应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 08_0827_08

一类含有约束的变分问题中权重因子的最优选取*

魏 鸣[1], 刘国庆[2], 王成刚[1], 葛文忠[1], 许 秦[3]

(1. 南京大学 教育部中尺度灾害性天气重点实验室, 南京 210093;
2. 南京工业大学 理学院, 南京 210009;
3. 美国海洋大气局 国家强风暴实验室, 1313 Halley Circle, Norman, OK 73069, USA)

(我刊原编委吴启光推荐)

摘要: 研究了一类含有线性对流约束的变分问题中权重因子的最优选取· 在变分问题中, 泛函权重因子选取的适当与否将影响数值计算的结果· 针对目前权重因子选取的相对随意性, 在对观测场和理想场合理假设的条件下, 分别讨论了带有弱约束和强约束的变分问题, 通过求解相应的 Euler 方程, 运用矩阵理论和偏微分方程的差分方法, 得到了在分析场与理想场之间方差最小意义下的客观权重因子· 推证结果表明, 若将带约束的变分问题的 Euler 方程离散成差分形式, 且满足根据实际问题提出的合理假设以及差分方程稳定性条件, 那么目标泛函中的权重因子在分析场与理想场的最小方差意义下存在最优选取· 它们在理论上更客观可信, 可以实现权重因子与数值模式、观测资料的整体协调以及各因子之间的相互协调·

关 键 词: 约束; 变分; 权重因子; 最小方差
中图分类号: O177.92 文献标识码: A

引 言

目前在自然科学的诸多领域中, 变分问题的应用越来越广泛· 例如在大气科学领域, 基于四维同化方法的核心思想, 数值天气预报的研究正逐渐由微分方程的初值问题转向泛函的极值问题· 在变分问题中, 其泛函权重因子的选取是许多研究工作中所讨论的一项重要内容, 它选取的适当与否将影响数值计算的结果· 目前权重因子的选取主要依赖于个人对模式及不同资料可信度的判断, 带有一定的主观随意性, 这种选取方法的主要问题是: 1) 缺乏与数值模式和观测资料的整体协调; 2) 缺乏各个权重因子之间的协调; 3) 缺乏客观性, 所定的权重因子常常是经验性的; 4) 需大量的数值试验来取得数据·

鉴于此, 亟待开展数学和计算数学方面的研究来克服此困难(丑纪范 1995)[1], 已有工作在这方面做了一些有益的探索[2~9], 但在数值计算领域, 对这个问题的研究仍很有限· 分析其中的原因, 就在于一般数值模式的自由度较多, 在数学上寻找一种普适的客观选取权重因子的

* 收稿日期: 2001_03_27; 修订日期: 2003_05_02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40075005); 国家重点基础研究发展规划项目(973 项目: G1998040909)
作者简介: 魏鸣(1957—), 女, 天津人, 博士(E_mail: b6531438@jlonline.com)·

方法比较困难•

本文根据这个问题, 尝试了对一类含有线性对流约束的变分问题权重因子的客观选取•针对目前权重因子选取的相对随意性, 在对观测场和理想场合理假设的条件下, 分别讨论了带有弱约束和强约束的变分问题, 通过求解相应的 Euler 方程, 运用矩阵理论和偏微分方程的差分方法, 得到了在分析场与理想场之间方差最小意义下的客观权重因子• 推证结果表明, 若将带约束的变分问题的 Euler 方程离散成差分形式, 且满足根据实际问题提出的合理假设以及差分方程稳定性条件, 那么目标泛函中的权重因子在分析场和理想场的最小方差意义下存在最优选取• 它们在理论上更客观可信, 可以实现权重因子与数值模式、观测资料的整体协调以及各因子之间的相互协调•

文章的结构如下: 第 1 节给出了一般变分问题的公式并引入了进一步讨论所需的假定•含有“弱约束”的变分问题在第 2 节考虑• 第 3 节讨论带有“强约束”的变分问题• 有关结论出现在第 4 节•

