文章编号: 1000_0887(2003) 03_0305_10

关于 Banach 空间中 Lipschitz 映象对的公共不动点的存在性*

曾六川

(上海师范大学 数学系, 上海 200234)

(张石生推荐)

摘要: 证明了 p 一致凸 Banach 空间中 Lipschitz 映象对的公共不动点的存在性· 利用这个结果, 在 Hilbert 空间, L^p 空间, Hardy 空间 H^p, Sobolev 空间 $H^{r,p}$ $1 < p < \infty$, $r \geqslant 0$, 也建立了这些映象的若干公共不动点定理·

关键词: 渐近正则性; 公共不动点; Lipschitz 映象; p 一致凸 Banach 空间; 弱 ω_极限集

中图分类号: O177.91　　文献标识码: A

引　言

设 K 是 Banach 空间 X 的非空子集· 则映象 $T: K \to K$ 称为 Lipschitz 映象, 如果对每个整数 $n \geqslant 1$, 都有常数 $k_n > 0$ 使得

$$\| T^n x - T^n y \| \leqslant k_n \| x - y \| \quad (\forall x, y \in K)·$$

一个 Lipschitz 映象 T, 称为一致 k_Lipschitz 映象, 如果 $k_n = k$, $\forall n \geqslant 1$; 称为非扩张映象, 如果 $k_n = 1$, $\forall n \geqslant 1$· 而且, 一个映象 $T: K \to K$ 称为渐近正则映象[1], 如果

$$\lim_{n\to\infty} \| T^{n+1} x - T^n x \| = 0 \quad (\forall x \in K)·$$

已熟悉[2], 若 T 是非扩张映象, 则映象 $T_\lambda = \lambda I + (1 - \lambda) T$, 其中 $\lambda \in (0, 1)$ 且 I 是 X 的恒等算子, 在 K 上是渐近正则的, 即, $\lim_{n\to\infty} \| T_\lambda^n x - T_\lambda^{n+1} x \| = 0 \quad (\forall x \in K)$·

在 1987 年, Kruppel[3] 证明了下列结果·

定理 1　设 K 是一致凸 Banach 空间 X 的非空有界闭凸子集, 且 T 是 K 到自身的映象· 若 T 是 K 上的渐近正则映象, 且满足

$$\lim_{n\to\infty} \| T^n \| \leqslant 1,$$

其中, 对每个 $n \geqslant 1$, $\| T^n \|$ 表示 T^n 的 Lipschitz 范数, 则 T 在 K 中有不动点·

最近, Gornicki[4, 5] 证明了关于渐近正则的 Lipschitz 映象的几个不动点定理· 而且, Sharma

---

* 收稿日期: 2001_09_25; 修订日期: 2002_07_09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19801023); 高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金资助项目
作者简介: 曾六川(1965—), 男, 湖南人, 教授, 已发表论文近 70 余篇(E_mail: zenglc@hotmail.com).

与 Thakur[6] 证明了下列渐近正则映象对的公共不动点定理.

定理 2　设 K 是 p 一致凸 Banach 空间 X 的非空有界闭凸子集, $1 < p < +\infty$, 且 $S, T: K \to K$ 都是 K 上渐近正则映象. 如果

$$\liminf_{n\to\infty} \| L^n \| < \left[\left(1 + \sqrt{1 + 4 \cdot c_p \cdot N_p^p} \right) / 2 \right]^{1/p},$$

其中, N_p 是 X 的正规结构系数, 且 c_p 是某正常数. 则 S 和 T 在 K 中有公共不动点.

另一方面, Lim 与 Xu[7] 给出了下列具有一致正规结构的 Banach 空间中的一致 k_Lipschitz 映象的不动点定理.

定理 3　设 X 是具有一致正规结构的 Banach 空间, K 是 X 的一个非空有界子集, 且 $T: K \to K$ 是一个一致 k_Lipschitz 映象, 满足 $k < N(X)^{1/2}$, 其中 $N(X)$ 是 X 的正规结构系数. 假设存在 K 的一个非空有界闭凸子集 E, 有如下性质: P) $x \in E \Rightarrow \omega_w(x) \subset E$, 其中 $\omega_w(x)$ 是 T 在 x 的弱 ω_极限集, 即, $\omega_w(x) = \left\{ y \in X: y = 弱\_\lim_{j\to\infty} T^{n_j} x, 对某\ n_j \uparrow \infty \right\}$. 则 T 在 E 中有不动点.

本文受如上定理 1~ 定理 3 的启发与触动, 证明了 p 一致凸 Banach 空间中 Lipschitz 映象对的公共不动点的存在性. 利用该结果, 对这些映象, 还在 Hilbert 空间, L^p 空间, Hardy 空间 H^p, 及 Sobolev 空间 $H^{r,p}$, $1 < p < +\infty$, $r \geq 0$, 建立了若干公共不动点定理.

