

文章编号: 1000-0887(2002) 12-1227-14

# 旋转壳在子午面内整体弯曲的几何非线性摄动有限元法及在波纹管计算中的应用( I )<sup>\*</sup>

朱卫平, 黄黔

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委黄黔来稿)

摘要: 为切实有效地计算波纹管, 建立了旋转壳在子午面内整体弯曲几何非线性问题的摄动有限元法。以结构环向应变的均方根为摄动小参数, 将有限元节点位移列式和节点力列式直接展开。通过摄动小参数将非线性有限元的载荷分级和迭代过程有机地统一起来, 即载荷的分级是有约束的, 每一级载荷增量和所对应的位移增量之间的关系是已知的, 每一级的计算一步到位。为叙述方便并具实用性, 将旋转壳用截锥壳单元进行离散。位移分量和载荷分量沿环向按 Fourier 级数展开, 沿子午线用多项式插值, 端面弯矩和横向力化成载荷分量离散到节点上。采用 Sanders 中小转角非线性几何方程和各向同性广义 Hooke 定律。对多层材料叠合而成的旋转壳按各层薄膜应变、弯曲应变、扭转应变相等的原则进行处理, 该方法能方便有效地计算单层和多层波纹管整体纯弯曲、横向弯曲的几何非线性问题。并为有限元处理非线性问题提供了一条新途径。

关键词: 旋转壳; 波纹管; 横向弯曲载荷; 几何非线性; 摄动法; 有限元法

中图分类号: O343.2 文献标识码: A

## 引 言

波纹管是一类子午线呈波纹状的旋转壳。通常, 作为弹性元件的波纹管位移都较大, 作为柔性连接件的波纹管局部可能进入塑性。因此, 波纹管问题一般是具有复杂形状的旋转壳的几何非线性问题和材料非线性问题。波纹管的计算, 精确解<sup>[1~5]</sup>非常可贵, 但难于适应较一般的情况, 比如, 由多层材料制成的波纹管, 波纹管的非线性问题等。

用几层薄板叠合起来通过压力加工制成的波纹管, 具有更好的柔性和可靠性, 是工程中普遍使用的波纹管。EJMA<sup>[6]</sup>标准按层间可分离的梁处理多层波纹管问题。以往的薄壳理论分析、数值分析未见涉及多层波纹管问题, 也未见涉及波纹管整体纯弯曲、横向弯曲的非线性问题。

摄动法是处理非线性问题的有效方法之一。钱伟长<sup>[7,8]</sup>(1947, 1948)等作了开创性的工作, 黄黔<sup>[9,10]</sup>(1982, 1986)以挠角加权平均为小参数给出了复合载荷下圆薄板大挠度问题的摄动解及用此小参数结合初参数法给出了轴对称旋转壳几何非线性问题的数值解。在处理板壳几何非线性

\* 收稿日期: 2001.09.29; 修订日期: 2002.05.20

作者简介: 朱卫平(1962—), 男, 江苏南通人, 副教授, 博士, 已发表论文 20 多篇, 曾获上海市科技进步奖(E-mail: wpzhu@mail.shu.edu.cn)。

问题时, 经验表明, 如果仅取结构某一点的位移为摄动小参数, 当该点的实际位移为零时则摄动法失效。但若取某一位移在结构内的加权平均值为小参数能克服这一困难<sup>[9]</sup>。但作者认为, 对于 U 型波纹管, 由于环板的挠角或径向位移与环壳的挠角或径向位移之间较大的差别, 若仍以挠角或径向位移的加权平均作小参数, 摄动解的有效范围将会变小。

迭代法和载荷增量法是有限元处理非线性问题时最常用的方法。但基于这两种方法求解非线性问题, 解的真伪一般要经过多次反复比较才能确定。正如 D. Bushnell(见[11])所指出的那样:“增量分析给出一个解, 需要用另一次不同步长的分析来估算这个解的性能; 一种迭代分析可能因为程序或数据的错误、数值误差、非线性超过算法所能适应的程度, 或者给定载荷大于结构的破坏载荷而不能收敛。”R. D. Cook(见[11])把这一过程比喻为:“很像我们在浓雾中穿行蜿蜒小路。我们在路上迈步, 观望四周, 找出方向, 沿这个方向再迈一步, 再次观望, 如此继续下去。”

故为切实有效地分析波纹管问题, 本文提出旋转壳在子午面内整体弯曲几何非线性问题的摄动有限元法。采用 Sanders<sup>[12]</sup>(1963) 中小转角非线性几何方程, 将旋转壳用截锥壳单元<sup>[7,8]</sup>进行离散, 位移分量和载荷分量沿纬线按 Fourier 级数展开, 沿子午线用多项式插值, 端面弯矩和横向力化成载荷分量离散到节点上。对多层材料叠合而成的旋转壳按各层薄膜应变相等, 弯曲应变、扭转应变相等的原则进行处理。摄动法以环向应变的均方根为小参数将节点位移列式、节点力列式直接展开。本文通过摄动小参数将非线性有限元的载荷分级和迭代过程有机统一起来, 即载荷的分级是有约束的, 每一级载荷增量和所对应的位移增量之间的关系是已知的, 每一级的计算一步到位。数值结果表明, 该摄动法在材料屈服之前都是有效的。本方法对波纹管的计算和讨论见(II)。

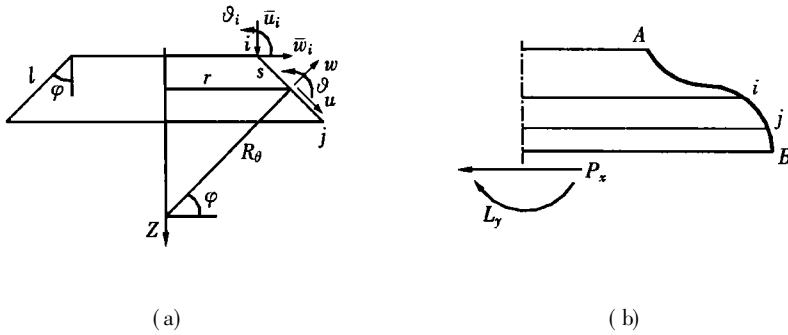


图 1 旋转壳局部及截锥壳单元

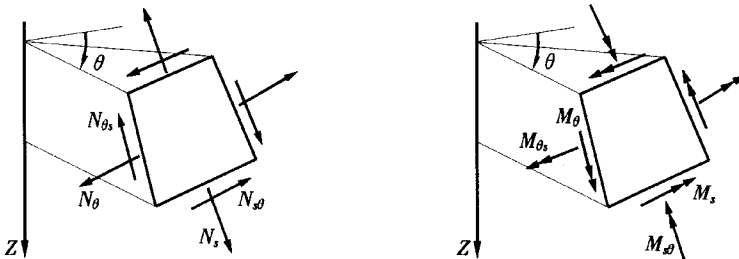


图 2 单元内力及内力矩正方向

# 1 基本方程

旋转壳在子午面内整体弯曲,即旋转壳在受力和变形关于一子午面对称(设该子午面的经度角 $\theta = 0$ )。在这种情况下,壳中面上任一点的经向位移 $u$ 、环向位移 $v$ 和法向位移 $w$ 可沿环向用 Fourier 级数展开成下列形式:

$$\begin{cases} u(s, \theta) \\ v(s, \theta) \\ w(s, \theta) \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \begin{cases} u_n(s) \\ v_n(s) \\ w_n(s) \end{cases}, \text{ 或 } \mathbf{f} = \mathbf{C}_n \mathbf{f}_n, \quad (1)$$