1　变分公式

在信号处理、资料同化及数据质量控制等问题中, 常会遇到如下形式的变分公式:

$$\delta J = \delta\int_\Omega \sum_i\left\{\alpha^i(\phi_i - \tilde\phi_i)^2 + \alpha_t^i\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t}\right)^2 + \alpha_{x_k}^i\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_k}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0, \tag{1}$$

其中 δ 是变分算子, J 是泛函, ϕ_i 是分析场, $\tilde\phi_i$ 是观测场, $\partial/\partial t$ 和 $\partial/\partial x_k$ 分别表示对时间及空间 $x_k(k = 1, 2, 3)$ 的导数• α^i、α_t^i、$\alpha_{x_k}^i$ 是事先确定的权重因子, Ω 是一个含时间 t 和空间 x_1、x_2、x_3 的区域• 泛函中的第一项是观测场与分析场之间的方差• 第二项是一种简单的低通频率滤波• 第三项是波数滤波• 另外, 在实际应用中, 往往还要加上一定约束, 如

$$G_i\left(\phi_i, \phi_j, \frac{\partial\phi_i}{\partial t}, \frac{\partial\phi_i}{\partial x_k}, \frac{\partial\phi_j}{\partial x_k}\right) = 0• \tag{2}$$

通常, 求解带有约束(2) 的变分问题(1) 有两种方法: 第一种方法相对简单一些, 即将原来的变分公式改写成如下形式:

$$\delta J = \delta\int_\Omega \sum_i\left\{\alpha^i(\phi_i - \tilde\phi_i)^2 + \alpha_t^i\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t}\right)^2 + \alpha_{x_k}^i\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_k}\right)^2 + \alpha^i G_i^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0, \tag{3}$$

其中 $\alpha^i > 0$ 是一个事先确定的权• 另一种方法就是所谓“Lagrange 乘子法”, 即

$$\delta J = \delta\int_\Omega \sum_i\left\{\alpha^i(\phi_i - \tilde\phi_i)^2 + \alpha_t^i\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t}\right)^2 + \alpha_{x_k}^i\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_k}\right)^2 + \lambda G_i\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0• \tag{4}$$

注意到约束条件在(4) 式中以线性形式出现, 而在(3) 式中以二次项形式出现: G_i 前面的系数在(4) 式中为 Lagrange 乘子, 而在(3) 式中是权• 这些差别导致了下面的结论•

由(4) 式得:

$$G_i = 0; \tag{5}$$

由(3) 式得:

$$G_i \approx 0• \tag{6}$$

因为, (4) 式可以保证(5) 式成立, 即约束条件(2) 式这时严格满足, 所以称(4) 式是带有“强约束”的变分公式• 相对地, (3) 式称为带有“弱约束”的变分公式•

从前面的叙述可知, 变分公式(3) 和(4) 中都含有事先需要确定的权重因子• 如何确定这些因子, 使得由变分法得到的分析场达到最优呢? 本文将在合理的假设条件下, 利用最小方差

准则来确定这些权因子• 为简单起见,取 $k = 1$,即考虑空间为一维的情形,并且用一个简单的线性对流方程作为约束•

定义有限差分算子如下:

$$\Delta_x \phi_{ij} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{ij}}{h}, \quad \Delta_t \phi_{ij} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{ij}}{\tau},$$
$$\overline{\nabla}_x \phi_{ij} = \frac{\phi_{ij} - \phi_{i-1,j}}{h}, \quad \overline{\nabla}_t \phi_{ij} = \frac{\phi_{ij} - \phi_{i,j-1}}{\tau},$$

其中 h、τ 分别表示 x、t 方向上的步长,下标 i、j 分别表示第 i 个空间网格点和第 j 个时间网络点• 这里假设 h、τ 满足稳定性条件:$h/\tau \geqslant C_x$,C_x 是波速•

