

文章编号: 1000-0887(2003) 03-0234-11

碰振系统中的共存周期轨道^{*}

李群宏, 陆启韶

(北京航空航天大学 理学院, 北京 100083)

(陈予恕推荐)

摘要: 提出一种寻找分段线性碰振系统中的多个周期轨道共存的分析方法, 这些单碰周期轨道包含稳定的和不稳定的轨道. 给出了单碰周期轨道存在性或不存在性的解析判别式, 特别是对如何保证在单碰周期运动中不会发生其它的碰撞的问题作了比较深入的研究, 得到若干定理. 最后讨论了所得共存周期轨道的稳定性问题, 获得了稳定性的判别式. 还以数值模拟结果验证了理论分析的结论.

关键词: 振碰系统; 周期轨道; 存在性; 稳定性

中图分类号: O175; O322 **文献标识码:** A

引 言

各种吸引子共存的现象在许多光滑的非线性动力系统中屡见不鲜, 一些著名的数学模型, 如 Duffing 方程、Van der Pol 方程等, 经过分析证明或数值模拟都发现过吸引子共存的情况^[1~3]. 在非光滑动力系统(例如碰撞振动系统)中, 人们发现也同样存在着吸引子共存的现象. Bazejczyk-Okolewska 和 Kapitaniak^[4], Feudel 和 Grebogi 等^[5]在对此类系统进行研究时, 利用数值模拟的方法都找到了大量共存的吸引子.

人们对各种吸引子共存现象的研究, 通常主要是在作全局分析过程中, 利用数值方法获得的^[4~6]. 本文以单自由度分段线性碰振系统为例, 提出一种寻找多个周期碰撞轨道共存的分析方法, 给出其存在性和稳定性判别公式, 并作出适当的数值模拟和计算. 需指出的是, 虽然不少学者曾经对单自由度分段线性碰撞系统的单碰周期运动、分岔和混沌作过细致研究^[6~12], 但他们的研究没有涉及多个周期碰撞轨道共存的全局问题. 本文的结果首次表明可以在分段线性碰振系统中用分析方法研究共存的周期碰撞运动, 所用的方法也适用于更复杂的或多自由度的分段线性碰振系统的该类问题研究.

1 共存周期轨道的存在性

1.1 理论分析

* 收稿日期: 2001_05_28; 修订日期: 2002_12_10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大 19990510, 19872010); 教育部博士学科点基金资助项目(98000619)

作者简介: 李群宏(1964—), 男, 广西南宁人, 博士(E-mail: lqnhsec@sina.com);
陆启韶(1940—), 男, 广东顺德人, 教授, 博导(E-mail: qshao@hotmail.com).

考虑如下单自由度强迫振动系统

$$\ddot{x} + \omega_2^2 x = f \cos(\omega_1 t) \quad (1)$$

设系统在 $x = x_0 \geq 0$ 处有一固定的刚性障碍物限制其活动, 振动系统与障碍物间在 t_0 时刻发生刚性碰撞, 瞬时碰撞规律为

$$V_+ = -rV_-, \quad (2)$$

其中恢复系数 r 满足 $0 < r < 1$, $V_- = \dot{x}(t_0^-)$, $V_+ = \dot{x}(t_0^+)$, 这里 t_0^- 和 t_0^+ 分别对应碰撞前后状态.

系统 (1) 在自由运动时的通解为

$$x(t) = A \cos[\omega_2(t - t_0)] + B \cos[\omega_2(t - t_0)] + f\gamma \cos(\omega_1 t), \quad (3)$$

这里 $\gamma = (\omega_2^2 - \omega_1^2)^{-1}$. 从而有

$$\dot{x}(t) = A\omega_2 \sin[\omega_2(t - t_0)] - B\omega_2 \sin[\omega_2(t - t_0)] - f\gamma\omega_1 \sin(\omega_1 t).$$

在今后的讨论中, ω_1, ω_2, f 都取为正数.

碰振系统的周期轨道可由其在一次循环过程中的碰撞次数和外力周期数来进行分类, 即所谓的 (m, n) -型周期轨道, 这里 m 代表碰撞次数, n 则为外激励周期 T 的倍数, m, n 皆为正整数. 本文着重讨论 $(1, n)$ -型的周期碰撞运动, 也称为单碰周期 n 运动. Whiston^[9, 10] 对单碰周期 n 运动存在的参数区域作了详细的分析. 这里我们将进一步探讨在特定的参数值下多个周期碰撞运动的共存性问题.

假定系统在 t_0 时刻于 $x = x_0$ 处发生碰撞, 碰撞前速度为 V_- . 由初始条件 $x(t_0^+) = x_0$, $\dot{x}(t_0^+) = -rV_-$ 可得

$$\begin{aligned} x_0 &= B + f\gamma \cos(\omega_1 t_0), \\ -rV_- &= A\omega_2 - f\gamma\omega_1 \sin(\omega_1 t_0). \end{aligned}$$

由此解出

$$A = -(rV_- - f\gamma\omega_1 S_0) / \omega_2, \quad B = x_0 - f\gamma C_0, \quad (4)$$

式中 $S_0 = \sin(\omega_1 t_0)$, $C_0 = \cos(\omega_1 t_0)$. 将式 (4) 代入式 (3) 中, 即得该碰撞特解为:

$$\begin{aligned} x(t, t_0, x_0) &= -[(rV_- - f\gamma\omega_1 S_0) / \omega_2] \sin[\omega_2(t - t_0)] + \\ &\quad (x_0 - f\gamma C_0) \cos[\omega_2(t - t_0)] + f\gamma \cos(\omega_1 t). \end{aligned} \quad (5)$$