1　预　备　知　识

设 X 是一 Banach 空间. 回顾到, X 的正规结构系数 $N(X)$ 就是数 $\inf\{\operatorname{diam} K / r_k(K)\}$, 其中 $\inf\{\cdot\}$ 表示在 X 的一切有至少两个元素的有界闭凸子集 K 上取下确界, 且 $r_k(K)$ 与 $\operatorname{diam} K$ 分别表示 K 关于自身的 Chebyshev 半径与 K 的直径, 即, $r_k(K) = \inf_{x\in K}\sup_{y\in K} \|x - y\|$, $\operatorname{diam} K = \sup_{x,y\in K} \|x - y\|$. X 称为具有一致正规结构, 若 $N(X) > 1$. 已熟知, 所有一致凸 Banach 空间都具有一致正规结构, 且 Hilbert 空间 H 的 $N(H) = 2^{1/2}$. 最近, Pichugov[8] (也参见 Prus[9]) 已计算 $N(L^p) = \min\{2^{1/p}, 2^{(p-1)/p}\}$, $1 < p < \infty$. Bynum[10] 与 Maluta[11] 已证, 若 X 是一致凸 Banach 空间, 则 $N(X) \geq 1/(1 - \delta_x(1))$, 若中, δ_x 是 X 的凸性模.

回顾到, X 的凸性模 δ_x 即为定义在 $[0, 2]$ 上的下列函数

$$\delta_x(\varepsilon) = \inf\{1 - \|(x + y)/2\|: x, y \in B_x, 且\ \|x - y\| \geq \varepsilon\},$$

其中, B_x 是 X 的闭单位球. X 称为一致的, 若 $\delta_X(\varepsilon) > 0$, $\forall 0 < \varepsilon < 2$. 还回顾到, X 称为具有幂型 $p \geq 2$ 的凸性模 (且 X 称为 p 一致凸的), 若存在常数 $d > 0$ 使得 $\delta_x(\varepsilon) \geq d\varepsilon^p$, $0 < \varepsilon < 2$. 注意到, Hilbert 空间 H 是 2 一致凸的 (事实上, $\delta_H(\varepsilon) = 1 - (1 - (\varepsilon/2)^2))^{1/2} \geq \varepsilon^2/8$), 且 L^p 空间 $(1 < p < \infty)$ 是 $\max(2, p)$ 一致凸的.

命题 1.1[12,13]　设 X 是 p 一致凸 Banach 空间, 则存在常数 $c_p > 0$ 使得

$$\| \lambda x + (1 - \lambda) y \|^p \leq \lambda \|x\|^p + (1 - \lambda) \|y\|^p - c_p \cdot W_p(\lambda) \cdot \|x - y\|^p,$$

$$(\forall x, y \in X, 0 \leq \lambda \leq 1, 其中\ W_p(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)^p + \lambda^p(1 - \lambda)). \tag{1}$$

后面, 我们将需要下列定义与引理.

对每个整数 $n \geq 1$, 映象对 $\{S^n, T^n\}$ 的一致 Lipschitz 范数定义为

$$\|L^n\| = \sup\left\{ \max\left\{ \|S^n x - S^n y\|, \|S^n x - T^n y\|, \|T^n x - T^n y\| \right\} \setminus \|x - y\|: x \neq y, 且\ x, y \in K \right\}.$$

并且 T^n 的 Lipschitz 范数 $\|T^n\|$ 定义为

$$\| T^n \| = \sup\left\{ \| T^n x - T^n y \| / \| x - y \| : x \neq y, \text{且} x, y \in K \right\}$$

引理 1.2[14] 设 X 是一 Banach 空间, $N(X) < 1$. 则对 X 中每个有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 存在点 $z \in \overline{\mathrm{co}}(\{x_n : n \geqslant 1\})$ 使得

i) $\limsup_{n\to\infty} \| x_n - z \| \leqslant N(X) \cdot d_a(\{x_n\})$;

ii) $\| z - x \| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \| x_n - x \| \quad (\forall x \in X)$.

其中 $N(X) = N(X)^{-1}$, $\overline{\mathrm{co}}(D)$ 是 $D \subset X$ 的闭凸包, 且

$$d_n(\{x_n\}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{ \| x_i - x_j \| : i, j \geqslant n \right\}\right).$$

引理 1.3[4,3] 设 K 为 Banach 空间 X 的一个非空闭凸子集, 且 $\{n_i\}$ 为一个自然数的递增序列. 假设 $T: K \to K$ 为一渐近正则映象, 而且对某 $m \in \mathbf{N}$, T^m 是连续的. 如果对某 $u \in K$ 和 $x \in K$, 有

$$\hat{r}(x) = \limsup_{i\to\infty} \| x - T^{n_i} u \| = 0,$$

则 $Tx = x$.

2 主 要 结 果

定义 2.1 设 C 为 Banach 空间 X 的一非空子集. $N(X) > 1$. 又设 $T: C \to C$ 是一 Lipschitz 映象, 且 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为一自然数的递增序列. 若对点 $u, z \in C$, 下列条件成立

i) $\limsup_{i\to\infty} \| T^{n_i} u - z \| \leqslant N(X)^{-1} \cdot d_a(\{T^{n_i} u\})$;

ii) $\| x - z \| \leqslant \limsup_{i\to\infty} \| x - T^{n_i} u \| \quad (\forall x \in X)$.

则 z 称为一个 $\{T^{n_i} u\}$_关系点.