文中的主要假设如下:

H1 观测场在 (i,j) 点的模型:

$$\phi_{ij} = \phi^t_{ij} + n_{ij}, \tag{7}$$

其中 ϕ^t_{ij} 为理想场,n_{ij} 是均值为零的白噪声,且有

$$E(n_{ij} \cdot \phi^t_{ij}) = 0, \qquad \text{对一切 } i,j \text{ 成立} \tag{8}$$

和
$$E(n_{ij} \cdot n_{kl}) = \sigma_0^2 \delta_{ki} \delta_{jl}, \qquad \text{对一切 } i,j,k,l \text{ 均成立;} \tag{9}$$

H2 $$E(\Delta_x \overline{\nabla}_x \phi^t_{ij} \cdot \Delta_x \overline{\nabla}_x \phi^t_{kl}) = \sigma_1^2 \cdot \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}, \qquad \text{对一切 } i,j,k,l \text{ 均成立;} \tag{10}$$

H3 $$E(\Delta_x \overline{\nabla}_x \phi^t_{ij} \cdot n_{kl}) = 0, \qquad \text{对一切 } i,j,k,l \text{ 均成立;} \tag{11}$$

H4 $$\mathrm{Var}\left[\frac{1}{\eta_2 - \eta_1}\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\varphi(\xi,\eta) - \phi^t(\xi,\eta))\,\mathrm{d}\eta\right] = \sigma_2 (\text{常数}),$$

这里 ξ、η 定义见后,Var 表示方差•

2 带有"弱约束"的变分公式

讨论如下形式的变分公式:

$$\delta J = \delta \iint \left\{ \alpha(\Phi - \phi)^2 + \alpha_t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 + \alpha_x \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0, \tag{12}$$

其中 α, α_t, α_x, $\alpha > 0$ 是权,线性对流方程

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

为约束条件• 为简化起见,我们假定 $C_x > 0$• 相应于(12)的 Euler 方程为:

$$\alpha(\Phi - \phi) - (\alpha + \alpha)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2\alpha C_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} - (\alpha + \alpha_x) C_x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \tag{14}$$

显然,除非 α_t 与 α_x 都等于零,否则方程(14)是椭圆型方程,因为

$$\alpha^2 C_x^2 - (\alpha + \alpha_t)(\alpha + \alpha_x) C_x^2 < 0$$

另外,要想求解方程(14),还须加上定解条件• 这里我们取齐次边界条件如下

$$\Phi|_\Gamma = 0, \tag{15}$$

其中 Γ 是区域 Ω 的边界•

从所周知,问题(14)、(15)具有唯一解,即分析场 Φ 可唯一地由观测场 ϕ 得到:$\Phi = f(\phi)$• 然而,在实际问题中观测场往往是离散的,必须对(14)和(15)进行离散• 为此,采用如下形式的七点差分格式来离散问题(14)和(15),得

$$\alpha(\phi - \phi)_{i,j} - \alpha_t \nabla_t \overline{\nabla}_t \phi_{ij} - \alpha_x C_x^2 \nabla_x \overline{\nabla}_x \phi_{ij} - \alpha \nabla_t(\nabla_t \phi_{i,j-1} + C_x \nabla_x \phi_{i,j-1}) - \alpha C_x \nabla_x(\nabla_t \phi_{i-1,j} + C_x \nabla_x \phi_{i-1,j}) = 0$$

$$(i = 1, \cdots, m-1; j = 1, \cdots, n-1) \tag{16}$$

和 $$\phi_{i0} = \phi_{0j} = \phi_{in} = \phi_{mj} = 0 \quad (i = 0, \cdots, m; j = 0, \cdots, n); \tag{17}$$

另外,约束条件可离散如下:

$$\nabla_t \phi^t_{ij} + C_x \nabla_x \phi^t_{ij} = 0 \quad (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n). \tag{18}$$