在式(1)中, $s$ 为沿经线的弧坐标,待求的量是 $u_n(s)$ 、 $v_n(s)$ 和 $w_n(s)$ ,它们和 $\theta$ 无关。因此,可只在壳的一条经线上划分单元。我们取直线单元,一个直线单元代表一个截顶锥,一个节点代表一个截圆。现考虑一单元 $e$ ,节点编号为 $i, j$ ;  $r$ 为平行圆半径(图1)。

设在局部坐标系下,第 $n$ 项的节点位移为

$$\begin{cases} \mathbf{d}_n = [u_{ni} \ v_{ni} \ w_{ni} \ \delta_{ni} \ u_{nj} \ v_{nj} \ w_{nj} \ \delta_{nj}]^T, \\ \delta_{ni} = (dw_n/ds)_i, \ \delta_{nj} = (dv_n/ds)_j. \end{cases} \quad (2a, b)$$

位移函数为

$$\begin{cases} u_n(s) = \alpha_1 + \alpha_2 s, \ v_n(s) = \alpha_3 + \alpha_4 s, \\ w_n(s) = \alpha_5 + \alpha_6 s + \alpha_7 s^2 + \alpha_8 s^3. \end{cases} \quad (3a, b, c)$$

则位移矩阵

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{N} \mathbf{d}_n, \ \mathbf{N} = [\mathbf{N}_u^T \ \mathbf{N}_v^T \ \mathbf{N}_w^T]^T \quad (\xi = s/l), \quad (4a, b)$$

$$\mathbf{N}_u = [1 - \xi \ 0 \ 0 \ 0 \ \xi \ 0 \ 0 \ 0], \quad (4c)$$

$$\mathbf{N}_v = [0 \ 1 - \xi \ 0 \ 0 \ 0 \ \xi \ 0 \ 0], \quad (4d)$$

$$\mathbf{N}_w = [0 \ 0 \ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \ l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \ 0 \ 0 \ 3\xi^2 - 2\xi^3 \ -l(\xi^2 - \xi^3)]. \quad (4e)$$

于是,式(1)可以写成

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}_n \mathbf{N} \mathbf{d}_n. \quad (5)$$

我们采用 Sanders<sup>[12]</sup> 中小转角非线性几何方程,应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ 分为线性应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_L\}$ 和非线性应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}\}$ 之和

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_s \ \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \ \boldsymbol{\varepsilon}_{s\theta} \ \boldsymbol{\kappa}_s \ \boldsymbol{\kappa}_\theta \ \boldsymbol{\kappa}_{s\theta}]^T, \ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \begin{cases} \partial u / \partial s \\ (u \sin \varphi + \partial v / \partial \theta + w \cos \varphi) / r \\ (\partial u / \partial \theta + r \partial v / \partial s - v \sin \varphi) / r \\ \partial X / \partial s \\ (X \sin \varphi + \partial Y / \partial \theta) / r \\ ((\partial X / \partial \theta + r \partial Y / \partial s - Y \sin \varphi + Z \cos \varphi) / r) \end{cases}, \quad (7a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X^2 + Z^2 \\ Y^2 + Z^2 \\ 2XY \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases} = \begin{cases} -\partial w / \partial s \\ (-\partial w / \partial \theta + v \cos \varphi) / r \\ (-\partial u / \partial \theta + r \partial v / \partial s + v \sin \varphi) / 2r \end{cases}. \quad (7b, c)$$

将式(5)代入(7a, c)得

$$\varepsilon_L = \mathbf{B}_L \mathbf{d}_n, \quad \mathbf{B}_L = [\mathbf{b}_1^T \quad \mathbf{b}_2^T \quad \mathbf{b}_3^T \quad \mathbf{b}_4^T \quad \mathbf{b}_5^T \quad \mathbf{b}_6^T]^T, \quad (8a)$$

$$\mathbf{b}_1 = \left[ -\frac{1}{l} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{l} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \cos n\theta, \quad (8b)$$

$$\mathbf{b}_2 = \left[ \frac{(1-\xi)\sin\varphi}{r} \quad \frac{n(1-\xi)}{r} \quad \frac{(1-3\xi^2+2\xi^3)\cos\varphi}{r} \quad \frac{l(\xi-2\xi^2+\xi^3)\cos\varphi}{r} \right. \\ \left. \frac{\xi\sin\varphi}{r} \quad \frac{n\xi}{r} \quad \frac{(3\xi^2-2\xi^3)\cos\varphi}{r} \quad \frac{l(-\xi^2+\xi^3)\cos\varphi}{r} \right] \cos n\theta, \quad (8c)$$

$$\mathbf{b}_3 = \left[ -\frac{n(1-\xi)}{r} \quad -\frac{1}{l} - \frac{(1-\xi)\sin\varphi}{r} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{n\xi}{r} \quad \frac{1}{l} - \frac{\xi\sin\varphi}{r} \quad 0 \quad 0 \right] \sin n\theta, \quad (8d)$$

$$\mathbf{b}_4 = \left[ 0 \quad 0 \quad \frac{6-12\xi}{l^2} \quad \frac{4-6\xi}{l} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{6+12\xi}{l^2} \quad \frac{2-6\xi}{l} \right] \cos n\theta, \quad (8e)$$

$$\mathbf{b}_5 = \left[ 0 \quad \frac{n(1-\xi)\cos\varphi}{r^2} \quad \frac{n^2(1-3\xi^2+2\xi^3)}{r^2} - \frac{l(6\xi+6\xi^2)\sin\varphi}{rl} \right. \\ \left. \frac{n^2l(\xi-2\xi^2+\xi^3)}{r^2} - \frac{(1-4\xi+3\xi^2)\sin\varphi}{r} \quad 0 \quad \frac{n\xi\cos\varphi}{r^2} \right. \\ \left. \frac{n^2(3\xi^2-2\xi^3)}{r^2} - \frac{(6\xi-6\xi^2)\sin\varphi}{rl} \quad \frac{n^2l(-\xi^2+\xi^3)}{r^2} - \frac{(-2\xi+3\xi^2)\sin\varphi}{r} \right] \cos n\theta, \quad (8f)$$

$$\mathbf{b}_6 = \left[ \frac{n(1-\xi)\cos\varphi}{2r^2} \quad -\frac{3\cos\varphi}{2rl} - \frac{(1-\xi)\cos\varphi}{2r^2} \right. \\ \left. \frac{2n(-6\xi+6\xi^2)}{rl} - \frac{n(1-3\xi^2+2\xi^3)\sin\varphi}{r^2} \right. \\ \left. \frac{2n(1-4\xi+3\xi^2)}{r} - \frac{nl(\xi-2\xi^2+\xi^3)\sin\varphi}{r^2} \quad \frac{n\xi\cos\varphi}{2r^2} \quad \frac{3\cos\varphi}{2rl} - \frac{\xi\cos\varphi\sin\varphi}{2r^2} \right. \\ \left. \frac{2n(6\xi-6\xi^2)}{rl} - \frac{n(3\xi^2-2\xi^3)\sin\varphi}{r^2} \right. \\ \left. \frac{2n(-2\xi+3\xi^2)}{r} - \frac{nl(-\xi^2+\xi^3)\sin\varphi}{r^2} \right] \sin n\theta. \quad (8g)$$