引理 2.1 设 K 是 Banach 空间 X 的一非空有界子集, $N(X) > 1$, $S: K \to K$ 是 K 上一 Lipschita 映象, 且 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一自然数的递增序列. 又设存在 K 的非空有界凸闭子集 E 具有下列性质:

P) $x \in E \Rightarrow \omega_w(x) \subset E$,

其中 $\omega_w(X)$ 是序列 $\{S^{n_i} x\}$ 的弱 ω_极限集, 即

$$\omega_w(x) = \left\{ y \in X : y = \text{弱}\_\lim_{i\to\infty} S^{p_i} x, \text{对某} \{p_i\} \subset \{n_i\}, p_i \uparrow \infty \right\}.$$

则对任意 $x_0 \in E$, 必存在一个 $\{S^{n_i} x_0\}$_关系点 $x_1 \in E$.

证 任取 $x_0 \in E$, 并考虑, 对每个整数 $n \geqslant 1$, 序列 $\{S^{n_i} x_0\}_{i \geqslant n}$. 据引理 1.2, 对每个有界序列 $\{S^{n_i} x_0\}_{i \geqslant n}$, 有 $y_n \in \overline{\mathrm{co}}\{S^{n_i} x_0 : i \geqslant n\}$ (其中, $\overline{\mathrm{co}}$ 表示闭凸包) 使得

$$\limsup_{i\to\infty} \| S^{n_i} x_0 - y_n \| \leqslant N(X)^{-1} \cdot d_a(\{S^{n_i} x_0\}_{i \geqslant n}), \tag{2}$$

$$\| x - y_n \| \leqslant \limsup_{i\to\infty} \| x - S^{n_i} x_0 \| \quad (\forall x \in X).$$

其中, $N(X)$ 是 X 的正规结构系数. 由于 X 是自反的, 序列 $\{y_n\}$ 必有子列 $\{y_{n'}\}$ 弱收敛于某 $x_1 \in X$. 由(2) 和泛函 $\limsup_{i\to\infty} \| S^{n_i} x_0 - y \|$ 的弱下半连续性, 推得

$$\limsup_{i\to\infty} \| S^{n_i} x_0 - x_1 \| \leqslant N(X)^{-1} \cdot d_a(\{S^{n_i} x_0\}). \tag{3}$$

也易见, $x_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}\{S^{n_i} x_0 : i \geqslant n\}$, 且

$$\| x - x_1 \| \leqslant \limsup_{i\to\infty} \| x - S^{n_i} x_0 \| \quad (\forall x \in X). \tag{4}$$

注意到性质P)与事实：$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{co}}\{S^{n_i}x_0: i\geqslant n\}=\overline{\mathrm{co}}\ \omega_w(x_0)$(此易于用分离定理[15]证明)• 故知，$x_1$为$E$中的点：

显然，满足(3)与(4)的点x_1，是在E中的一个$\{S^{n_i}x_0\}$_关系点•

定理2.2 设K是p一致凸Banach空间X的一个非空有界子集，$1<p<\infty$，且$S, T: K\to K$是K上的两个Lipschitz映象，满足

$$\lim_{n\to\infty}\inf\|L^n\|=k<N_p^{-1/2},\tag{5}$$

其中，N_p是X的正规结构系数• 又设存在K的一非空有界闭凸子集E，具有下列性质：

P1) $x\in E\Rightarrow\omega_w(x)\subset E$且$\omega'_w(x)\subset E$，

其中$\omega_w(x)$与$\omega'_w(x)$分别为S在x与T在x的弱ω_极限集；

P2) $S, T: K\to K$都是在E上渐近正则的；

P3) 存在一自然数的递增序列$\{n_i\}$使得，$\lim_{i\to\infty}\|L^{n_i}\|=k$，且

$$\max(d_a(\{S^{n_i}x\}), d_a(\{T^{n_i}x\}))\leqslant\lim_{n\to\infty}(\sup(\|S^{n_i}x-T^{n_j}x\|: i, j\geqslant n))$$
$$(\forall x\in E)•$$

则S与T在E中有公共不动点•

证 首先，利用性质P3)，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\inf\|L^n\|=\lim_{i\to\infty}\|L^{n_i}\|=k<N_p^{-1/2}•$$

不失一般性，设$k\geqslant1$• 观察到性质P1)，由引理2.1推得，对任给$x_0\in E$，存在一个$\{S^{n_i}x_0\}$_关系点$x_1\in E$，具有性质：

$$\lim_{i\to\infty}\sup\|S^{n_i}x_0-x_1\|\leqslant\frac{1}{N_p}•d_a(\{S^{n_i}x_0\}),$$

$$\|x-x_1\|\leqslant\lim_{i\to\infty}\sup\|x-S^{n_i}x_0\|\qquad(\forall x\in X)•$$

类似地，对$x_1\in E$，可得到一个$\{T^{n_i}x_1\}$_关系点$x_2\in E$，具有下列性质

$$\lim_{i\to\infty}\sup\|T^{n_i}x_1-x_2\|\leqslant\frac{1}{N_p}•d_a(\{T^{n_i}x_1\}),\tag{6}$$

$$\|x-x_2\|\leqslant\lim_{i\to\infty}\sup\|x-T^{n_i}x_1\|\qquad(\forall x\in X)•\tag{7}$$

