

文章编号: 1000-0887(2003) 08\_0812\_09

# 半无穷大裂纹端部粘聚力分析\*

王利民<sup>1,2</sup>, 徐世<sup>2</sup>

(1. 山东理工大学 建工系 力学组, 山东淄博 255012;  
2. 大连理工大学 土木工程系, 大连 116024)

(我刊原编委孙焕纯推荐)

**摘要:** 准脆性材料裂纹端部断裂过程区粘聚力是导致非线性断裂特性的重要原因, 根据准脆性材料的断裂特性, 对存在粘聚力分布的半无穷大裂纹力学分析模型, 由变形叠加原理得到以该粘聚力分布为未知函数的积分方程, 通过对积分方程的分析推证, 得到了该分布函数解的数学结构和级数型表达式; 提出了由实际裂纹张开位移, 确定裂纹端部粘聚力分布函数的两种方法: 其一由连续的裂纹张开位移通过积分变换求解未知函数级数展开项的系数, 其二是由离散的裂纹张开位移数据通过最小二乘法确定该函数; 推导出了相应方法求解未知量的代数方程, 并且给出了适当的算例和讨论

**关键词:** 准脆性材料; 裂纹粘聚力; 积分方程; 最小二乘法; 积分变换; 代数方程  
**中图分类号:** O346.1      **文献标识码:** A

## 引 言

许多材料的破坏行为, 如混凝土岩石等材料在断裂测试时, 其破坏特性既不是完全理想的脆性断裂, 也没有金属类材料韧性断裂的强化特征, 表现出其名义断裂参数与试件尺寸相关而称为准脆性断裂。这种断裂的复杂性和尺寸效应, 影响了断裂力学理论的发展和在此类材料中的应用<sup>[1, 2]</sup>; 因而吸引了许多这方面的研究工作。例如通过数理统计理论进行材料微裂纹 Weibull 概率分布分析<sup>[3, 4]</sup>, 着眼于材料的裂纹断裂过程区应力重新分配与能量释放率对断裂特性的影响研究<sup>[5]</sup>, 以及从分形理论研究材料的断裂尺寸效应问题等<sup>[6]</sup>。由于该类材料细观结构是非均质的, 其中各组份的尺寸量级不一, 力学性质也各不相同, 在断裂测试时, 裂纹断裂过程区的材料颗粒之间存在着相互作用, 这种作用对断裂测试参数的影响将体现在该区域应力和变形的分布变化上。若把该过程区看作具有裂纹张开位移的一段裂纹, 需要附加沿该裂纹段的分布力, 以表示该部分对阻止裂纹张开和扩展的作用, 一般把这类分布力称作准脆性

\* 收稿日期: 2001\_12\_24; 修订日期: 2003\_04\_25

基金项目: 国家 973 资助项目(2002CB412709); 国家自然科学基金资助项目(10272068, 50178015); 山东省自然科学基金资助项目(Y202A02)

作者简介: 王利民(1962—), 男, 山东济南章丘人, 教授, 博士, 主要从事结构材料损伤与断裂的研究(E-mail: wangliminsz@263.net);

徐世(1953—), 男, 教授, 博士导师, 国家教育部长江学者奖励计划特聘教授, 主要从事结构工程与材料方面的研究(E-mail: slxu@dlut.edu.cn)。

材料断裂的裂纹粘聚力或闭合力。显然,这种虚拟裂纹粘聚力的分布规律对材料的断裂特性分析和尺寸效应研究是非常重要的。为此,本文建立了虚拟裂纹端部存在粘聚力分布的力学模型,由叠加原理得到了以粘聚力分布为未知函数的积分方程,通过对积分方程的推证分析得到了该粘聚力分布函数解的结构以及表达形式;提出了两种从实际观测的裂纹张开位移,通过解代数方程,确定裂纹端部粘聚力分布规律的方法,并且给出了算例。该方法不仅适合于准脆性材料裂纹问题,还可以用于其它实际工程材料断裂分析中。

### 1 力学模型与积分方程的建立

建立如图 1 所示的半无穷大裂纹分析模型,完全张开的裂纹部分用实线表示,裂纹端部断裂过程区用虚线表示。该虚拟裂纹的尖点位于直角坐标系的原点。设在距离裂纹尖端  $L$  处有上下对称的一对集中力  $Q$  作用在裂纹面上,在裂纹表面  $x$  点处产生的张开位移为  $V_Q(x)$ ;虚拟裂纹段  $(0, b)$  存在上下对称的粘聚应力分布  $\sigma(\xi)$ ,在  $x$  处引起的闭合位移为  $V_o(x)$ 。那么由变形叠加原理