把式(5)代入(7c)得

$$[X \quad Y \quad Z]^T = [\mathbf{g}_x^T \quad \mathbf{g}_y^T \quad \mathbf{g}_z^T]^T \mathbf{d}_n, \quad (9a)$$

$$\mathbf{g}_x = \left[ 0 \quad 0 \quad -\frac{6(-\xi+\xi^2)}{l} \quad -(1-4\xi+3\xi^2) \right. \\ \left. 0 \quad 0 \quad -\frac{6(\xi-\xi^2)}{l} \quad -(-2\xi+3\xi^2) \right] \cos n\theta, \quad (9b)$$

$$\mathbf{g}_y = \left[ 0 \quad \frac{(1-\xi)\cos\varphi}{r} \quad \frac{n(1-3\xi^2+2\xi^3)}{r} \quad \frac{nl(\xi-2\xi^2+\xi^3)}{r} \right. \\ \left. 0 \quad \frac{\xi\cos\varphi}{r} \quad \frac{n(3\xi^2-2\xi^3)}{r} \quad \frac{nl(-\xi^2+\xi^3)}{r} \right] \sin n\theta, \quad (9c)$$

$$\mathbf{g}_z = \left[ \frac{n(1-\xi)}{2r} \quad -\frac{1}{2l} + \frac{(1-\xi)\sin\varphi}{2r} \quad 0 \quad 0 \right. \\ \left. \frac{n\xi}{2r} \quad \frac{1}{2l} + \frac{\xi\sin\varphi}{2r} \quad 0 \quad 0 \right] \sin n\theta. \quad (9d)$$

将上式代入式(7b), 非线性应变  $\varepsilon_{NL}$  可表为

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (\mathbf{g}_x \mathbf{d}_n)^2 + (\mathbf{g}_z \mathbf{d}_n)^2 \\ (\mathbf{g}_y \mathbf{d}_n)^2 + (\mathbf{g}_z \mathbf{d}_n)^2 \\ 2(\mathbf{g}_x \mathbf{d}_n)(\mathbf{g}_y \mathbf{d}_n) \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

内力分量为(正方向如图 2)

$$\sigma = [N_s \quad N_\theta \quad N_{s\theta} \quad M_s \quad M_\theta \quad M_{s\theta}]^T. \quad (11)$$

弹性矩阵  $D$  为

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (12a, b)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} h^2/12 & \nu h^2/12 & 0 \\ \nu h^2/12 & h^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)h^2/24 \end{bmatrix}. \quad (12c)$$

内力应变关系为

$$\sigma = D\varepsilon \quad (13)$$

将式(6)和(8)代入上式,得

$$\sigma = DB_L \mathbf{d}_n + D\varepsilon_{NL}. \quad (14)$$

令

$$\mathbf{R}_n = [R_{ui} \quad R_{vi} \quad R_{wi} \quad R_{\theta i} \quad R_{uj} \quad R_{vj} \quad R_{wj} \quad R_\theta]^T \quad (15)$$

为节点力或等效节点力,对单元运用虚功原理

$$\delta U = \delta W, \quad \delta U = \int_A \delta \varepsilon^T \sigma dA, \quad \delta W = \delta \mathbf{d}_n^T \mathbf{R}_n, \quad (16a, b, c)$$

将式(6)和(14)代入式(16b),得

$$\delta U = \delta U_L + \delta U_{N1} + \delta U_{N2} + \delta U_{N3}. \quad (17)$$

线性应变产生的应变能的变分

$$\delta U_L = \delta \mathbf{d}_n^T \left[ \int_A \mathbf{B}_L^T D B_L dA \right] \mathbf{d}_n = \delta \mathbf{d}_n^T \mathbf{K}_L \mathbf{d}_n, \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_L = \int_A \mathbf{B}_L^T D B_L dA. \quad (19)$$

$\mathbf{K}_L$  为单元线性刚度矩阵. 与非线性应变有关的应变能的变分为

$$\begin{cases} \delta U_{N1} = \delta \mathbf{d}_n^T \int_A \mathbf{B}_L^T D \varepsilon_{NL} dA, \\ \delta U_{N2} = \int_A \delta \varepsilon_{NL}^T D B_L dA \mathbf{d}_n, \\ \delta U_{N3} = \int_A \delta \varepsilon_{NL} D \varepsilon_{NL} dA. \end{cases} \quad (20)$$

关于非节点载荷的处理. 与式(1)相对应,设作用在壳上的载荷可以表示成

$$\begin{Bmatrix} q_u(s, \theta) \\ q_v(s, \theta) \\ q_w(s, \theta) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos m\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin m\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos m\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{um}(s) \\ q_{vm}(s) \\ q_{wm}(s) \end{Bmatrix}, \quad \text{或 } \mathbf{q} = \mathbf{C}_m \mathbf{q}_m. \quad (21)$$

与之等效的作用在单元节点上的集中力为式(15),这两种载荷在虚位移  $\mathbf{d}_n$  上作的虚功相等. 即

$$\mathbf{d}_n^T \mathbf{R}_n = \int_A \mathbf{f}^T \mathbf{q} dA \quad (22)$$

其中  $\mathbf{f}$  为与  $f$  (见式 5) 相对应的虚位移

$$\mathbf{f}^T = \mathbf{d}_n^T \mathbf{N}^T \mathbf{C}_n^T = \mathbf{d}_n \mathbf{N}^T \mathbf{C}_n \quad (23)$$

将式(21)和(23)代入(22),得

$$\mathbf{R}_n = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{C}_n \mathbf{C}_m \mathbf{q}_m dA \quad (24)$$

对图 1 所示的旋转壳, 设上端  $A$  的位移边界条件是齐次的, 即

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (25)$$

利用式(21), 下端  $B$  作用的弯曲载荷可以化成:

$$\begin{aligned} L_y &= \int_0^{2\pi} q_u (r_B \cos \theta) r_B d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{m=1}^{\infty} q_{um} \cos m\theta \right) (r_B \cos \theta) r_B d\theta = \begin{cases} q_{u1} \pi r_B^2 & m = 1, \\ 0 & m > 1, \end{cases} \\ P_x &= \int_0^{2\pi} q_v s \sin \theta r_B d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{m=1}^{\infty} q_{vm} \sin m\theta \right) \sin \theta r_B d\theta = \begin{cases} q_{v1} \pi r_B & m = 1, \\ 0 & m > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