因此，对任给$x_0\in E$，按下列方式，可在E中归纳地构造一序列$\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$：

1) x_m是一个在E中的$\{S^{n_i}x_{m-1}\}$_关系点，即，x_m是E中具有下列性质的点

$$\lim_{i\to\infty}\sup\|S^{n_i}x_{m-1}-x_m\|\leqslant\frac{1}{N_p}•d_a(\{S^{n_i}x_{m-1}\}),\tag{8}$$

$$\|x-x_m\|\leqslant\lim_{i\to\infty}\sup\|x-S^{n_i}x_{m-1}\|\qquad(\forall x\in X)•\tag{9}$$

2) x_{m+1}是一个在E中的$\{T^{n_i}x_m\}$_关系点，即x_{m+1}是E中具有下列性质的点：

$$\lim_{i\to\infty}\sup\|T^{n_i}x_m-x_{m+1}\|\leqslant\frac{1}{N_p}•d_a(\{T^{n_i}x_m\}),\tag{10}$$

$$\|x-x_{m+1}\|\leqslant\lim_{i\to\infty}\sup\|x-T^{n_i}x_m\|\qquad(\forall x\in X)•\tag{11}$$

令

$$D_m=\lim_{i\to\infty}\sup\|x_m-T^{n_i}x_m\|\qquad(m=0, 1, 2\cdots),$$

$$r_m=\lim_{i\to\infty}\sup\|x_{m+1}-S^{n_i}x_m\|\qquad(m=0, 1, 2\cdots),$$

由于 x_1 是 E 中的一个 $\{S^{n_i}x_0\}$_关系点, 故由引理 2.1 性质 P_3) 及 T 的渐近正则性, 推得

$$
\begin{aligned}
r_0 = {} & \limsup_{i\to\infty} \| S^{n_i}x_0 - x_1 \| \leqslant \frac{1}{N_p} \cdot d_a(\{S^{n_i}x_0\}) \leqslant \\
& \frac{1}{N_p} \cdot \lim_{n\to\infty}(\sup\{ \| S^{n_i}x_0 - T^{n_j}x_0 \| : i, j \geqslant n\}) \leqslant \\
& \frac{1}{N_p} \cdot \limsup_{n\to\infty}(\limsup_{j\to\infty} \| S^{n_i}x_0 - T^{n_j}x_0 \|) \leqslant \\
& \frac{1}{N_p} \cdot \limsup_{n\to\infty}\Big(\limsup_{j\to\infty}\big[\| S^{n_i}x_0 - T^{n_i+n_j}x_0 \| + \| T^{n_i+n_j}x_0 - T^{n_j}x_0 \|\big]\Big) \leqslant \\
& \frac{1}{N_p} \cdot \limsup_{i\to\infty}\Big(\limsup_{j\to\infty}\big[\| L^{n_i} \| \cdot \| x_0 - T^{n_j}x_0 \| + \\
& \sum_{v=0}^{n_i-1} \| T^{n_j+v+1}x_0 - T^{n_j+v}x_0 \|\big]\Big) \leqslant \\
& \frac{1}{N_p} \cdot \limsup_{i\to\infty} \| L^{n_i} \| \cdot \limsup_{j\to\infty} \| x_0 - T^{n_j}x_0 \| \leqslant \\
& \frac{k}{N_p} \cdot \limsup_{j\to\infty} \| x_0 - T^{n_j}x_0 \| ,
\end{aligned} \tag{12}
$$

即

$$r_0 \leqslant \frac{k}{N_p} \cdot D_0 .$$

另一方面, 对一切 n_i, n_j, 由(1)有

$$
\begin{aligned}
& \| \lambda x_1 + (1-\lambda)T^{n_j}x_1 - S^{n_i}x_0 \|^p + c_p \cdot W_p(\lambda) \cdot \| x_1 - T^{n_j} x_1 \|^p \leqslant \\
& \lambda \| x_1 - S^{n_i}x_0 \|^p + (1-\lambda) \| T^{n_j}x_1 - S^{n_i}x_0 \|^p \leqslant \\
& \lambda \| x_1 - S^{n_i}x_0 \|^p + (1-\lambda)\big[\| T^{n_j}x_1 - S^{n_j+n_i}x_0 \| + \| S^{n_j+n_i}x_0 - S^{n_i}x_0 \|\big]^p \leqslant \\
& \lambda \| x_1 - S^{n_i}x_0 \|^p + (1-\lambda)\big[\| L^{n_j} \| \cdot \| x_1 - S^{n_i}x_0 \| + \\
& \sum_{v=0}^{n_j-1} \| S^{n_i+v+1}x_0 - S^{n_i+v}x_0 \|\big]^p .
\end{aligned}
$$

当 $i \to +\infty$ 时, 在每边取上极限, 由 x_1 的定义及 S 的渐近正则性, 得到

$$(1-\lambda)^p \cdot D_1^p + c_p \cdot W_p(\lambda) \cdot \| x_1 - T^{n_j}x_1 \|^p \leqslant \Big(\lambda + (1-\lambda) \| L^{n_j} \|^p \Big) r_0^p ,$$

所以推得

$$(1-\lambda)^p \cdot D_1^p + c_p \cdot W_p(\lambda) \cdot D_1^p \leqslant (\lambda + (1-\lambda) k^p) r_0^p .$$

今设 $\lambda \to 0^+$, 我们得到

$$D_1 \leqslant k \cdot r_0 \leqslant \frac{k^2}{N_p} \cdot D_0 = A \cdot D_0 ,$$

其中, $A = \dfrac{k^2}{N^p} < 1$(利用(5)).