本文着重考虑单碰周期 n 运动. 在 $t = 2n\pi / \omega_1 + t_0$ 时刻系统又回到碰撞处 $x = x_0$, 故由周期性条件可得

$$\begin{aligned} x_0 &= f\gamma C_0 + C_n(x_0 - f\gamma C_0) - S_n(rV_- - f\gamma\omega_1 S_0) / \omega_2, \\ V_- &= f\gamma\omega_1 S_0 - S_n\omega_2(x_0 - f\gamma C_0) - C_n(rV_- - f\gamma\omega_1 S_0). \end{aligned}$$

联立解此方程组得到

$$C_0 = \frac{(1+r)S_n V_- + 2x_0\omega_2(1-C_n)}{2f\gamma\omega_2(1-C_n)}, \quad S_0 = \frac{(-1+r)V_-}{2f\gamma\omega_1}, \quad (6)$$

式中 $S_n = \sin(2n\pi\omega_2 / \omega_1)$, $C_n = \cos(2n\pi\omega_2 / \omega_1)$.

由恒等式 $S_0^2 + C_0^2 = 1$ 可以得出

$$aV_-^2 + bV_- + c = 0, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= (1+r)^2\omega_1^2 S_n^2 + \omega_2^2(-1+r)^2(1-C_n)^2, \\ b &= 4x_0\omega_1^2\omega_2(1+r)S_n(1-C_n), \end{aligned}$$

$$c = 4(x_0^2 - f^2 \gamma^2) \omega_1^2 \omega_2^2 (1 - C_n)^2.$$

由 V_- 的二次方程(7)可解出

$$V_-^{(1)} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ 和 } V_-^{(2)} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad (8)$$

其中

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 \omega_1^2 \omega_2^2 \left\{ x_0^2 \omega_1^2 (1+r)^2 S_n^2 (1-C_n)^2 - (x_0^2 - f^2 \gamma^2) (1-C_n)^2 [\omega_1^2 (1+r)^2 S_n^2 + \omega_2^2 (-1+r)^2 (1-C_n)^2] \right\}. \quad (9)$$

显然见到:

命题 当且仅当在参数 $\omega_1, \omega_2, f, r > 0$ 和初值 $x_0 \geq 0$ 下, 由式(5)给出的解 $x(t, t_0, x_0)$ 满足下列条件:

$$(i) V_- > 0, \quad (ii) x(t, t_0, x_0) < x_0 \quad (\forall t \in (t_0, t_0 + 2n\pi/\omega_1))$$

时, $x(t, t_0, x_0)$ 给出碰振系统(1)的单碰周期 n 运动.

由 Δ 表达式得知, 只要 $0 \leq x_0 < f|\gamma|$, 就有 $\Delta \geq |b|$, 故必有 $V_-^{(1)} \geq 0, V_-^{(2)} \leq 0$. 从而得知:

推论 当 $0 \leq x_0 < f|\gamma|$ 时, 在给定的参数值下, 对满足 $V_-^{(1)} > 0, x(t, t_0, x_0) < x_0, \forall t \in (t_0, t_0 + 2n\pi/\omega_1)$ 的正整数 n , 碰振系统(1)存在对应的单碰周期 n 运动.

下面讨论在时间间隔 $(t_0, t_0 + nT)$ 内 ($T = 2\pi/\omega_1$ 为外激励的周期), 使得 $x(t, t_0, x_0) < x_0$ 成立的正整数 n 所要满足的条件. 在以往的文献中几乎都没有注意到这一问题, 只有 Shaw^[14] 在讨论单摆的周期碰撞运动时提到过, 并且只是作为假设条件来使用. 首先我们可得出以下引理:

引理 1 函数 $y_1(\tau) = \frac{1 - \cos \tau}{\sin \tau}$ 是区间 $(0, \pi)$ 和 $(\pi, 2\pi)$ 上的单调增加函数.

证明 因为 $\frac{dy_1}{d\tau} = \frac{1 - \cos \tau}{\sin^2 \tau} > 0 \quad (\forall \tau \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi))$, 所以结论成立.

引理 2 曲线 $y_1(\tau) = \frac{1 - \cos \tau}{\sin \tau}$ 与 $y_2(\tau) = \tan \tau$ 在区间 $\tau \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ 上不相交, 且有

$$(i) \frac{1 - \cos \tau}{\sin \tau} < \tan \tau \quad (\forall \tau \in (0, \pi/2)), \quad (10)$$

$$(ii) \frac{1 - \cos \tau}{\sin \tau} > \tan \tau \quad (\forall \tau \in (3\pi/2, 2\pi)). \quad (11)$$

证明 显然有 $\sin^2 \tau = 1 - \cos^2 \tau > \cos \tau - \cos^2 \tau$. 若 $\tau \in (0, \pi/2)$ (或 $3\pi/2, 2\pi$), 将上式两边都除以 $\sin \tau \cos \tau > 0$ (或 < 0), 即得不等式(10) (或(11)).