相应地,利用 H2 和(18),可得相关性系数假设

H5 $$\rho(\nabla_t \overline{\nabla}_t \phi_{ij} \cdot \nabla_x \overline{\nabla}_x \phi_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad \text{对一切 } i, j, k, l. \tag{19}$$

下面转向求解问题(16)、(17). 首先,令

$$a_1 = 1 + 2\frac{\mu_1 + \mu_2}{\tau^2} + 2\frac{\mu_1 + \mu_3}{h^2}C_x^2 + 2\frac{\mu_1 C_x}{h\tau},$$

$$a_2 = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{\tau^2} - \frac{\mu_1 C_x}{h\tau}, \quad a_3 = -\frac{\mu_1 + \mu_3}{h^2}C_x^2 - \frac{\mu_1 C_x}{h\tau},$$

$$a_4 = \frac{\mu_1 C_x}{h\tau},$$

这里 $\mu_1 = \alpha/\alpha$, $\mu_2 = \alpha_t/\alpha$, $\mu_3 = \alpha_x/\alpha$. 公式(16),(17)用矩阵形式可表示为

$$\boldsymbol{A}\phi = \phi,$$

其中

$$\phi = [\phi_{11}, \phi_{12}, \cdots, \phi_{1,n-1}, \phi_{21}, \cdots, \phi_{2,n-1}, \cdots, \phi_{m-1,1}, \cdots, \phi_{m-1,n-1}]^{\mathrm{T}},$$

$$\phi = [\phi_{11}, \phi_{12}, \cdots, \phi_{1,n-1}, \phi_{21}, \cdots, \phi_{2,n-1}, \cdots, \phi_{m-1,1}, \cdots, \phi_{m-1,n-1}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2 & & & \\ \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{D}_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2 \\ & & & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{D}_1 \end{pmatrix},$$

这里

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & & \\ a_2 & a_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_1 & a_2 \\ & & & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 & & & \\ a_4 & a_3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_3 & a_4 \\ & & & a_4 & a_3 \end{pmatrix}.$$

下面,在进一步讨论之前,先引入两个已知的引理.

引理 2.1 如果 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为严格对角优势阵,则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵.

引理 2.2 如果 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 矩阵,那么,$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}^2$,这里 tr 表示矩阵的迹.

显然,容易利用 $a_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 的定义,知 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角优势阵. 由引理 2.1 可得,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵. 上述讨论可归纳为以下定理:

定理 2.1 差分方程(16)、(17)的解存在唯一,且可表为

$$\phi = \boldsymbol{A}^{-1}\phi. \tag{20}$$

另一方面, 为了描述由变分法求得的分析场与理想场之间的接近程度, 考虑 ϕ 与 ϕ^t 差的方差 $\mathrm{Var}(\phi-\phi^t)$• 利用定理 2. 1, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\phi-\phi^t) &= \mathrm{Var}(\boldsymbol{A}^{-1}\phi-\phi^t) = [\boldsymbol{A}^{-1}]\mathrm{Var}(\phi-\boldsymbol{A}\phi^t)[\boldsymbol{A}^{-1}]^{\mathrm{T}} = \\ &[\boldsymbol{A}^{-1}]\mathrm{Var}[(\phi-\phi^t)-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\phi^t][\boldsymbol{A}^{-1}]^{\mathrm{T}} = \\ &[\boldsymbol{A}^{-1}]\mathrm{Var}[(\phi-\phi^t)-(\mu_2 \iddots_t \overline{\iddots_t}+\mu_3 C_x^2 \iddots_x \overline{\iddots_x})\phi^t][\boldsymbol{A}^{-1}]^{\mathrm{T}}\bullet\end{aligned}$$

这里根据假设 H1~ H3 和 H5, 有

$$\mathrm{Var}(\phi-\phi^t) = [\boldsymbol{A}^{-1}][\sigma_0^2+\sigma_1^2(\mu_2+\mu_3)^2 C_x^4][\boldsymbol{A}^{-1}]\bullet \tag{21}$$