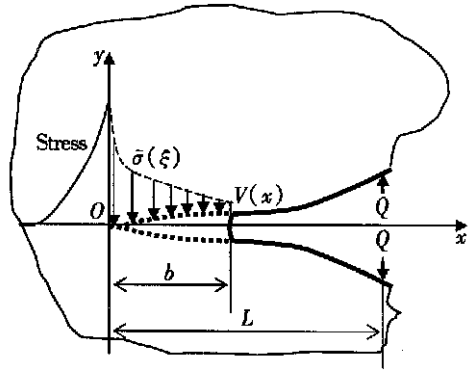


图 1 存在粘聚力分布的半无穷大裂纹分析模型

$$V(x) = V_Q(x) - V_o(x) \quad (0 < x < L), \tag{1}$$

其中  $V(x)$  为裂纹的实测的张开位移沿  $x$  轴的分布,可以由下列公式表示出:

$$V(x) = 2 \frac{4}{E\pi} w(x) = Bw(x) \quad (0 < x < L), \tag{2}$$

公式中  $B = 8/E\pi$ ,  $E$  为材料的弹性模量。考虑到在有限载荷作用下裂纹张开位移是有限的,和未开裂部分的裂纹张开位移为零,因此  $w(x)$  应该满足下列条件:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = W < \infty$$

和

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0 \tag{3}$$

对称集中力  $Q$  作用的半无穷裂纹构型,由复变应力函数法推得其裂纹张开位移为下列收敛的级数展开形式<sup>[7]</sup>:

$$V_Q(x) = 2 \frac{4Q}{E\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{x}{L} \right)^{n-1/2} \quad (0 < x < L). \tag{4}$$

考虑到级数展开收敛形式的特点,对于粘聚力分布产生的张开位移,需要按  $x$  分段表达:

$$V_o(x) = 2 \frac{4}{E\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^b \frac{\sigma(\xi)}{2n-1} \left( \frac{\xi}{x} \right)^{n-1/2} d\xi \right] \quad (b < x < L), \tag{5}$$

$$V_o(x) = 2 \frac{4}{E\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{2n-1} \left( \frac{\xi}{x} \right)^{n-1/2} d\xi + \int_x^b \frac{\sigma(\xi)}{2n-1} \left( \frac{x}{\xi} \right)^{n-1/2} d\xi \right] \quad (0 < x < b). \tag{6}$$

一般在裂纹的明显张开段 ( $b < x < L$ ) 上易于得到  $w(x)$  的分布或离散点的数值,而在断裂过程区的虚拟裂纹部分不容易得到  $w(x)$  的分布。对于裂纹段  $(0 < x < b)$ ,由公式(2)、(4)、(6)代入(1)得:

$$Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{x}{L} \right)^{n-1/2} - w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^x \frac{\sigma(\xi)}{2n-1} \left( \frac{\xi}{x} \right)^{n-1/2} d\xi + \int_x^b \frac{\sigma(\xi)}{2n-1} \left( \frac{x}{\xi} \right)^{n-1/2} d\xi \right] \quad (0 < x < b) \quad (7)$$

同理由公式(2)、(4)、(5)得到在  $(b < x < L)$  上的积分方程:

$$Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{x}{L} \right)^{n-1/2} - w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^b \frac{\sigma(\xi)}{2n-1} \left( \frac{\xi}{x} \right)^{n-1/2} d\xi \right] \quad (b < x < L) \quad (8)$$

显然, 积分方程(7)和方程(8), 是一对耦合的含无穷级数的积分方程, 是非标准的 Fredholm 和 Volterra 型 I 类积分方程<sup>[8]</sup>, 两者具有同一个未知函数。

## 2 积分方程解的结构

为了分析第 I 类积分方程(7)和(8)解函数的结构, 不妨把未知函数展成  $\xi/b$  的幂级数表达形式:

$$\sigma(\xi) = \sigma\left(\frac{\xi}{b}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \left(\frac{\xi}{b}\right)^{m-1/2}, \quad (9)$$

代入公式(7), 并且展开该式的右边的第一项得:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sigma(\xi/b)}{2n-1} \left(\frac{\xi}{x}\right)^{n-1/2} d\xi = & b \left[ \dots + a_{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^{-1/2} \ln\left(\frac{x}{b}\right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{-1} \ln\left(\frac{\varepsilon}{b}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m+1} \left(\frac{x}{b}\right)^{m+1/2} \right] + \\ & b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left[ \dots + \frac{a_{-1}}{n-1} \left(\frac{x}{b}\right)^{-1/2} \right] + b \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{a_m}{n+m} \left(\frac{x}{b}\right)^{m+1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

考虑到当  $x \rightarrow 0$  时裂纹张开位移的约束条件, 即公式(3), 那么上式中:

$$a_{-j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

再展开式(7)的右边的第2项:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^b \frac{\sigma(\xi/b)}{2n-1} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{n-1/2} d\xi = & \sum_{n=1}^{\infty} b \frac{(x/b)^{n-1/2}}{2n-1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n-1}}^{\infty} \frac{a_i}{i+1-n} - \\ & b \ln \frac{x}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/b)^{n-1/2}}{2n-1} a_{n-1} + b \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{x}{b}\right)^{m+1/2} A_m, \end{aligned} \quad (12)$$