所以  $\mathbf{q}_m = \mathbf{q}_1 = [L_y / \pi r_B^2 \quad P_x / \pi r_B \quad 0]^T$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{C}_m \mathbf{q}_m = \mathbf{C}_1 \mathbf{q}_1$ , 将其代入式(24), 仅沿端面(节点  $j$ ,  $\xi = 1$ )的圆周积分, 得由  $L_y$  和  $P_x$  产生的等效节点力

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad L_y / r_B \quad P_x \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{R}_n = 0 \quad (n > 1) \quad (26)$$

实际计算中, 往往只需要考虑单一载荷的作用。在纯弯曲情况下,  $L_y \neq 0, P_x \equiv 0$ ,

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad L_y / r_B \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (27)$$

仅在横向力作用下,  $P_x \neq 0, L_y \equiv 0$ ,

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad P_x \quad 0 \quad 0]^T \quad (28)$$

在研究波纹管的横向位移问题时, 由于弯矩的反对称性, 当中的横截面上弯矩为零, 因此沿该截面将波纹管一分为二, 节点载荷即可按式(28)处理。

以上各关系式都是对某单元在局部坐标系中建立的, 结构总节点平衡方程的建立将在整体坐标系中进行。坐标系如图 1, 记整体坐标系中的量在相应的字母上加“-”。整体坐标中的量与局部坐标中对应的量有如下关系式:

$$\mathbf{d}_n = \Gamma \mathbf{d}_n, \quad \mathbf{R}_n = \Gamma \mathbf{R}_n, \quad \mathbf{K}_L = \Gamma^T \mathbf{K}_L \Gamma, \quad (29a \sim c)$$

其中

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{-1} = \Gamma^T, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29d \sim f)$$

为坐标转换矩阵。从单元到整体的集合过程与通常的有限元法一样。

## 2 摄动方程

将摄动小参数  $\lambda$  定义为

$$\lambda^2 = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \left( \frac{v}{2\pi r} \right)^2 dA_k, \quad \Lambda = \sum_{k=1}^{N_e} A_k \quad (30)$$

其中,  $v$  为环向位移由式(1)的分量表示,  $N_e$  为单元总数,  $A_k$  为第  $k$  个单元的面积,  $\Lambda$  为离散结构的总面积。

将节点位移  $d_n$  和节点力  $R_n$  用  $\lambda$  展开:

$$d_n = \lambda d_n^{(1)} + \lambda^3 d_n^{(3)} + \lambda^5 d_n^{(5)} + \dots, \quad (31)$$

$$R_n = \lambda R_n^{(1)} + \lambda^3 R_n^{(3)} + \lambda^5 R_n^{(5)} + \dots \quad (32)$$

将式(31)、(32)代入(16c)

$$\begin{aligned} \delta W = & \lambda^2 \delta d_n^{(1)T} R_n^{(1)} + \lambda^4 [\delta d_n^{(3)T} R_n^{(1)} + \delta d_n^{(1)T} R_n^{(3)}] + \\ & \lambda^6 [\delta d_n^{(5)T} R_n^{(1)} + \delta d_n^{(3)T} R_n^{(3)} + \delta d_n^{(1)T} R_n^{(5)}] + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

将式(31)、(32)代入(18)

$$\begin{aligned} \delta U_L = & \lambda^2 \delta d_n^{(1)T} K_L d_n^{(1)} + \lambda^4 [\delta d_n^{(3)T} K_L d_n^{(1)} + \delta d_n^{(1)T} K_L d_n^{(3)}] + \\ & \lambda^6 [\delta d_n^{(5)T} K_L d_n^{(1)} + \delta d_n^{(3)T} K_L d_n^{(3)} + \delta d_n^{(1)T} K_L d_n^{(5)}] + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

将式(31)代入(10)

$$\varepsilon_{NL} = \lambda^2 E_2 + \lambda^4 E_4 + \lambda^6 E_6 + \dots, \quad (35a)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} [g_x d_n^{(1)}]^2 + [g_z d_n^{(1)}]^2 \\ [g_y d_n^{(1)}]^2 + [g_z d_n^{(1)}]^2 \\ 2[g_x d_n^{(1)}][g_y d_n^{(1)}] \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{Bmatrix}, \quad (35b)$$

$$E_4 = \begin{Bmatrix} [g_x d_n^{(1)}][g_x d_n^{(3)}] + [g_z d_n^{(1)}][g_z d_n^{(3)}] \\ [g_y d_n^{(1)}][g_y d_n^{(3)}] + [g_z d_n^{(1)}][g_z d_n^{(3)}] \\ [g_x d_n^{(1)}][g_y d_n^{(3)}] + [g_x d_n^{(3)}][g_y d_n^{(1)}] \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{Bmatrix}, \quad (35c)$$

$$E_6 = \begin{Bmatrix} [g_x d_n^{(3)}]^2/2 + [g_x d_n^{(1)}][g_x d_n^{(5)}] + [g_z d_n^{(3)}]^2/2 + [g_z d_n^{(1)}][g_z d_n^{(5)}] \\ [g_y d_n^{(3)}]^2/2 + [g_y d_n^{(1)}][g_y d_n^{(5)}] + [g_z d_n^{(3)}]^2/2 + [g_z d_n^{(1)}][g_z d_n^{(5)}] \\ [g_x d_n^{(3)}][g_y d_n^{(3)}] + [g_x d_n^{(1)}][g_y d_n^{(5)}] + [g_x d_n^{(5)}][g_y d_n^{(1)}] \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{Bmatrix}. \quad (35d)$$

对式(35a)进行变分和转置

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{NL}^T = & \delta d_n^{(1)T} [\lambda^2 F_{12}^T + \lambda^4 F_{14}^T + \lambda^6 F_{16}^T + \dots] + \\ & \delta d_n^{(3)T} [\lambda^4 F_{34}^T + \lambda^6 F_{36}^T + \lambda^8 F_{38}^T + \dots] + \\ & \delta d_n^{(5)T} [\lambda^6 F_{56}^T + \lambda^8 F_{58}^T + \lambda^{10} F_{50}^T + \dots] + \dots \end{aligned} \quad (36a)$$

$$F_{12} = \begin{Bmatrix} [g_x d_n^{(1)}] \cdot g_x + [g_z d_n^{(1)}] \cdot g_z \\ [g_y d_n^{(1)}] \cdot g_y + [g_z d_n^{(1)}] \cdot g_z \\ [g_x d_n^{(1)}] \cdot g_y + [g_y d_n^{(1)}] \cdot g_x \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{Bmatrix}, \quad (36b)$$