引理 3 记 $\tau_n = \frac{2n\pi\omega_2}{\omega_1}$ 和 $u(\tau) = \frac{1 - C_n}{S_n} \sin \tau + \cos \tau \quad (\tau \in (0, \tau_n))$, 其中 $S_n = \sin \tau_n$, $C_n = \cos \tau_n$, 则有下面的结果:

$$(i) \text{ 当 } \tau_n \in (0, \pi/2) \text{ 时, } u(\tau) > 1 \quad (\tau \in (0, \tau_n)).$$

$$(ii) \text{ 当 } \tau_n \in (\pi/2, \pi) \text{ 时, } u(\tau) > 1 \quad (\tau \in (0, \tau_n)).$$

$$(iii) \text{ 当 } \tau_n \in (\pi, 3\pi/2) \text{ 时, } -1 < u(\tau) < 1 \quad (\tau \in (\pi, \tau_n)).$$

$$(iv) \text{ 当 } \tau_n \in (3\pi/2, 2\pi) \text{ 时, } 0 < u(\tau) < 1 \quad (\tau \in (3\pi/2, \tau_n)).$$

证明 (i) 当 $\tau_n \in (0, \pi/2)$ 时, 对 $u(\tau)$ 求导得

$$u'(\tau) = \frac{1-C_n}{S_n} \cos \tau - \sin \tau, \quad u''(\tau) = \frac{C_n-1}{S_n} \sin \tau - \cos \tau \quad (\tau \in (0, \tau_n)) \cdot$$

易见存在唯一的 $\tau = \tau^* \in (0, \tau_n)$, 使得 $u'(\tau^*) = 0, u''(\tau^*) < 0$, 所以 $\tau = \tau^*$ 是 $u(\tau)$ 的唯一极大值点. 由于 $u(0) = u(\tau_n) = 1$, 故有 $u(\tau) > 1, (\forall \tau \in (0, \tau_n)) \cdot$

(ii) 对 $\tau_n \in (\pi/2, \pi)$, 由于 $(0, \tau_n) = (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \tau_n)$, 下面分两步去证明 $u(\tau) > 1$ 成立:

首先考虑 $\tau \in (0, \pi/2]$ 的情况. 由引理 1, $y_1(\tau)$ 是 $(0, \pi)$ 上的单增函数, 故对 $\tau_n \in (\pi/2, \pi)$, 有 $y_1(\tau_n) > y_1(\pi/2)$, 即 $(1-C_n)/S_n > 1$. 从而 $\forall \tau \in (0, \pi/2)$, 有

$$u(\tau) > \sin \tau + \cos \tau \geq 1 \cdot$$

然后考虑 $\tau \in (\pi/2, \tau_n)$ 的情况. 可以得出如下关系:

$$C_n \leq \cos \tau < 0 \text{ 和 } \sin \tau > S_n > 0,$$

所以, $u(\tau) = (1-C_n)\sin \tau/S_n + \cos \tau > 1 - C_n + \cos(\tau) \geq 1 \cdot$

总的来说, 当 $\tau_n \in (\pi/2, \pi)$ 时, 不等式 $u(\tau) > 1$ 成立.

(iii) 当 $\tau_n \in (\pi, 3\pi/2)$ 时, 对 $\tau \in (\pi, \tau_n)$, 一方面有

$$-1 < S_n = \sin \tau_n < \sin \tau < 0 \text{ 和 } -1 < \cos \tau < \cos \tau_n = C_n < 0,$$

从而得 $u(\tau) > -1$. 另一方面, 又因为

$$u(\tau) = (1-C_n) \frac{\sin \tau}{S_n} + \cos \tau < (1-C_n) + \cos \tau = 1 - (C_n - \cos \tau) < 1,$$

故有 $-1 < u(\tau) < 1 \quad (\forall \tau \in (\pi, \tau_n)) \cdot$

(iv) 若 $\tau_n \in (3\pi/2, 2\pi)$, 对 $\tau \in (3\pi/2, \tau_n)$, 一方面有如下关系成立:

$$-1 < \sin \tau < S_n < 0, \quad 0 < \cos \tau < C_n < 1 \cdot$$

从而得出 $u(\tau) > 0 \quad (\forall \tau \in (3\pi/2, \tau_n)) \cdot$

另一方面可以证明, 对 $\tau \in (3\pi/2, \tau_n)$, 有 $u'(\tau) > 0$. 先用反证法证 $u'(\tau) \neq 0$. 若存在某个 $\tau^* \in (3\pi/2, \tau_n)$, 使得 $u'(\tau^*) = 0$, 由前面给出的 $u'(\tau)$ 表达式有

$$\frac{1-C_n}{S_n} \cos \tau^* - \sin \tau^* = 0,$$

从而得 $\tan \tau^* = \frac{\sin \tau^*}{\cos \tau^*} = \frac{1-C_n}{S_n} \cdot \quad (12)$

因为 $y_1(\tau) = \frac{1-\cos \tau}{\sin \tau}$ 在 $\tau \in (3\pi/2, \tau_n)$ 内是单调增加的, 故有

$$\frac{1-\cos \tau}{\sin \tau} < \frac{1-\cos \tau_n}{\sin \tau_n} = \frac{1-C_n}{S_n} \quad (\forall \tau \in (3\pi/2, \tau_n)) \cdot$$

由引理 2(ii) 的结论知, 式(12)是不成立的. 因此, 对 $\tau \in (3\pi/2, \tau_n)$ 有 $u'(\tau) \neq 0$. 又因为对 $\tau = \tau_n$ 有

$$u'(\tau_n) = \frac{1-C_n}{S_n} \cos \tau_n - \sin \tau_n = -\frac{1-C_n}{S_n} > 0,$$

故由连续性知, 当 $\tau \in (3\pi/2, \tau_n)$ 时, 均有 $u'(\tau) > 0$. 从而 $u(\tau)$ 在 $(3\pi/2, \tau_n)$ 上是单调增加的. 于是

$$u(\tau) < u(\tau_n) = \frac{1-C_n}{S_n} \sin \tau_n + \cos \tau_n = 1 \quad (\forall \tau \in (3\pi/2, \tau_n)),$$

所以对任意的 $\tau \in (3\pi/2, \tau_n)$, 有 $0 < u(\tau) < 1$. 证毕.