由于方差阵 $\mathrm{Var}(\phi-\phi^t)$ 中主对角线上的各元素就是估值误差各分量的方差, 所以可以通过选取参数 μ_1、μ_2 和 μ_3, 使得 $\mathrm{Var}(\phi-\phi^t)$ 矩阵中主对角线上的各元素之和(方差和) 最小, 进而实现由分析场逼近理想场的目标• 因此, 由引理 2. 1 知, 对(21) 取迹, 我们有

$$\mathrm{trVar}(\phi-\phi^t) = [\sigma_0^2+\sigma_1^2(\mu_2+\mu_3)^2 C_x^4]\mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}]\bullet \tag{22}$$

故参数 μ_1、μ_2 和 μ_3, 可由以下 3 个方程求得

$$\frac{\partial}{\partial\mu_1}\mathrm{trVar}(\phi-\phi^t) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\mu_2}\mathrm{trVar}(\phi-\phi^t) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\mu_3}\mathrm{trVar}(\phi-\phi^t) = 0\bullet \tag{23}$$

定理 2. 2 如果将带约束(13) 的变分问题(12) 离散成(16)、(17), 且 H1~ H3 和 H5 满足, 那么(12) 中的权重系数在最小方差意义下存在最优选取, 并可由(23) 求得•

3 带有"强约束"的变分公式

这一节将讨论如下形式的变分公式:

$$\delta J = \delta\int_\Omega\left\{\alpha(\phi-\tilde\phi)^2+\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+C_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\alpha_t\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\alpha_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0, \tag{24}$$

其中线性对流方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+C_x\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \tag{25}$$

为约束条件• 利用分部积分, (24) 可化为

$$\begin{aligned}\delta J = \delta\int_\Omega&\left\{\left[2\alpha(\phi-\tilde\phi)-\left(\frac{\partial}{\partial t}+C_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\lambda-2\alpha_t\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-2\alpha_x\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right]\delta\phi-\right.\\ &\left.\left(\frac{\partial}{\partial t}+C_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi\delta\lambda\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_x\left[\left(\lambda+2\alpha_t\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\delta\phi\right]_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}x+\\ &\int_t\left[\left(\lambda C_x+2\alpha_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\delta\phi\right]_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{26}$$

所以, 相应的 Euler 方程为

$$2\left(\alpha+\alpha_t\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\alpha_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi-2\alpha\tilde\phi-\left(\frac{\partial}{\partial t}+C_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\lambda = 0, \tag{27}$$

其中 Lagrange 乘子由下面的方程给出

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+C_x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\lambda = -2\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}+C_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde\phi\bullet \tag{28}$$

所加边界条件如下(Sasaki Y.K., 1970)[8]

$$\left[\lambda+2\alpha_t\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_{t=t_1,t_2} = 0 \qquad (t_1,\ t_2\ 为\ t\ 的上、下界)$$

和 $\qquad [\delta\phi]_{x\to-\infty,+\infty} = 0\bullet$

现在,为了便于求解(24)、(25),我们建议作如下坐标变换:

$$\xi = x/C_x - t,\quad \eta = x/C_x + t,$$

这里,约束条件为

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0. \tag{29}$$

同时变分公式(24)可化为

$$\delta J = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[\alpha(\phi - \phi)^2 + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \left(\alpha_t + \frac{\alpha_x}{C_x^2}\right)\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)^2\right) + 2\left(\frac{\alpha_x}{C_x^2} - \alpha_t\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta}\right] d\xi d\eta =$$
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left\{\alpha(\phi - \phi)^2 + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \left(\alpha_t + \frac{\alpha_x}{C_x^2}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)^2\right\} d\xi d\eta.$$