$$\mathbf{F}_{14} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{g}_x \mathbf{d}_n^{(3)}] \cdot \mathbf{g}_x + [\mathbf{g}_z \mathbf{d}_n^{(3)}] \cdot \mathbf{g}_z \\ [\mathbf{g}_y \mathbf{d}_n^{(3)}] \cdot \mathbf{g}_y + [\mathbf{g}_z \mathbf{d}_n^{(3)}] \cdot \mathbf{g}_z \\ [\mathbf{g}_x \mathbf{d}_n^{(3)}] \cdot \mathbf{g}_y + [\mathbf{g}_y \mathbf{d}_n^{(3)}] \cdot \mathbf{g}_x \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{Bmatrix}, \quad (36c)$$

$$\mathbf{F}_{16} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{g}_x \mathbf{d}_n^{(5)}] \cdot \mathbf{g}_x + [\mathbf{g}_z \mathbf{d}_n^{(5)}] \cdot \mathbf{g}_z \\ [\mathbf{g}_y \mathbf{d}_n^{(5)}] \cdot \mathbf{g}_y + [\mathbf{g}_z \mathbf{d}_n^{(5)}] \cdot \mathbf{g}_z \\ [\mathbf{g}_x \mathbf{d}_n^{(5)}] \cdot \mathbf{g}_y + [\mathbf{g}_y \mathbf{d}_n^{(5)}] \cdot \mathbf{g}_x \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{Bmatrix}, \quad (36d)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{34} = \mathbf{F}_{56}, \\ \mathbf{F}_{14} = \mathbf{F}_{36} = \mathbf{F}_{58}, \\ \mathbf{F}_{16} = \mathbf{F}_{38} = \mathbf{F}_{510} \end{cases} \quad (36e \sim g)$$

将式(17)~(20)及(31)~(36)代入式(16),由于等式对任意 $\lambda$ 值成立,故可依 $\lambda$ 的不同幂次分别相等,得到

$$\lambda^2: \delta \mathbf{d}_n^{(1)T} \mathbf{K}_L \mathbf{d}_n^{(1)} = \delta \mathbf{d}_n^{(1)T} \mathbf{R}^{(1)}, \quad (37a)$$

$$\lambda^3: \delta \mathbf{d}_n^{(1)T} \left[ \int_A \mathbf{F}_{12} \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA \right] \mathbf{d}_n^{(1)} + \int_A \mathbf{B}_L \mathbf{D} \mathbf{E}_2 dA \equiv 0, \quad (37b)$$

$$\lambda^4: \delta \mathbf{d}_n^{(3)T} \mathbf{K}_L \mathbf{d}_n^{(1)} + \delta \mathbf{d}_n^{(1)T} \left[ \mathbf{K}_L \mathbf{d}_n^{(3)} + \int_A \mathbf{F}_{12} \mathbf{D} \mathbf{E}_2 dA \right] = \delta \mathbf{d}_n^{(3)T} \mathbf{R}^{(1)} + \delta \mathbf{d}_n^{(1)T} \mathbf{R}^{(3)}, \quad (37c)$$

$$\lambda^5: \delta \mathbf{d}_n^{(1)T} \left[ \int_A \mathbf{F}_{14} \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA \right] \mathbf{d}_n^{(1)} + \left[ \int_A \mathbf{F}_{12} \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA \right] \mathbf{d}_n^{(3)} + \int_A \mathbf{B}_L \mathbf{D} \mathbf{E}_4 dA + \delta \mathbf{d}_n^{(3)T} \left[ \int_A \mathbf{F}_{34} \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA \right] \mathbf{d}_n^{(1)} + \int_A \mathbf{B}_L \mathbf{D} \mathbf{E}_2 dA \equiv 0, \quad (37d)$$

$$\lambda^6: \delta \mathbf{d}_n^{(5)T} \mathbf{K}_L \mathbf{d}_n^{(1)} + \delta \mathbf{d}_n^{(3)T} \left[ \mathbf{K}_L \mathbf{d}_n^{(3)} + \int_A \mathbf{F}_{34} \mathbf{D} \mathbf{E}_2 dA \right] + \delta \mathbf{d}_n^{(1)T} \left[ \mathbf{K}_L \mathbf{d}_n^{(5)} + \int_A \mathbf{F}_{14} \mathbf{D} \mathbf{E}_2 dA + \int_A \mathbf{F}_{12} \mathbf{D} \mathbf{E}_4 dA \right] = \delta \mathbf{d}_n^{(5)T} \mathbf{R}^{(1)} + \delta \mathbf{d}_n^{(3)T} \mathbf{R}^{(3)} + \delta \mathbf{d}_n^{(1)T} \mathbf{R}^{(5)}. \quad (37e)$$

由式(36e)可知,其中 $\int_A \mathbf{F}_{34} \mathbf{D} \mathbf{E}_2 dA = \int_A \mathbf{F}_{12} \mathbf{D} \mathbf{E}_2 dA$ .依各等式中 $\delta \mathbf{d}_n^{(1)}$ 、 $\delta \mathbf{d}_n^{(3)}$ 、 $\delta \mathbf{d}_n^{(5)}$ 的系数之和为零,删除恒为零的等式及重复的方程,得

$$\mathbf{K}_L \mathbf{d}_n^{(1)} = \mathbf{R}^{(1)}, \quad \mathbf{K}_L \mathbf{d}_n^{(3)} + \int_A \mathbf{F}_{12} \mathbf{D} \mathbf{E}_2 dA = \mathbf{R}^{(3)}, \quad (38a, b)$$

$$\mathbf{K}_L \mathbf{d}_n^{(5)} + \int_A \mathbf{F}_{14} \mathbf{D} \mathbf{E}_2 dA + \int_A \mathbf{F}_{12} \mathbf{D} \mathbf{E}_4 dA = \mathbf{R}^{(5)}. \quad (38c)$$

现在我们将摄动小参数的定义式(30)展开,由式(4)、(5)得:

$$v = \sin n \theta \mathbf{N}_v \mathbf{d}_n = \sin n \theta \mathbf{N}_v \left\{ \lambda \mathbf{d}_n^{(1)} + \lambda^3 \mathbf{d}_n^{(3)} + \lambda^5 \mathbf{d}_n^{(5)} + \dots \right\}, \quad (39)$$

将式(39)代入(30),使等式两边 $\lambda$ 的同次幂相等,得

$$\lambda^2: \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^N \int_{A_k} \frac{\sin^2 n \theta}{4\pi^2 r^2} [N_v \mathbf{d}_n^{(1)}]^2 dA_k = 1, \quad (40a)$$

$$\lambda^4: \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^N \int_{A_k} \frac{\sin^2 n \theta}{4\pi^2 r^2} 2[N_v \mathbf{d}_n^{(1)}][N_v \mathbf{d}_n^{(3)}] dA_k = 0, \quad (40b)$$



$$\lambda^6: \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \frac{\sin^2 n\theta}{4\pi^2 r^2} \left\{ [N_v d_n^{(3)}]^2 + 2[N_v d_n^{(1)}][N_v d_n^{(5)}] \right\} dA_k = 0 \quad (40c)$$