在前面所证引理的基础上, 现在开始讨论系统(1)的单碰周期 n 运动的存在与不存在问题。

定理 1 设 $x_0 = kf | \gamma |, (k \in [0, 1])$ 。如果 ω_1 充分大, 则当正整数 $n \in (0, \omega_1/4\omega_2) \cup (\omega_1/4\omega_2, \omega_1/2\omega_2)$ 时, 碰振系统(1) 存在单碰周期 n 的运动。

证明 由前面的推论知, 只要证明条件 $x(t, t_0, x_0) < 0 (\forall t \in t_0, t_0 + 2n\pi/\omega_1)$ 成立即可。将式(6)代入式(5)中, 得到

$$x(t) = -\frac{1+r}{2\omega_2} V_- \left\{ \sin[\omega_2(t-t_0)] + \frac{S_n}{1-C_n} \cos[\omega_2(t-t_0)] \right\} + f\gamma \cos(\omega_1 t). \quad (13)$$

另由(7)的第一式可知, 当 $\omega_1 \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$a = \omega_1^2 [(1+r)^2 S_n^2 + O(\omega_1^{-2})], \quad (14)$$

所以从式(8)、(9)、(14)得出, 当 $\omega_1 \rightarrow +\infty$ 时,

$$V_- = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2f | \gamma | \omega_2 (1-C_n)(1-k)}{(1+r) | S_n |} + O(\omega_1^{-2}). \quad (15)$$

将式(15)代入式(13)中, 得知当 $\omega_1 \rightarrow +\infty$ 时有

$$x(t) = f | \gamma | \left\{ - (1-k) \left[\frac{1-C_n}{| S_n |} \sin[\omega_2(t-t_0)] + \frac{S_n}{| S_n |} \cos[\omega_2(t-t_0)] \right] + \text{sign}(\gamma) \cos(\omega_1 t) + O(\omega_1^{-2}) \right\}. \quad (16)$$

当 $0 < n < \omega_1/4\omega_2$ 和 $\omega_1/4\omega_2 < n < \omega_1/2\omega_2$ 时(即 $\tau_n \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$), 由引理 3(i), (ii) 知, 对 $t \in (t_0, t_0 + 2n\pi/\omega_1)$ (相应地, $\tau = \omega_2(t-t_0) \in (0, \tau_n)$) 有

$$\frac{1-C_n}{S_n} \sin[\omega_2(t-t_0)] + \cos[\omega_2(t-t_0)] > 1. \quad (17)$$

又因为 $|\cos(\omega_1 t)| \leq 1$, 从而当 ω_1 充分大且 $k \in [0, 1)$ 时, 对 $t \in (t_0, t_0 + 2n\pi/\omega_1)$, 由式(16)、(17)得到

$$x(t) < kf | \gamma | = x_0.$$

故由推论可知本定理成立。证毕。

前面给出了判别单碰周期 n 运动存在性的定理, 现在给出两个不存在的判别定理, 首先证明以下结果

定理 2 设 $x_0 = kf | \gamma | (k \in [0, 1])$, 当 ω_1 充分大且 k 足够小时, 对正整数 $n \in (\omega_1/2\omega_2 + 1, 3\omega_1/4\omega_2)$, 碰振系统(1) 不存在单碰周期 n 的运动。

证明 当 $n \in (\omega_1/2\omega_2, 3\omega_1/4\omega_2)$ 时(即 $\tau_n \in (\pi, 3\pi/2)$), 由引理 3(iii) 知, 对 $t \in (t_0 + \pi/\omega_2, t_0 + 2n\pi/\omega_1)$ (相应地, $\tau \in (\pi, \tau_n)$) 有

$$-1 < \frac{1-C_n}{S_n} \sin[\omega_2(t-t_0)] + \cos[\omega_2(t-t_0)] < 1. \quad (18)$$

易见在本定理条件下, $\cos \tau < 0, S_n < 0$ 。由式(16)知, 当 ω_1 充分大时, 有

$$x(t) = f | \gamma | \left\{ (1-k) \left[\frac{1-C_n}{S_n} \sin[\omega_2(t-t_0)] + \cos[\omega_2(t-t_0)] \right] + \text{sign}(\gamma) \cos(\omega_1 t) + O(\omega_1^{-2}) \right\}. \quad (19)$$

当 t 从 t_0 到 $t_0 + \frac{2n\pi}{\omega_1}$ 时, 一方面, $\sin \tau, \cos \tau$ 在 $(0, \frac{2n\pi\omega_2}{\omega_1})$ 中只经历了不到一个周期的变