利用分部积分上式不难化为

$$\delta J = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[2\alpha(\phi - \phi) - 2\left(\alpha_t + \frac{\alpha_x}{C_x^2}\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right]\delta\phi\, d\xi d\eta +$$
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\delta\lambda\, d\xi d\eta + \int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[2\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\delta\lambda\right]_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta - \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\lambda\delta\phi\right]_{\eta_1}^{\eta_2} d\xi.$$

所以,相应的 Euler 方程为

$$2\alpha(\phi - \phi) - 2\left(\alpha_t + \frac{\alpha_x}{C_x^2}\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = 0, \tag{30}$$

其中的 Lagrange 乘子由下面的方程确定

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta^2} = -2\alpha\frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \tag{31}$$

其边界满足的条件为

$$\lambda|_{\eta=\eta_1} = 0,\quad \lambda|_{\eta=\eta_2} = 0. \tag{32}$$

对方程(31)两边关于 η 从 η_1 到 η 积分,有

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} + 2\alpha\phi(\xi, \eta) = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} + 2\alpha\phi\right]\bigg|_{\eta=\eta_1}, \tag{33}$$

再对(33)关于 η 从 η_1 到 η_2 积分,并利用边界条件(32),易得

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} + 2\alpha\phi\right]\bigg|_{\eta=\eta_1} = \frac{2\alpha\int_{\eta_1}^{\eta_2}\phi(\xi, \eta)\,d\eta}{\eta_2 - \eta_1}. \tag{34}$$

令 $\mu = \left(\alpha_t + \dfrac{\alpha_x}{C_x^2}\right)\Big\backslash\alpha,\quad \theta(\xi) = \int_{\eta_1}^{\eta_2}\phi(\xi, \eta)\,d\eta/(\eta_2 - \eta_1),$

结合(30)、(31)、(33)和(34),我们得

$$-\mu\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \phi = \theta(\xi). \tag{35}$$

另外,为了求解(35)必须给出适当的定解条件. 这里为了简化,取定解条件如下:

$$\phi|_{\xi=\xi_1} = 0,\quad \phi|_{\xi=\xi_2} = 0. \tag{36}$$

与上一节的讨论一样,对问题(35)、(36)进行离散化:

$$-\mu\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{v^2} + \phi_i = \theta_i \qquad (i = 1, \cdots, k-1) \tag{37}$$

和 $\phi_0 = 0, \quad \phi_k = 0,$ (38)

其中下标 i 是针对 ξ 的第 i 个网格点, v 为 ξ 的网格步长, 以及 $\theta_i = \theta(\xi_i)$•

由(37)和(38)得

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\theta}•$$

这里 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_k)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_k)^{\mathrm{T}},$

和

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2\mu}{v^2} & -\mu & & & \\ -\mu & 1+\frac{2\mu}{v^2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+\frac{2\mu}{v^2} & -\mu \\ & & & -\mu & 1+\frac{2\mu}{v^2} \end{pmatrix}•$$

类似上一节定理 2.2 的分析, 可得下面的定理•

定理 3.1 若将带有约束(25)的变分问题(26)离散为(35)、(36), 且 H1～H3 及 H5 成立, 那么(24)中的权重系数在最小方差意义下存在最优选取, 并可由下述方程求得

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\mathrm{tr}[\mathrm{Var}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^t)] = 0,$$

其中 $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^t) = \boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{A}^{-1}]^{\mathrm{T}}(\sigma_2^2 + \mu^2\sigma_1^2)•$

注 定理 2.2 和定理 3.1 中的计算可借助于迭代方法, 例如牛顿法来完成, 因为所涉及的问题对于相应的权重系数为非线性形式•

4 结 论

通过以上推导, 从理论上可知, 若将带约束的变分问题的 Euler 方程离散成差分形式, 且满足根据实际问题提出的合理假设以及差分方程稳定性条件, 那么利用矩阵理论和偏微分方程的差分方法, 目标泛函中的权重因子在分析场与理想场的最小方差意义下存在最优选取• 已有的数值试验及检验结果表明(魏鸣等, 1998)[9], 用数学和计算数学方法得到的结果与前人用经验方法所得的系数相比, 在理论上可信, 在数值上也与那些结果相容, 落在最佳范围内, 实现了权重因子与数值模式、观测资料的整体协调有及各因子之间的相互协调• 这种最优试选方法, 既有理论基础, 又有一定的应用前景, 是寻找变分问题最优权重因子的有益尝试•