再看边界条件, 将式(31)代入(25), 可得到各阶齐次的边界条件

$$f^{(1)} = 0, f^{(3)} = 0, f^{(5)} = 0, \dots \quad (41a \sim c)$$

将式(38)、(40)、(41)中各式的(a)归入(A), (b)归入(B), (c)归入(C), 并在整体坐标系中集成, 得下列问题(加“-”的量是对应的不加“-”的量在整体坐标系中的集成, 坐标变换见式(29)):

$$(A) \begin{cases} K_1 d_n^{(1)} = R_n^{(1)}, & (42) \\ f^{(1)} = 0 & \text{在已知位移边界上,} & (43) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \frac{\sin^2 n\theta}{4\pi^2 r^2} [N_v d_n^{(1)}]^2 dA_k = \Lambda \cdot \quad (44)$$

$$(B) \begin{cases} K_1 d_n^{(3)} = R_n^{(1)} + P_3, P_3 = - \int_A F_{12} DE_2 dA, & (45) \\ f^{(3)} = 0 & \text{在已知位移边界上,} & (46) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \frac{\sin^2 n\theta}{4\pi^2 r^2} [N_v d_n^{(1)}][N_v d_n^{(3)}] dA_k = 0 \quad (47)$$

$$(C) \begin{cases} K_1 d_n^{(5)} = R_n^{(5)} + P_4 + P_5, P_4 = - \int_A F_{44} DE_2 dA, P_5 = - \int_A F_{12} DE_4 dA, & (48) \\ f^{(5)} = 0 & \text{在已知位移边界上,} & (49) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \frac{\sin^2 n\theta}{4\pi^2 r^2} \left\{ [N_v d_n^{(3)}]^2 + 2[N_v d_n^{(1)}][N_v d_n^{(5)}] \right\} dA_k = 0 \quad (50)$$

.....

### 3 摄动方程的解

将旋转壳(图1)分为 $N_e$ 个单元, 节点由A至B顺序编号, A点为“1”, B点为“ $N_j$ ”, 结构总节点数为 $N_j = N_e + 1$ , 总自由度为 $4N_j$ .

我们只考虑单一载荷作用的情况, 即只有 $L_y$ 作用或只有 $P_x$ 作用, 相应的节点力由式(27)或(28)表示. 通过式(32)可将其写成统一的形式:

$$\begin{cases} R_n = R_1 = pH, p = \begin{cases} L_y/r_B & (L_y \neq 0, P_x = 0), \\ P_x & (L_y = 0, P_x \neq 0), \end{cases} \\ H = \begin{cases} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T & (L_y \neq 0, P_x = 0), \\ [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T & (L_y = 0, P_x \neq 0), \end{cases} \\ R_n^{(1)} = p^{(1)}H, R_n^{(3)} = p^{(3)}H, R_n^{(5)} = p^{(5)}H, \dots \\ p = p^{(1)} + \lambda^3 p^{(3)} + \lambda^5 p^{(5)} + \dots \end{cases} \quad (51)$$

下面按问题的顺序求解. 对于问题(A), 先令 $p^{(1)} = 1$ , 由式(42)、(43)解得相应的节点位移 $e_n^{(1)}$ , 于是, 实际1阶节点力产生的1阶节点位移可表为:

$$d_n^{(1)} = p^{(1)} e_n^{(1)}. \quad (52)$$

对应的1阶单元节点位移为:

$$\mathbf{d}_n^{(1)} = p^{(1)} \mathbf{e}_n^{(1)}. \quad (53)$$

将式(53)代入(44),得到

$$p^{(1)} = \sqrt{\Lambda / \Phi_1}, \quad \Phi_1 = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \frac{\sin^2 n\theta}{4\pi^2 r^2} [N_v \mathbf{e}_n^{(1)}]^2 dA_k. \quad (54)$$

对于问题(B),从式(53)、(54)、(35b)、(36b)及(45)可知,由于问题(A)的确定, $\mathbf{P}_3$ 为已知。因此,由式(45)、(46),当 $\mathbf{P}_3$ 单独作用时,可解得相应的节点位移 $\Delta_3$ ;当 $p^{(3)} = 1$ 单独作用时,可解得相应的节点位移 $\mathbf{e}_n^{(3)} = \mathbf{e}_n^{(1)}$ 。于是,实际3阶节点位移可表为:

$$\mathbf{d}_n^{(3)} = p^{(3)} \mathbf{e}_n^{(1)} + \Delta_3, \quad (55)$$

对应的3阶单元节点位移为:

$$\mathbf{d}_n^{(3)} = p^{(3)} \mathbf{e}_n^{(1)} + \Delta_3. \quad (56)$$

将式(56)代入(47),得到

$$p^{(3)} = -\Phi_4 / \Phi_3, \quad \Phi_3 = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \frac{\sin^2 n\theta}{4\pi^2 r^2} [N_v \mathbf{e}_n^{(1)}]^2 p^{(1)} dA_k, \quad (57a, b)$$

$$\Phi_4 = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \frac{\sin^2 n\theta}{4\pi^2 r^2} [N_v \mathbf{e}_n^{(1)}] [N_v \Delta_3] p^{(1)} dA_k. \quad (57c)$$

对于问题(C),从式(53)~(57)、(35b, c)、(36b, c)及(48)可知,由于问题(A)和(B)的确定, $\mathbf{P}_4$ 和 $\mathbf{P}_5$ 为已知。因此,由式(48)、(49),当 $\mathbf{P}_4$ 和 $\mathbf{P}_5$ 联合作用(不考虑 $p^{(5)}$ )时,可解得相应的节点位移 $\Delta_5$ ;当 $p^{(5)} = 1$ 单独作用时,可解得相应的节点位移 $\mathbf{e}_n^{(5)} = \mathbf{e}_n^{(1)}$ 。于是,实际5阶节点位移可表为:

$$\mathbf{d}_n^{(5)} = p^{(5)} \mathbf{e}_n^{(1)} + \Delta_5. \quad (58)$$

对应的5阶单元节点位移为:

$$\mathbf{d}_n^{(5)} = p^{(5)} \mathbf{e}_n^{(1)} + \Delta_5. \quad (59)$$

将式(56)和(59)代入(50),得到

$$p^{(5)} = -\Phi_6 / \Phi_3, \quad \Phi_3 = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \frac{\sin^2 n\theta}{2\pi^2 r^2} [N_v \mathbf{e}_n^{(1)}]^2 p^{(1)} dA_k, \quad (60a, b)$$

$$\Phi_6 = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{A_k} \frac{\sin^2 n\theta}{4\pi^2 r^2} \left\{ [N_v \mathbf{d}_n^{(3)}]^2 + 2[N_v \mathbf{e}_n^{(1)}] [N_v \Delta_5] p^{(1)} \right\} dA_k. \quad (60c)$$