化;而另一方面 $\cos(\omega_1 t)$ 则经历了 n 个周期的循环,故只要 n 满足 $(\frac{2n\pi\omega_2}{\omega_1} - \pi) \frac{\omega_1}{2\pi\omega_2} \geq 1$, 即 $n \geq (1 + \frac{\omega_1}{2\omega_2})$, 那么 $\cos(\omega_1 t)$ 在 $t \in (t_0 + \pi/\omega_2, t_0 + 2n\pi/\omega_1)$ 中至少经历了一次在 $[-1, 1]$ 中的循环. 考虑到式(18), 当 k 足够小时, 至少存在一个 $t^* \in (t_0 + \pi/\omega_2, t_0 + 2n\pi/\omega_1)$, 使得 $\cos(\omega_1 t^*)$ 满足

$$(1-k) \left[\frac{1-C_n}{S_n} \sin[\omega_2(t^* - t_0)] + \cos[\omega_2(t^* - t_0)] \right] + \text{sing}(Y) \cos(\omega_1 t^*) > k.$$

由式(19)即知, 当 ω_1 充分大时有

$$x(t^*) > |f| |Y| = x_0.$$

这表明在时间间隔 $(t_0, t_0 + 2n\pi/\omega_1)$ 还会发生其它的碰撞, 从而系统(1)不存在单碰周期 n 的运动. 证毕.

定理 3 设 $x_0 = |f| |Y|$, $k \in [0, 1)$, 当 ω_1 充分大时, 则对正整数 $n \in \left(\frac{3\omega_1}{4\omega_2} + 1, \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)$, 碰振系统(1)不存在单碰周期 n 的运动.

证明 当 $n \in \left(\frac{3\omega_1}{4\omega_2} + 1, \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)$ (即 $\tau_n \in (3\pi/2, 2\pi)$), 由引理 3(iv) 知, 对 $t \in (t_0 + 3\pi/2\omega_2, t_0 + 2n\pi/\omega_1)$ (相应地, $\tau \in (3\pi/2, \tau_n)$) 有

$$0 < \frac{1-C_n}{S_n} \sin[\omega_2(t - t_0)] + \cos[\omega_2(t - t_0)] < 1.$$

类似定理 2, 如果 n 满足 $\left(\frac{2n\pi\omega_2}{\omega_1} - \frac{3\pi}{2} \right) \frac{\omega_1}{2\pi\omega_2} \geq 1$, 即 $n \geq \left[1 + \frac{3\omega_1}{4\omega_2} \right]$, 则当 $k \in [0, 1)$ 时, 至少存在一个 $t^* \in \left(t_0 + \frac{3\pi}{2\omega_2}, t_0 + \frac{2n\pi}{\omega_1} \right)$, 使得 $\cos(\omega_1 t^*)$ 满足

$$(1-k) \left[\frac{1-C_n}{S_n} \sin[\omega_2(t^* - t_0)] + \cos[\omega_2(t^* - t_0)] \right] + \text{sing}(Y) \cos(\omega_1 t^*) > k.$$

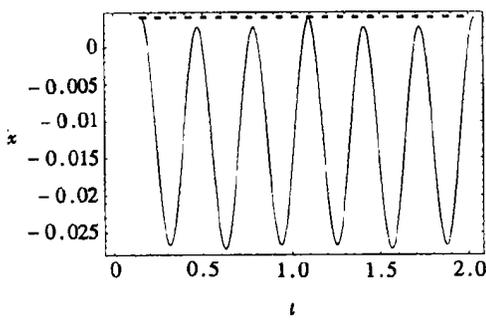
由式(19)即知当 ω_1 充分大时有 $x(t^*) > x_0$. 如同定理 2 一样, 这表明此时该系统不存在单碰周期 n 运动. 证毕.

值得指出的是, 在定理 3 中取消了“ k 足够小”的限制. 此外, 当 $n > \omega_1/\omega_2$ 时, 类似于前面的证明过程, 我们还可以得到单碰周期 n 运动的其它不存在性定理, 限于篇幅这里就不一一叙述了.

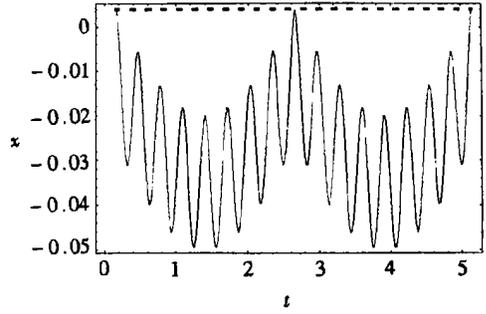
1.2 数值模拟

为了说明上面的结果, 我们作一些数值模拟. 数值模拟得到的部分结果显示在图 1 和图 2 中, 在这些图中的虚线表示约束位置.

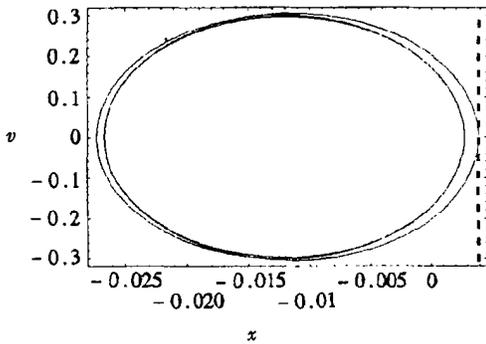
图 1 说明在相同的参数条件下, 不同的单碰周期运动的共存性. 取 $r = 0.8, f = 6, \omega_1 = 2.1, \omega_2 = 1, x_0 = 0.00388797$, 当 $n = 1, 2, \dots, 10$ 时, 均有 $n \in (0, \omega_1/4\omega_2)$. 图 1(a)、(c)、(e) 分别是单碰周期 3 运动的时间历程、相图和 Poincaré 映射图; 图 1(b)、(d)、(f) 分别是单碰周期 8 运动的时间历程、相图和 Poincaré 映射图, 其中 Poincaré 截面取在 $t = t_0$ 处. 可以看到, 周期碰撞运动每隔 nT 时间出现一次, 这与定理 1 的结果是一致的.