因为 x_2 是 E 中的一个 $\{T^{n_i}x_1\}$_关系点, 故由引理 2.1 与 T 的渐近正则性推得

$$
\begin{aligned}
D_2 = {} & \limsup_{i\to\infty} \| T^{n_i}x_2 - x_2 \| \leqslant \limsup_{i\to\infty}(\limsup_{j\to\infty}) \| T^{n_j}x_1 - T^{n_i}x_2 \| \leqslant \\
& \limsup_{i\to\infty}\Big(\limsup_{j\to\infty}\big[\| T^{n_j}x_1 - T^{n_j+n_i}x_1 \| + \| T^{n_j+n_i}x_1 - T^{n_i}x_2 \|\big]\Big) \leqslant \\
& \limsup_{i\to\infty}\Big(\limsup_{j\to\infty}\big[\sum_{v=0}^{n_i-1} \| T^{n_j+v+1}x_1 - T^{n_j+v}x_1 \| + \| L^{n_i} \| \cdot \| T^{n_j}x_1 - x_2 \|\big]\Big) \leqslant \\
& \limsup_{i\to\infty} \| L^{n_i} \| \cdot \limsup_{j\to\infty} \| T^{n_j}x_1 - x_2 \| \leqslant
\end{aligned}
$$

$$k \cdot \frac{1}{N_p} \cdot \lim_{n\to\infty}\left\{\sup\left(\|T^{n_i}x_1 - T^{n_j}x_1\| : i, j \geqslant n\right)\right\} \leqslant$$

$$\frac{k}{N_p} \cdot \limsup_{i\to\infty}\left(\limsup_{j\to\infty}\|T^{n_i}x_1 - T^{n_j}x_1\|\right) \leqslant$$

$$\frac{k}{N_p} \cdot \limsup_{i\to\infty}\left(\limsup_{j\to\infty}\left[\|T^{n_i}x_1 - T^{n_i+n_j}x_1\| + \|T^{n_i+n_j}x_1 - T^{n_j}x_1\|\right]\right) \leqslant$$

$$\frac{k}{N_p} \cdot \limsup_{i\to\infty}\left(\limsup_{j\to\infty}\left[\|L^{n_i}\| \cdot \|x_1 - T^{n_j}x_1\| + \right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{v=0}^{n_i-1}\|T^{n_j+v+1}x_1 - T^{n_j+v}x_1\|\right]\right) \leqslant$$

$$\frac{k}{N_p} \cdot \limsup_{i\to\infty}\|L^{n_i}\| \cdot \limsup_{j\to\infty}\|x_1 - T^{n_j}x_1\|,$$

即，$D_2 \leqslant A \cdot D_1$。

又据引理 2.1，有

$$r_1 = \limsup_{i\to\infty}\|x_2 - S^{n_i}x_1\| \leqslant$$

$$\limsup_{i\to\infty}\left(\limsup_{j\to\infty}\|S^{n_i}x_1 - T^{n_j}x_1\|\right) \leqslant$$

$$\limsup_{i\to\infty}\left(\limsup_{j\to\infty}\left[\|S^{n_i}x_1 - T^{n_i+n_j}x_1\| + \|T^{n_i+n_j}x_1 - T^{n_j}x_1\|\right]\right) \leqslant$$

$$\limsup_{i\to\infty}\|L^{n_i}\| \cdot \limsup_{j\to\infty}\|x_1 - T^{n_j}x_1\| \leqslant k \cdot D_1 。$$

于是，由归纳法可得

$$r_m \leqslant \begin{cases} \dfrac{k}{N_p} \cdot D_m(\text{当 } m \text{ 是偶数时}), \\ k \cdot D_m(\text{当 } m \text{ 是奇数时}), \end{cases} \text{且 } D_{m+1} \leqslant A \cdot D_m \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)。$$

进一步设

$$D'_m = \limsup_{i\to\infty}\|x_m - S^{n_i}x_m\| \qquad (m = 0, 1, 2 \cdots),$$

和

$$r'_m = \limsup_{i\to\infty}\|x_{m+1} - T^{n_i}x_m\| \qquad (m = 0, 1, 2 \cdots),$$

重复上述论证，可得

$$r'_m \leqslant \begin{cases} \dfrac{k}{N_p} \cdot D'_m(\text{当 } m \text{ 是偶数时}), \\ k \cdot D'_m(\text{当 } m \text{ 是奇数时}), \end{cases} \text{且 } D'_{m+1} \leqslant A \cdot D'_m \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)。$$

