(t_0,\varepsilon)-R_1(t_0,\varepsilon)}. \tag{10}$$

通常我们置 $t_0=0$.

对于 Duffing 方程，我们得

$$\omega^2=\frac{\omega_1^2R_2(0,\varepsilon)-\omega_2^2R_1(0,\varepsilon)}{R_2(0,\varepsilon)-R_1(0,\varepsilon)}=\frac{(1-\omega^2)A+\varepsilon A^3-\varepsilon\omega^2A^3}{(1-\omega^2)A}=1+\varepsilon A^2. \tag{11}$$

于是其近似周期可写成

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{1+\varepsilon A^2}}, \tag{12}$$

其精确周期为

$$T_{ex}=\frac{4}{\sqrt{1+\varepsilon A^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k\sin^2x}},\quad k=\frac{\varepsilon A^2}{2(1+\varepsilon A^2)}. \tag{13}$$

表 1 近似周期与精确周期的比较

εA^2	0	0.042	0.087	0.136	0.190	0.25
T_{ex}(精确周期)	6.283	6.187	6.088	5.986	5.879	5.767
T (10) 式	6.283	6.155	6.026 4	5.895	5.760	5.620

当 ε 很小时，近似周期与精确周期的比较见表 1. 很明显本文的理论能给出很好的近似，想一想我们的试函数 $u=A\cos\omega t$ 是多么的简单.

有趣的是在本理论中我们没有小参数假设，所以得到的解可能对所有的 ε 都有效. 当 $\varepsilon\to\infty$ 时，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{T_{ex}}{T}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-0.5\sin^2x}}=\frac{2}{\pi}\times1.685\,75=1.073. \tag{14}$$

因此我们得到的解对所有的 ε 都一致有效. 当 $\varepsilon\to\infty$ 时，7.3% 的误差是相当理想的！

当然为了提高精度，我们可以改进试函数，设试函数为

$$u=(A-B)\cos\omega t+B\cos3\omega t. \tag{15}$$

当 $\omega_1^2=1$ 时，我们得残量 $R_1(0,\varepsilon)=\varepsilon A^3$；当 $\omega_2^2=\omega^2$ 时，其残量为

$$R_2(0,\varepsilon)=(-\omega^2+1)(A-B)+(-9\omega^2+1)B+\varepsilon A^3=(-\omega^2+1)A-8B\omega^2+\varepsilon A^3.$$

应用(10)，我们得

$$\omega^2=\frac{\omega_1^2R_2(0,\varepsilon)-\omega_2^2R_1(0,\varepsilon)}{R_2(0,\varepsilon)-R_1(0,\varepsilon)}=\frac{(1-\omega^2)A-8B\omega^2+\varepsilon A^3-\varepsilon\omega^2A^3}{(1-\omega^2)A-8B\omega^2}=$$

$$1+\frac{\varepsilon A^3(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)A-8B\omega^2}, \tag{16}$$

通过简单的运算, 我们得

$$\omega=\sqrt{\frac{2A+8B+\varepsilon A^3-\sqrt{(2A+8B+\varepsilon A^3)^2-4A(1+\varepsilon A^2)}}{2(A+8B)}}. \tag{17}$$

式中 B 为一自由参数, 它可以用加权残余法来确定· 得到的(17) 式与变分迭代算法[9], 同伦摄动算法[10] 和其他近似方法[11] 得到的结果非常相似·

6 结 论

中国是四大古代文明古国之一· 古代的中国数学家为人类科学进步作出了巨大的贡献· 九章算术是中国的圣经, 完全可以与欧几里得的几何原理相媲美· 本文指出西方所谓的双假设法实际上是中国古代的盈不足术, 它是由阿拉伯数学家 al_Khowarizmi(825 年 AD) 和意大利数学家 Fibonacci(1201 年) 传到西方的, 因此作者建议把该方法称为中国算法·

[参 考 文 献]

[1] Kline M. Mathematical Thought From Ancient to Modern Times [M]. New York: Oxford University Press, 1972.

[2] Eves H. An Introduction to the Histroy of Mathematics [M]. 5th Ed. New York: CBS College Publishing, 1983.

[3] Eves H. Great Moments in Mathematics [M]. New York: The Mathematical Association of America, 1983.

[4] Dauben J W. Ancient Chinese mathematics: the Jiu zhang Suanshu vs Euclid' s Elements: Aspects of proof and the linguistic limits of knowledge[J]. Internat J Engrg Sci, 1998, **36**(12/14): 1339—1359.

[5] 白尚恕.《九章算术》注释[M]. 北京: 科学出版社, 1983.

[6] 钱宝琮. 中国数学史[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

[7] HE Ji_huan. Improvement of Newton iteration method[J]. International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2000, **1**(3): 239—240.

[8] HE Ji_huan. Newton_like iteration method for solving algebraic equations[J]. Communications in Nonl Sci &Num Simulation, 1998, **3**(2): 106—109.

[9] HE Ji_huan. Variational iteration method: a kind of nonlinear analytical technique: some examples [J]. Internat J Non_Linear Mech, 1999, **34**(4): 699—708.

[10] HE Ji_huan. Homotopy perturbation technique[J]. Computer Methods in Applied Mechancis and Engineering, 1999, **178**(3/4): 257—262.

[11] HE Ji_huan. A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2000, **1**(1): 51—70.

[12] 李文林. 数学珍宝[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

Ancient Chinese Algorithm: The Ying Buzu Shu(Method of Surplus and Deficiency) vs Newton Iteration Method

HE Ji_huan[1,2,3]

(1. LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, P R China;

2. College of Science, Shanghai Donghua University, Shanghai 200051, P R China;

3. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechancis, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: An exploratory discussion of an ancient Chinese algorithm, the Ying Buzu Shu, in about 2nd century BC, known as the rule of double false position in the West is given. In addition to pointing out that the rule of double false position is actually a translation version of the ancient Chinese algorithm, a comparison with well_known Newton iteration method is also made. If derivative is introduced, the ancient Chinese algorithm reduces to the Newton method. A modification of the ancient Chinese algorithm is also proposed, and some of applications to nonlinear oscillators are illustrated.

Key words: ancient Chinese mathematics; Jiuzhang Suanshu (Nine Chapters); Newton iteration method; Duffing equation