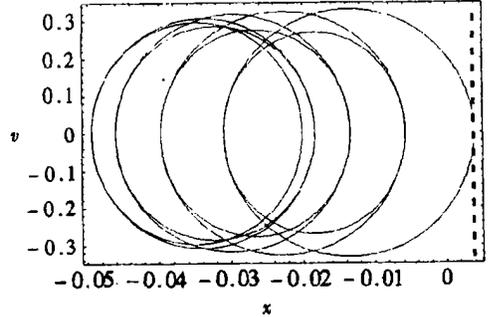
(a) $n = 3$



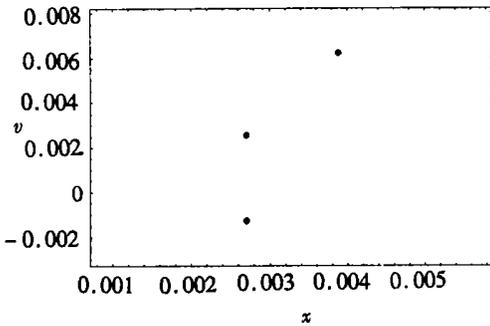
(b) $n = 8$



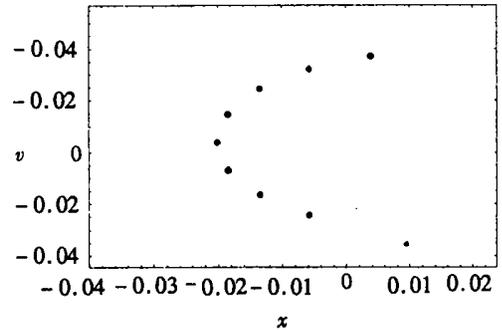
(c) $n = 3$



(d) $n = 8$



(e) $n = 3$



(f) $n = 8$

图1 单碰周期 n 运动的时间历程、相图和 Poincaré 映射图

图2 说明单碰周期 n 运动的不存在性, 为简单起见, 假设运动可以“穿越”约束位置, 但这并不影响我们的主要结论, 因为我们主要考察在周期 n 运动过程中是否还有其它的碰撞存在, 而不关注运动的具体形式。

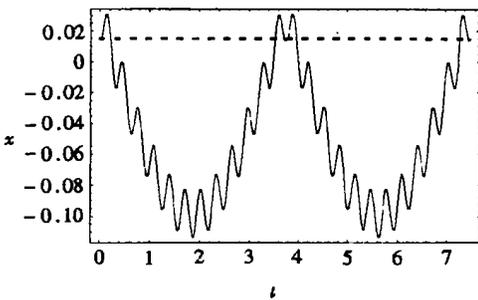
在图2中, 令 $r = 0.8, f = 6, \omega_1 = 20.1, \omega_2 = 1$, 当 $n = 11, 12, \dots, 15$ 时, 有 $n \in (\omega_1/2\omega_2 + 1, 3\omega_1/4\omega_2)$ 。图2(a)、(b) 分别是 $x_0 = 0.014788$ 时相应周期₁₂ 运动的时间历程和相图。由于在所讨论的周期内与障碍物会出现多次碰撞, 故已不是单碰周期运动了。这表明此时实际上并不存在单碰周期₁₂ 运动, 所得结论与定理2一致。

2 稳定性分析

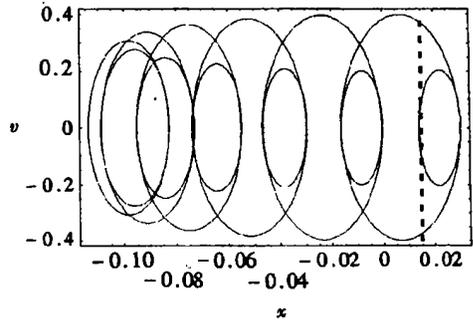
为了对碰振系统(1)进行稳定性研究, 我们首先作出该系统的 Poincaré 映射。目前, 常见

的 Poincaré 映射有两种方式: (i) 取定相位面作截面的方式; (ii) 取碰撞面作截面的方式。两种方式得到的映射一般都是不连续的, 但造成不连续的原因却不尽相同。用第一种方式得到 Poincaré 映射在碰撞处将一个点映为两个点(瞬时碰撞假设), 且其导数在擦边碰撞处也是不连续的, 原因在于在该映射中含有平方根项; 而用第二种方式得到的 Poincaré 映射之所以是不连续的, 这是由于可能出现的擦边碰撞造成的。详情请参阅文献[11, 12]。因此, 要结合具体的研究问题选择合适的 Poincaré 映射, 以便真实地反映振碰系统的情况。下面我们选用第二种方式进行研究, 由此推导 Poincaré 映射的稳定性分析公式。