因此 $$D'_m \leqslant A \cdot D'_{m-1} \leqslant A^2 \cdot D'_{m-2} \leqslant \cdots \leqslant A^m \cdot D'_0 。 \tag{13}$$

因为 $\|x_{m+1} - x_m\| \leqslant \|x_{m+1} - S^{n_i}x_m\| + \|S^{n_i}x_m - x_m\|$，

故当 $i \to +\infty$ 时，取上极限并注意到 $N_p > 1$，可得

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leqslant \limsup_{i\to\infty}\|x_{m+1} - S^{n_i}x_m\| + \limsup_{i\to\infty}\|S^{n_i}x_m - x_m\| =$$

$$r_m + D'_m \leqslant k \cdot D_m + D'_m \leqslant A^m \cdot (k \cdot D_0 + D_0),$$

从而，推得 $\{x_m\}$ 为 E 中的 Cauchy 序列。 设 $z = \lim_{m\to\infty} x_m$，则

$$\|z - S^{n_i}z\| \leqslant \|z - x_m\| + \|x_m - T^{n_i}x_m\| + \|T^{n_i}x_m - S^{n_i}z\| \leqslant$$

$$(1 + \|L^{n_i}\|)\|z - x_m\| + \|x_m - T^{n_i}x_m\| 。$$

当 $i \to +\infty$ 时，对两边同时取上极限，得

$$\limsup_{i\to\infty}\|z - S^{n_i}z\| \leqslant (1 + k)\|z - x_m\| + D_m \leqslant$$

$$\leqslant (1+k)\|z-x_m\|+A^m\cdot D_0\to 0\qquad (m\to+\infty).$$

于是, 由引理 1.3 得 $Sz=z$. 根据对称性又有 $z=Tz$. 定理证毕.

注 2.1 若映象对 $\{S,T\}$ 满足条件: $\lim\limits_{n\to\infty}\|S^n x-T^n x\|=0, \forall x\in E$, 则性质 P$_3$) 成立.

推论 2.3 设 K 是 p 一致凸 Banach 空间 X 的一非空有界子集, $1<p<\infty$, 且 $S:K\to K$ 是 K 上的 Lipschitz 映象, 满足

$$\liminf_{n\to\infty}\|S^n\|=k<N_p^{-1/2},$$

其中, N_p 是 X 的正规结构系数. 又设存在 K 的一非空有界闭凸子集 E, 具有下列性质:

P$_1$) $x\in E\Rightarrow\omega_w(x)\subset E$, 其中, $\omega_w(x)$ 是 S 在 x 的弱 ω_ 极限集;

P$_2$) $S:K\to K$ 是在 E 上渐近正则的.

则 S 在 E 中有不动点.

3 一 些 应 用

命题 3.1 在 Hilbert 空间 H 中, 等式

$$\|(1-\lambda)x+\lambda y\|^2=(1-\lambda)\|x\|^2+\lambda\|y\|^2-\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2\tag{14}$$

对一切 $x, y\in H$ 与 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 都成立.

据(14), 利用定理 2.2, 立即可得下列结论.

推论 3.2 设 K 是 Hilbert 空间 H 的一非空有界子集, 且 $S, T:K\to K$ 是 K 上的两个 Lipschitz 映象, 满足

$$\liminf_{n\to\infty}\|L^n\|=k<\sqrt{2}.$$

又设存在 K 的一非空有界闭凸子集 E, 具有下列性质:

P$_1$) $x\in E\Rightarrow\omega_w(x)\subset E$ 且 $\omega'_w(x)\subset E$,

其中, $\omega_w(x)$ 与 $\omega'_w(x)$ 分别为 S 在 x 与 T 在 x 的弱 ω_ 极限集;

P$_2$) $S, T:K\to K$ 都是在 E 上渐近正则的;

P$_3$) 存在一自然数的递增序列 $\{n_i\}$ 使得, $\lim\limits_{i\to\infty}\|L^{n_i}\|=k$ 且

$$\max\Big(d_a\big(\{S^{n_i}x\}\big),\big(\{T^{n_i}x\}\big)\Big)\leqslant\lim_{n\to\infty}\Big(\sup\big(\|S^{n_i}x-T^{n_j}x\|:i,j\geqslant n\big)\Big)\qquad(\forall x\in E).$$

则 S 与 T 在 E 中有公共不动点.

命题 3.3[12, 13, 16] 设 X 是一 L^p 空间, $1<p<+\infty$, 则下式成立:

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^q\leqslant\lambda\|x\|^q+(1-\lambda)\|y\|^q-c_pW_p(\lambda)\|x-y\|^q\tag{15}$$

对一切 $x, y\in X$, 且 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 其中, $q=\max(2,p)$, $W_q(\lambda)=\lambda^q(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda)^q$, 且

$$c_p=\begin{cases}(1+t_p^{p-1})\backslash(1+t_p)^{p-1} & (\text{当 } 2<p<+\infty \text{ 时}),\\ p-1 & (\text{当 } 1\leqslant p\leqslant 2 \text{ 时}),\end{cases}\tag{16}$$