至此,前5阶 $\mathbf{R}_n$ 和 $\mathbf{d}_n$ 完全确定。

内力分量由式(14)确定:

$$\sigma = \mathbf{D} \mathbf{B}_L \mathbf{d}_n + \mathbf{D} \varepsilon_{NL}, \quad (61a)$$

$$\mathbf{d}_n = \lambda \mathbf{d}_n^{(1)} + \lambda^3 \mathbf{d}_n^{(3)} + \lambda^5 \mathbf{d}_n^{(5)} + \dots, \quad (61b)$$

$$\varepsilon_{NL} = \lambda^2 \mathbf{E}_2 + \lambda^4 \mathbf{E}_4 + \lambda^6 \mathbf{E}_6 + \dots. \quad (61c)$$

其中, $\mathbf{B}_L$ 见式(8), $\mathbf{D}$ 见式(12)及 $\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_4, \mathbf{E}_6, \dots$ 见式(35)。

## 4 多层薄壁叠合旋转壳模型

工程中为保证波纹管的强度又增加其柔性常采用多层薄壁结构技术制造波纹管。为适合这种波纹管的计算,我们提出一种多层薄壁旋转壳模型。假设:

1) 多层结构由两层及两层以上厚度相等、材料性质相同、几何完全相似的薄壁结构自由叠

合而成, 多层结构在边缘上各层固连成一体;

- 2) 多层结构中各层的拉压、剪切、弯曲及扭转应变分别相等;
- 3) 各层间的挤压应力和摩擦力忽略不计。

上述假设看似对实际结构作了很大的简化, 但还是合理的。例如, 各层间挤压应力和单位面积上摩擦力的大小实际上不会超过薄壳应力分量  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , 而在薄壳理论中  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz} \ll \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  作为小量处理, 因此, 在计算多层薄壁结构时完全不必考虑各层间的挤压应力和摩擦力。

设结构共有  $n_p$  层, 各层厚  $h_p$ , 任一单层有下列物理方程:

$$N_s = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h_p/2}^{h_p/2} (\epsilon_s + \nu \epsilon_\theta) dz, \quad N_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h_p/2}^{h_p/2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_s) dz, \quad (62a, b)$$

$$N_{s\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h_p/2}^{h_p/2} \gamma_{s\theta} dz, \quad M_s = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h_p/2}^{h_p/2} (\kappa_s z + \nu \kappa_\theta z) z dz, \quad (62c, d)$$

$$M_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h_p/2}^{h_p/2} (\kappa_\theta z + \nu \kappa_s z) dz, \quad M_{s\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h_p/2}^{h_p/2} \kappa_{s\theta} z^2 dz. \quad (62e, f)$$

多层结构单元体侧面总内力和内力矩为

$$N_s = \sum_1^{n_p} N_s = n_p N_s = \frac{n_p E h_p}{1-\nu^2} (\epsilon_s + \nu \epsilon_\theta), \quad (63a)$$

$$N_\theta = \sum_1^{n_p} N_\theta = n_p N_\theta = \frac{n_p E h_p}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_s), \quad (63b)$$

$$N_{s\theta} = \sum_1^{n_p} N_{s\theta} = n_p N_{s\theta} = \frac{n_p E h_p}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} \gamma_{s\theta}, \quad (63c)$$

$$M_s = \sum_1^{n_p} M_s = n_p M_s = \frac{n_p E h_p^3}{1-\nu^2} \left[ \frac{h_p^2}{12} \kappa_s + \nu \frac{h_p^2}{12} \kappa_\theta \right], \quad (63d)$$

$$M_\theta = \sum_1^{n_p} M_\theta = n_p M_\theta = \frac{n_p E h_p^3}{1-\nu^2} \left[ \frac{h_p^2}{12} \kappa_\theta + \nu \frac{h_p^2}{12} \kappa_s \right], \quad (63e)$$

$$M_{s\theta} = \sum_1^{n_p} M_{s\theta} = n_p M_{s\theta} = \frac{n_p E h_p^3}{1-\nu^2} \frac{(1-\nu)}{24} \kappa_{s\theta}. \quad (63f)$$

上式又可以写成

$$\sigma = n_p D_p \epsilon, \quad \epsilon = \epsilon_L + \epsilon_{NL}, \quad (64a, b)$$

$$\sigma = [N_s \quad N_\theta \quad N_{s\theta} \quad M_s \quad M_\theta \quad M_{s\theta}]^T, \quad (64c)$$

$$\epsilon = [\epsilon_s \quad \epsilon_\theta \quad \gamma_{s\theta} \quad \kappa_s \quad \kappa_\theta \quad \kappa_{s\theta}]^T, \quad (64d)$$

$$D_p = \frac{E h_p}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} D_{p1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{p2} \end{bmatrix}, \quad D_{p1} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (64e, f)$$

$$D_{p2} = \begin{bmatrix} h_p^2/12 & \nu h_p^2/12 & 0 \\ \nu h_p^2/12 & h_p^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)h_p^2/24 \end{bmatrix}. \quad (64g)$$

实际计算时, 只需在计算程序中增加一个输入参数  $n_p$ , 并使  $h = h_p, D = n_p D_p$ , 膜应力按式(65)输出, 表面弯曲应力按式(66)输出, 其余不变。

$$\alpha_{ms} = \frac{N_s}{n_p h_p}, \quad \alpha_{m\theta} = \frac{N_\theta}{n_p h_p}, \quad \tau_{ms} = \frac{N_s \theta}{n_p h_p}; \quad (65)$$

$$\alpha_{bs} = \frac{6M_s}{n_p h_p^2}, \quad \alpha_{b\theta} = \frac{6M_\theta}{n_p h_p^2}, \quad \tau_{bs} = \frac{6M_s \theta}{n_p h_p^2}. \quad (66)$$

还要指出, 波纹管的端面边界常与法兰或管道固连成一体, 因此, 多层波纹管在其端面边界是附近相当于不分层的壳。

## 5 截锥单元的协调性

与平板单元以平面代替曲面类似, 截锥单元是用直线代替曲线。需要对其协调性进行讨论。

由于位移函数式(3)已包含了单元的刚体位移和常应变(包括常弯曲应变), 因此完备性是满足的; 又知道, 按位移法求解, 节点位移式(2)总是连续的, 而内部位移用多项式表示, 因此连续性也是保证的; 协条性是指能从节点位移的连续性推得单元边界位移的连续性。因为单元是线元, 节点就是边界, 所以线位移的协调性不成问题。关键要看角位移是否协调。

结构如图 1(b) 所示, 其子午线的转角为

$$\vartheta_c = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_s}. \quad (67)$$

$R_s$  为子午线曲率半径; 而在图 1(a) 中, 截锥单元是直线元,  $R_s = \infty$ , 其转角为

$$\vartheta = \frac{dw}{ds}. \quad (68)$$

问题是在什么情况下式(67)和(68)等价, 即在什么情况下满足(68)后(67)自动满足? 下面就几种常见的情况分别讨论。

1) 旋转壳子午线是直线, 如柱壳、锥壳和环板。这种情况  $R_s = \infty$ , 与截锥单元完全吻合, 故式(67)和(68)等价。

2) 子午线有连续的 2 阶导数, 即曲率无突变, 大部分实际情况如此。此时  $u$  和  $1/R_s$  处处连续, 故当  $dw/ds$  连续时,  $dw/ds - u/R_s$  连续, 即(67)和(68)等价。