在给出稳定性判别公式之前, 先定义碰振系统 Poincaré 映射的不动点概念。设 $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ 是碰振系统的 Poincaré 映射, 它将 Poincaré 截面 Σ 上的一个点 X 映到另一个点 $Y = P(X)$, 这里 Poincaré 截面取为碰撞面:



(a)



(b)

图 2 非单碰周期 n 运动的时间历程与相图

$$\Sigma = \left\{ (x, \varphi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times S \mid x = x_0, \varphi > 0 \right\} = \mathbf{R}^+ \times S,$$

其中 $\varphi = t \pmod{T_n}$, $T_n = 2n\pi/\omega_1$, S 是所有的 φ 值组成的圆周。若存在一个正整数 m , 使得 $P^m(X) = X$, 则称 X 为 P^m 的不动点。这里 $P^m \equiv P \circ P^{m-1}$ 。显然, 碰振系统的一条 (m, n) -型周期轨道对应着映射 P^m 的不动点。当 $m = 1$ 时, 单碰周期 n 的运动对应于映射 P 的一个不动点, 我们下面讨论其稳定性。

令 $X^* = (t^*, V^*) \in \Sigma$ 是映射 P 的不动点, 即 $P(X^*) = X^*$, 下面计算 P 在点 X^* 处的 Jacobi 矩阵。根据碰撞规则, 可将映射 P 分解为两个相继过程 P_1 和 P_2 。设 (t^*, V^*) 与 (t_+, V_+^*) 分别表示碰撞前后的两个点, 则 $P_1: (t^*, V^*) \rightarrow (t_+, T_+^*)$ 表示碰撞过程, 而 $P_2: (t_+, V_+^*) \rightarrow (t^*, V^*)$ 代表无碰撞的回归过程。因为碰撞前后关系为: $V_+^* = rV^*$, 且由瞬时碰撞假设得出 $t_-^* = t_+^*$, 故 P_1 的 Jacobi 矩阵为

$$D_{P_1} = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

而 P_2 的 Jacobi 矩阵需要利用隐函数定理, 从下面两个关系式:

$$\begin{aligned} x(t, X_+^*) &= A(X_+^*) \sin[\omega_2(t - t_+^*)] + B(X_+^*) \cos[\omega_2(t - t_+^*)] + f\gamma \cos(\omega_1 t), \\ V(t, X_+^*) &= A(X_+^*) \omega_2 \cos[\omega_2(t - t_+^*)] - \\ &\quad B(X_+^*) \omega_2 \sin[\omega_2(t - t_+^*)] - f\gamma \sin(\omega_1 t), \end{aligned}$$

来计算。其结果为

$$D_{P_2} = \frac{\partial(V, t)}{\partial(V_+^*, t_+^*)} = \begin{pmatrix} \partial V / \partial V_+^* & \partial V / \partial t_+^* \\ \partial t / \partial V_+^* & \partial t / \partial t_+^* \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

式中:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\omega_2 V)^{-1} \left\{ f \gamma \omega_1^2 S_t C_u + G \omega_2 [S_t^2 (V_+^* + f \gamma \omega_1 S_0) + C_t (V_+ \omega_2 S_t (x_0 - f \gamma C_0))] \right\}, \\ a_{12} &= (\omega_2 V)^{-1} \left\{ f^2 \gamma \omega_2^2 C_0^2 C_t S_t + f \gamma C_0 \left\{ -f \omega_1^2 C_u S_t + \omega_2 [\omega_2^2 C_t^2 V_+^* + S_t^2 (V_+^* + f \gamma \omega_1 S_0) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\omega_1^2 - \omega_2^2) + C_t (x_0 \omega_2 S_t (\omega_1^2 - 2 \omega_2^2) + V (\omega_1^2 - 2 \omega_2^2)) \right\} \right\} + \omega_2 \left\{ -x_0 \omega_2^2 C_t^2 V_+^* + \right. \\ &\quad \left. \omega_2 S_t [V V_+^* + x_0 (f \gamma \omega_1^2 C_u + \omega_2 S_t (V_+^* + f \gamma \omega_1 S_0))] - C_t [f \gamma \omega_1^2 C_u V_+^* + \right. \\ &\quad \left. \omega_2 (-x_0 \omega_2 V + S_t (V_+^{*2} + f \gamma \omega_1 S_0 V_+^* - x_0^2 \omega_2^2))] \right\}, \\ a_{21} &= -S_t / \omega_2 V, \quad a_{22} = -(\omega_2 V)^{-1} [\omega_2 (-C_t V_+^* + x_0 \omega_2 S_t) - f C_0 S_t], \\ S_t &= \sin [\omega_2 (t - t_0)], \quad C_t = \cos [\omega_2 (t - t_0)], \\ S_u &= \sin (\omega_1 t), \quad C_u = \cos (\omega_1 t). \end{aligned}$$

从而 $P = P_2 \circ P_1$ 的 Jacobi 矩阵为

$$D_P = D_{P_2} \circ D_{P_1} = \begin{pmatrix} -ra_{11} & a_{12} \\ -ra_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

相应的特征方程为

$$\lambda^2 + \beta \lambda + \mu = 0, \quad (23)$$

特征值为

$$\lambda_1 = (-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\mu})/2, \quad \lambda_2 = (-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\mu})/2,$$

其中 $\beta = ra_{11} - a_{22}$, $\mu = r(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})$.

根据特征值 λ_1, λ_2 , 我们能够判别系统的周期稳定性: 即当 $|\lambda_i| < 1 (i = 1, 2)$ 时, 周期解为渐近稳定的; 若有一个 $|\lambda_i| > 1$, 则周期解是不稳定的.