这里, t_p 是下列函数在区间 $(1,+\infty)$ 中的唯一零点:

$$g(t)=-t^{p-1}+(p-1)t+p-2.$$

推论 3.4 设 K 是一 L^p 空间的非空有界子集, $1<p<\infty$, 且 $S, T:K\to K$ 是 K 上的两个 Lipschitz 映象, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\inf\|L^n\| = k < \sqrt{\min\{2^{1/p}, 2^{(p-1)/p}\}},$$

又设存在 K 的一非空有界闭凸子集 E，具有下列性质:

P_1) $x \in E \Rightarrow \omega_w(x) \subset E$ 且 $\omega_w'(x) \subset E$,

其中, $\omega_x(x)$ 与 $\omega_w'(x)$ 分别是 S 在 x 与 T 在 x 的弱 ω_极限集;

P_2) $S, T: K \to K$ 都是在 E 上渐近正则的;

P_3) 存在一自然数的递增序列 $\{n_i\}$ 使得, $\lim_{i\to\infty}\|L^{n_i}\| = k$ 且

$$\max\left(d_a\left(\left\{S^{n_i}x\right\}\right), d_a\left(\left\{T^{n_i}x\right\}\right)\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left(\|S^{n_i}x - T^{n_j}x\|: i, j \geqslant n\right)\right)$$

$$(\forall x \in E)\text{.}$$

则 S 与 T 在 E 中有公共不动点.

下面, 利用[12, 13, 17]中的结果, 可由定理 2.2 得出 Hardy 空间和 Sobolev 空间等空间中的公共不动点定理.

设 H^p, $1 < p < +\infty$ 表示在复平面的单位圆盘 $|z| < 1$ 上解析的所有函数 x 的 Hardy 空间[18], 并且

$$\|x\| = \lim_{r\to 1\_}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x(re^{i\theta})|^p d\theta\right]^{1/p} < +\infty\text{.}$$

令 Ω 为 R^n 的开子集. 用 $H^{r,p}(\Omega)$, $r \geqslant 0$, $1 < p < +\infty$ 表示广义函数 Sobolev 空间[19, p. 149], 并且对所有 $|a| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leqslant k$, $D^\alpha x \in L^p(\Omega)$ 具有范数

$$\|x\| = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega |D^\alpha x(\omega)|^p d\omega\right)^{1/p}\text{.}$$

设 $(\Omega_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ 为正测度空间序列, 其中指标集 Λ 是有限的或可数的. 由 $L^p(\Omega_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ 给出一个线性子空间序列 X_α, $\alpha \in \Lambda$. 而且, 用 $L_{q,p}$, $1 < p < +\infty$, $q = \max(2, p)$ 表示所有序列 $x = \{x_\alpha \in X_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ 的线性空间[20] 并赋予范数.

$$\|x\| = \left[\sum_{\alpha\in\Lambda}(\|x_\alpha\|_{p,a})^q\right]^{1/q},$$

其中 $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ 表示 $L^p(\Omega_\alpha, \Sigma_\alpha, \mu_\alpha)$ 中的范数.

最后, 设 $L_p = L^p(S_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 和 $L_q = L^q(S_2, \Sigma_2, \mu_2)$, $1 < p < +\infty$, $q = \max(2, p)$, 其中, 对 $i = 1, 2$, (S_i, Σ_i, μ_i) 为正测度空间. 用 $L_q(L_p)$ 表示 S_2 上所有可测 L_p_值函数 x 的 Banach 空间[21, II, 2.10], 且赋予范数

$$\|x\| = \left[\int_{S_2}(\|x(s)\|_p)^q \mu_2(ds)\right]^{1/q}\text{.}$$

这些空间是具有幂型 $q = \max(2, p)$ 的凸性模的 q 一致凸 Banach 空间, 并且在这些空间中的范数满足

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^q \leqslant \lambda\|x\|^q + (1-\lambda)\|y\|^q - d_p\cdot W_p(\lambda)\cdot\|x-y\|^q \tag{17}$$

其中常数

$$d_p = \begin{cases}(p-1)/8, (\text{当 } 1 < p \leqslant 2 \text{ 时}),\\ 1/p\cdot 2^p, (\text{当 } 2 < p < +\infty \text{ 时})\text{.}\end{cases}$$

因此, 从定理 2.3 可得如下结果:

推论 3.5 设 K 为 Banach 空间 X 的一非空有界子集, 其中, $X = H^p$ 或 $X = H^{r,p}(\Omega)$, 或 X

$= L_{q,p}$, 或 $X = L_q(L_p)$, $1 < p < +\infty$, $q = \max(2, p)$, $r \geqslant 0$• 如果 $S, T: K \to K$ 为 K 上两个 Lipshcitz 映象, 满足

$$\liminf_{n\to\infty} \| L^n \| = k < \sqrt{\min\{2^{1/p}, 2^{(p-1)/p}\}},$$

又设存在 K 中的一非空有界闭凸子集 E ,具有下列性质:

P1) $x \in E \to \omega_w(x) \subset E$ 且 $\omega'_w(x) \subset E$,

其中, $\omega_x(x)$ 与 $\omega'_w(x)$ 分别是 S 在 x 与 T 在 x 的弱 ω_极限集;

P2) $S, T: K \to K$ 都是在 E 上渐近正则的;

P3) 存在一自然数的递增序列 $\{n_i\}$ 使得, $\lim_{i\to\infty} \| L^{n_i} \| = k$ 且

$$\max\left(d_a\left(\left\{S^{n_i}x\right\}\right), d_a\left(\left\{T^{n_i}x\right\}\right)\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left(\| S^{n_i}x - T^{n_j}x \| : i, j \geqslant n\right)\right) \quad (\forall x \in E)•$$

则 S 与 T 在 E 中有公共不动点•

[参 考 文 献]

[1] Browder F E, Petryshyn W V. The Solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1966, **72**: 671—675.