3) 子午线曲率有突变, 如波纹管, 在正、负高斯曲率环壳的连接处(图 3(a)); 在环壳与环板或柱壳的连接处(图 3(b))。

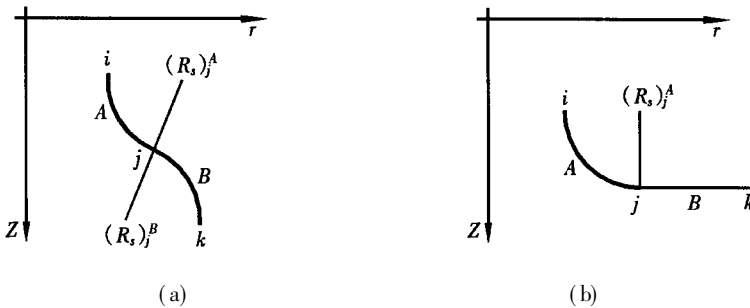


图 3 旋转壳子午线形状

对图 3(a), 考察两个相邻的单元 A 和 B。在公共节点 j, 壳转角的连续性要求  $(\vartheta_c)_j^A = (\vartheta_c)_j^B$ , 即

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)_j^A - \left(\frac{u}{R_s}\right)_j^A = \left(\frac{dw}{ds}\right)_j^B - \left(\frac{u}{R_s}\right)_j^B. \quad (69)$$

因为一般情况下  $(R_s)_j^A \neq (R_s)_j^B$ , 所以仅仅有  $(dw/ds)_j^A = (dw/ds)_j^B$ , 不能保证式(69)成立。也

就是说, 当用直线  $\bar{ij}$  和  $jk$  逼近曲线  $\bar{ijk}$  时, 直线元  $(\vartheta)_j^A = (\vartheta)_j^B$  不等价于曲线  $(\vartheta_c)_j^A = (\vartheta_c)_j^B$ . 故采用截锥单元, 在曲率突变处转角一般不协调; 除非  $(R_s)_j^A = (R_s)_j^B$ . 鉴于此, 常见的 C 型、S 型波纹管, 虽然其子午线存在曲率突变, 但因各圆环半径相等, 即  $(R_s)_j^A = (R_s)_j^B$ , 故采用截锥单元转角仍然是协调的.

再看图 3(b), 圆弧  $\bar{ij}$  和直线  $jk$  连接, 此时式 (3b) 变成

$$(dw/ds)_j^A - (u/R_s)_j^A = (dw/ds)_j^B. \quad (70)$$

由于  $(u/R_s)_j^A \neq 0$ , 因此, 采用截锥单元, 在  $j$  点转角不协调, 转角之差在  $u/R_s$  量级内.

从以上讨论可知, 将波纹管按截锥单元离散, 除了少数几个地方可能会出现转角不协调, 在大部分情况下是既满足完备性条件又满足协调条件的.

再说, 一个不协调的单元并不是一定就是不好的单元. 事实上, 用截锥壳单元计算轴对称壳的线性问题已有许多成功的例子. 例如, 文[13]用截锥壳单元分析了一个带“瓶肩”的压力容器, 在曲率变化不大的区域用较粗的单元, 在曲率发生突变的“瓶肩”处用较细的单元, 取得了满意的精度. 作者用本文的截锥壳单元对各种波纹管的轴对称问题、非轴对称问题、线性问题和非线性问题做了大量的例题和工程实际问题(见 II), 其中线性解的结果和文[5]的一般解的结果以及 ANSYS 3 维 8 节点曲面单元分析<sup>[14]</sup>的结果相当一致.

当然, 可以采用不同的单元来代替本文所选用的截锥壳单元, 以适应不同情况和不同要求的计算. 本文的基本方法不受单元的限制.

### [参 考 文 献]

- [1] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解[J]. 清华大学学报, 1979, 19(1): 27—47.
- [2] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的一般解[J]. 应用数学和力学, 1980, 1(3): 287—299.
- [3] 钱伟长, 郑思梁. 半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用[J]. 应用数学和力学, 1981, 2(1): 97—111.
- [4] 朱卫平, 黄黔, 郭平. 柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的复变量方程及细环壳的一般解[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(9): 889—895.
- [5] 朱卫平, 郭平, 黄黔. U 型波纹管整体弯曲问题的一般解[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(4): 331—341.
- [6] Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association (EJMA)[S]. EJMA INC, Seventh Edition, New York, 1998.
- [7] CHIEN Wei\_zang. Large deflection of a circular damped plate under uniform pressure[J]. Chinese Journal of Physics, 1947, 7(2): 102—113.
- [8] CHIEN Wei\_zang. Asymptotic behavior of a thin damped plate under uniform pressure at very large deflection[J]. The Science Reports of National Tsing Hua University, 1948, 5(1): 71—94.
- [9] 黄黔. 复合载荷作用下圆薄板的大挠度问题[J]. 应用数学和力学, 1982, 3(1): 711—720.
- [10] 黄黔. 摄动初参数法解轴对称壳几何非线性问题[J]. 应用数学和力学, 1986, 7(6): 533—543.
- [11] Cook R D. 有限元分析的概念和应用(1981, 第二版)[M]. 程耿东, 何穷, 张国荣译. 北京: 科学出版社, 1989.
- [12] Sanders J L. Nonlinear theories for thin shells[J]. Quart Applied Mathematics, 1963, 21(1): 21—36.
- [13] 欧阳邕, 马文华. 弹性塑性有限元[M]. 湖南: 湖南科技出版社, 1983, 377—400.
- [14] Skoczyn B. Effect of shear deformation and relaxation of support conditions on elastic buckling of

pressurized expansion bellows[J]. Journal of Pressure Vessel Technology, Transaction of the ASME, 1999, 121(2): 127—132.

## Finite Element Displacement Perturbation Method for Geometric Nonlinear Behaviors of Shells of Revolution Overall Bending in a Meridional Plane and Application to Bellows(I)

ZHU Wei\_ping, HUANG Qian

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

**Abstract:** In order to analyze bellows effectively and practically, the finite element displacement perturbation method (FEDPM) is proposed for the geometric nonlinear behaviors of shells of revolution subjected to pure bending moments or lateral forces in one of their meridional planes. The formulations are mainly based upon the idea of perturbation that the nodal displacement vector and the nodal force vector of each finite element are expanded by taking root\_mean\_square value of circumferential strains of the shells as a perturbation parameter. The load steps and the iteration times are not as arbitrary and unpredictable as in usual nonlinear analysis. Instead, there are certain relations between the load steps and the displacement increments, and no need of iteration for each load step. Besides, in the formulations, the shell is idealized into a series of conical frusta for the convenience of practice, Sander's nonlinear geometric equations of moderate small rotation are used, and the shell made of more than one material ply is also considered.

**Key words:** shell of revolution; bellows; deflection by lateral force; geometrical non\_linearity; perturbation technique; finite element method