现取参数组值为 $r = 0.8, f = 6, \omega_1 = 40.1, \omega_2 = 1, x_0 = 0$, 对 $n = 1, \dots, 20$ 进行计算, 此时单碰周期 n 运动存在. 特征值的最大模随 n 变化的情况也在图 3 中反映出来. 从图 3 得知, 当 $n < 20$ 时, $|\lambda|_{\max} > 1$, 故对应的单碰周期 n 轨道均为不稳定的; 当 $n = 20$ 时, $|\lambda|_{\max} = 0.8 < 1$, 对应的单碰周期 n 轨道为稳定的. 当 $n > 20$ 时, 单碰周期 n 运动不存在的问题可由定理 2 和定理 3 来确定. 从我们的计算中可以看到, 在低速碰撞

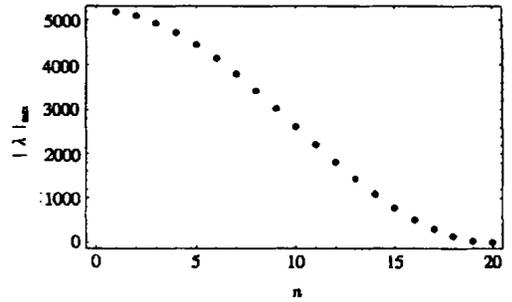


图 3 特征值的最大模随周期数 n 的变化过程

时, 对给定的 n , 有一个特征值的模非常大, 约为另一个特征值的模的近万倍, 这与 Nordmark^[11, 13] 的分析结果是一致的.

3 结 论

本文提出一种分析碰振系统中单碰周期轨道共存的方法, 给出其存在性与稳定性判别公式, 并通过数值模拟找出这些单碰周期 n 的轨道. 本文的方法与以往文献中的数值方法或者分岔方法有很大的不同: 数值方法一般只能找出稳定的周期碰撞运动, 而用我们的理论分析方法既可找出稳定的周期碰撞运动也可找出不稳定的周期碰撞运动; 与分岔方法相比, 本文的方

法可找出更多的单碰周期运动。本文的另一特点在于给出了保证周期碰撞运动的单碰性条件,而以往的文献几乎都忽略了这一问题。从本文的研究可以看到,不考虑单碰条件有时会得不出预期的单碰周期运动。

本文在讨论单碰周期运动的存在性或不存在性时,要求 ω_1 取得充分大。从式(16)和(19)可以看到,在 $x(t)$ 的表达式中出现的 $O(\omega_1^{-2})$ 项,数值计算表明,实际上无需 ω_1 取得很大,就可得出各定理中的结果(如图 1 和图 2)。这说明本文的结论具有较广泛的适用性。

[参 考 文 献]

- [1] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields [M]. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [2] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos [M]. (Reprinted). New York: Springer-Verlag, 1991.
- [3] Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos, Analytical Methods [M]. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [4] Bazejczyk Okolewska B, Kapitaniak T. Co-existing attractors of impact oscillator[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1998, 9(8): 1439—1443.
- [5] Feudel U, Grebogi C, Poon L, Yorke J A. Dynamical properties of a simple mechanical system with a large number of coexisting periodic attractors[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1998, 9(1/2): 171—180.
- [6] Whiston G S. Global dynamics of a vibro-impacting linear oscillator[J]. J Sound Vib, 1987, 118(3): 395—424.
- [7] Shaw S W, Holmes P J. A periodically forced piecewise linear oscillator[J]. J Sound Vib, 1983, 90(1): 129—155.
- [8] Ivanov A P. Stabilization of an impact oscillator near grazing incidence owing to resonance[J]. J Sound Vib, 1993, 162(3): 562—565.
- [9] Whiston G S. Impacting under harmonic excitation[J]. J Sound Vib, 1979, 67(2): 179—186.
- [10] Whiston G S. The vibro-impact response of a harmonically excited and preloaded one-dimensional linear oscillator[J]. J Sound Vib, 1987, 115(2): 303—319.
- [11] Nordmark A B. Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator[J]. J Sound Vib, 1991, 145(2): 279—297.
- [12] Foale S, Bishop S R. Dynamical complexities of forced impacting systems[J]. Phil Trans Royal Soc London A, 1992, 338(4): 547—556.
- [13] Nordmark A B. Effects due to low velocity in mechanical oscillators[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1992, 2(3): 597—605.
- [14] Shaw S W, Rand R H. The transition to chaos in a simple mechanical system[J]. Int J Nonlinear Mech, 1989, 24(1): 41—56.

Coexisting Periodic Orbits in Vibro_Impacting Dynamical Systems

LI Qun_hong, LU Qi_shao

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics,
Beijing 100083, P. R. China)

Abstract: A method is presented to seek for coexisting periodic orbits which may be stable or unstable in piecewise_linear vibro_impacting systems. The conditions for coexistence of single impact periodic orbits are derived, and in particular, it is investigated in details how to assure that no other impacts will happen in an evolution period of a single impact periodic motion. Furthermore, some criteria for nonexistence of single impact periodic orbits with specific periods are also established. Finally, the stability of coexisting periodic orbits is discussed, and the corresponding computation formula is given. Examples of numerical simulation are in good agreement with the theoretic analysis.

Key words: vibro_impact system; periodic orbit; existence; stability