[2] Goebel K, Kirk W A. Topics in metric fixed point theory[A]. Cambridge Stud Adv Math [M]. Vol **28**, London: Cambridge University Press, 1990.

[3] Kruppel M. Ein fixpunktsatz fur asymptotisch regulare operatoren im Hilbert_Raum. Wiss Z Padagog Hochsch“Liselotte Herrman” Gustrow[J]. Math Natur Fak, 1987, **25**: 241—246.

[4] Gornicki J. Fixed point theorems for asymptotically regular mappings in L^p spaces[J]. Nonlinear Anal, 1991, **17**: 153—159.

[5] Gornicki J. Fixed points of asymptotically regular mappings[J]. Math Slovaca, 1993, **43**(3): 327—336.

[6] 沙玛, 撒克. 渐近正则映射对的不动点[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(8): 717—724.

[7] Lim T C, Xu H K. Fixed point theorems for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Nonlinear Anal, 1994, **22**: 1345—1355.

[8] Pichugov S A. Jung' s constant of the space L^p[J]. Mat Zamptki, 1988, **43**: 604—614. (in Russian) Translation: Math Notes, 1988, **43**: 348—354.)

[9] Prus S. Some estimates for the normal structure coefficient in Banach spaces[J]. Rend Circ Mat Palermo, 1991, **40**(2): 128—135.

[10] Bynum W L. Normal structure coefficients for Banach spaces[J]. Pacific J Math, 1980, **86**: 427—436.

[11] Maluta E. Uniformly normal structure and related coefficient [J]. Pacific J Math, 1984, **111**: 357—369.

[12] Prus B, Smarzewski R. Strongly unique best approximations and centers in uniformly convex spaces [J]. J Math Anal Appl, 1987, **121**: 10—21.

[13] Xu H K. Inequalities in Banach spaces with applications[J]. Nonlinear Anal. 1991, **16**: 1127—1138.

[14] Casini E, Maluta E. Fixed points of uniformly Lipschitzian mappings in spaces with uniformly normy structure[J]. Nonlinear Anal, 1985, **9**: 103—108.

[15] Bruck R E. On the almost_convergence of iterates of a nonexpansive mapping in Hilbert space and structure of the weak_limit set[J]. Israel J Math, 1978, **29**: 1—16.

[16] Lim T C, Xu H K, Xu Z B. An L^p inequality and its applications to fixed point theory and approxima-

tion theory[A]. In: Progress in Approximation Theory [M]. New York: Academic Press, 1991.

[17] Smarzewski R. Strongly unique best approximations in Banach spaces Ⅱ [J]. J Approx Theory, 1987, **51**: 202—217.

[18] Duren W L. Theory of H^p Spaces [M]. New York: Academic Press, 1970.

[19] Barros_neto J. An Introduction to the Theory of Distribution [M]. New York: Dekker, 1973.

[20] Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach Spaces, Ⅱ_Function Spaces [M]. New York/Berlin: Springer_Verlag, 1979.

[21] Dunford N, Schwarz J. Linear Operators (Vol 1) [M]. New York: Interscience, 1958.

[22] Danes J. On desifying and related mappings and their applications in nonlinear functional analysis [A]. In: Theory of Nonlinear Operators, Proc Summer School [C]. GDR, Berlin: Akademie_Verlag, 1974.

[23] Kruppel M. Ein fixpunktsatz fur asymptotisch regulare Operatoren im gleichmaβig konvexen Banach_Raum, Wiss Z Padagog Hochsch, "Liselotte Herrman" Gustrow[J]. Math Natur Fak, 1989, **27**: 247—251.

[24] Prus S. On Bynum's fixed point theorem[J]. Atti Sem Mat Fis Univ Modena, 1990, **38**: 535—545.

[25] Smarzewski R. On the inequality of bynum and drew[J]. J Math Anal Appl, 1990, **150**: 146—150.

On the Existence of Common Fixed Points for a Pair of Lipschitzian Mappings in Banach Spaces

ZENG Lu_chuan

(Departement of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P. R. China)

Abstract: The existence of common fixed points for a pair of Lipschitzian mappings in Banach Spaces is proved. By using this result, some common fixed point theorems are established for these mappings in Hilbert spaces, in L^p spaces, in Hardy spaces H^p, and in Sobolev spaces $H^{r,p}$, for $1< p < +\infty$ and $r \geqslant 0$.

Key words: asymptotic regularity; common fixed point; Lipschitzian mapping; p_uniformly convex Banach space; weak ω_limit set