致谢 十分感谢南京大学数学系欧阳梓祥教授、吴启光教授、林成森教授仔细推敲了有关公式•

[参 考 文 献]

[1] 丑纪范. 四维同化的理论和新方法[A]. 见: 廖洞贤, 柳崇健 主编. 数值天气预报中的若干新技术[C]. 北京: 气象出版社, 1995, 262—294.

[2] 刘国庆. 数值变分分析中的权重系数选取[J]. 南京化工大学学报, 1995, **17**(1): 74—76.

[3] QIU Chong_jian, XU Qin. A simple adjoint method of wind analysis for single_doppler data[J]. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 1992, **9**(5): 588—598.

[4] Sun J, Flicker D W, Lilly D K. Recovery of three_dimensional wind and temperature fields from single_doppler radar data[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1991, **48**(6): 876—890.

[5] XU Qin, QIU Chong_Jian. Simple adjoint methods for single_doppler wind analysis with strong constraint of mass conservation[J]. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 1994, **11**(2): 289—298.

[6] XU Qin, QIU Chong_jian. Adjoint_method retrievals of low_altitude wind fields from single_doppler reflectivity and radial_wind data[J]. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 1995, **12**(5): 1111—1119.

[7] XU Qin, QIU Chong_jian, GU Hong_dao, et al. Simple adjoint retrievals of microburst winds from single_doppler radar data[J]. Monthly Weather Review, 1995. **123**(12): 1822—1833.

[8] Sasaki Y K. Some basic formulisms in numerical variational analysis[J]. Monthly Weather Review, 1970, **98**(6): 875—883.

[9] WEI Ming, DANG Ren_qing, GE Wen_zhong, et al. Retrieval single_doppler radar wind with variational assimilation method_Part Ⅰ: Objective selection of functional weighting factors[J]. Advances in Atmospheric Sciences, 1998, **15**(4): 553—568.

Optimal Selection for the Weighted Coefficients of the Constrained Variational Problems

WEI Ming[1], LIU Guo_qing[2], WANG Cheng_gang[1], GE Wen_zhong[1], XU Qin[3]

(1. Key Laboratory of Mesoscale Severe Weather, Ministry of Education, Nanjing University, Nanjing 210093, P. R. China;
2. School of Science, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, P. R. China;
3. National Severe Storms Laboratory, NOAA, 1313 Halley Circle Norman, OK 73069, USA)

Abstract: The aim is to put forward the optimal selecting of weights in variational problem in which the linear advection equation is used as constraint. The selection of the functional weight coefficients (FWC) is one of the key problems for the relevant research. It was arbitrary and subjective to some extent presently. To overcome this difficulty, the reasonable assumptions were given for the observation field and analyzed field, variational problems with "weak constraints" and "strong constraints" were considered separately. By solving Euler' s equation with the matrix theory and the finite difference method of partial differential equation, the objective weight coefficients were obtained in the minimum variance of the difference between the analyzed field and ideal field. Deduction results show that theoretically the optimal selection indeed exists in the weighting factors of the cost function in the means of the minimal variance between the analysis and ideal field in terms of the matrix theory and partial differential (corresponding difference) equation, if the reasonable assumption from the actual problem is valid and the differnece equation is stable. It may realize the coordination among the weight factors, numerical models and the observational data. With its theoretical basis as well as its prospects of applications, this objective selecting method is probably a way towards the finding of the optimal weighting factors in the variational problem.

Key words: constraint; variation; weight; minimum variance