其中:

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{3 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1}{7 \cdot 3} + \dots, \\ A_1 = -1 + \frac{1}{5 \cdot 1} + \frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 3} + \dots, \\ A_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 1} + \frac{1}{7 \cdot 1} + \frac{1}{9 \cdot 2} + \frac{1}{11 \cdot 3} + \dots, \\ A_3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 1} + \frac{1}{9 \cdot 1} + \frac{1}{11 \cdot 2} + \dots, \\ \dots \end{cases} \quad (13)$$

均为有限值。显然, 公式(12)中除去右端中间一级数外, 均收敛且满足条件公式(3), 下面再看该级数的收敛性, 取其中的最小项 ( $n = 1$ ), 应用罗比塔法则有:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{b} \right)^{1/2} \ln \frac{x}{b} = 0, \tag{14}$$

即公式(12)右端全部满足公式(3)的条件。所以积分方程(7), (8)具有如下级数形式的解:

$$\sigma \left( \frac{\xi}{b} \right) = c_1 \left( \frac{\xi}{b} \right)^{-1/2} + c_2 \left( \frac{\xi}{b} \right)^{1/2} + c_3 \left( \frac{\xi}{b} \right)^{3/2} + \dots \tag{15}$$

若在上式中令  $\xi \rightarrow 0$  可以看出在虚拟裂纹的端部粘聚分布应力  $\sigma(\xi)$  具有负二分之一的奇异性, 参见图 1 所示, 正好与裂纹端点韧带一侧的应力(图中 Stress)奇异性相对应。对于该裂纹分析模型, 由于虚拟裂纹粘聚部分与裂纹完全张开部分的分界点处的粘聚力是有限的, 所以从公式(15)令  $\xi \rightarrow b$ , 得到补充性条件:

$$\lim_{\xi \rightarrow b} \sigma \left( \frac{\xi}{b} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i = C < \infty \tag{16}$$

### 3 确定粘聚力分布的两种方法

对于如上所示的粘聚力分布函数的级数展开形式, 在此将提出求解此级数中待定系数的两种方法: 一是当已知连续分布的裂纹张开位移时, 通过积分变换以确定粘聚力分布函数; 二是由离散的裂纹张开位移数据, 通过最小二乘法确定该函数。由待定函数(15)式的系数收敛条件(16)得知: 当  $i \rightarrow \infty$  时, 有  $c_i \rightarrow 0$ ; 所以确定粘聚力分布函数, 可以取级数(15)的前有限项作近似值。

#### 3.1 积分变换法

为了确定粘聚力级数函数中的待定系数, 取足够大的正整数  $M$  代替 ( $m \rightarrow \infty$ ), 同理  $N$  代替 ( $n \rightarrow \infty$ )。由于实际试件的加载点距离试件的边沿比较近, 并非在无穷裂纹中, 因此实际在裂纹端部所产生的位移与理想情况有差距, 需要引入一个几何因素系数  $S_e$  乘在集中载荷  $Q$  上。把公式(15)代入公式(8)从而得到下式:

$$QS_e \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \left( \frac{x}{L} \right)^{n-1/2} - w(x) = \sum_{n=1}^N \int_0^b \frac{1}{2n-1} \left( \frac{b}{x} \right)^{n-1/2} \left[ c_1 \left( \frac{\xi}{b} \right)^{n-1} + c_2 \left( \frac{\xi}{b} \right)^n + \dots + c_M \left( \frac{\xi}{b} \right)^{n+M-2} \right] d\xi \quad (b < x < L), \tag{17}$$

由等式的右端可以得到:

$$\sum_{n=1}^N \int_0^b \left[ \frac{c_1}{2n-1} \left( \frac{b}{x} \right)^{n-1/2} \left( \frac{\xi}{b} \right)^{n-1} + \frac{c_2}{2n-1} \left( \frac{b}{x} \right)^{n-1/2} \left( \frac{\xi}{b} \right)^n + \dots + \frac{c_M}{2n-1} \left( \frac{b}{x} \right)^{n-1/2} \left( \frac{\xi}{b} \right)^{n+M-2} \right] d\xi = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{bc_m}{(n+m-1)(2n-1)} \left( \frac{b}{x} \right)^{n-1/2}. \tag{18}$$

从公式(17)看出, 等号两侧关于  $x$  变量的级数展开形式不同, 因此需要对该式两侧实行积分变换。那么, 把式(18)代入(17)式中, 两端同乘以  $(x/t)^{i-1/2}$  对  $i$  求和, 注意 ( $b < t < L$ ) 和 ( $i = 1, 2, \dots, I$ ), 然后得到下列方程:

$$QS_e \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \left( \frac{x}{L} \right)^{n-1/2} \left( \frac{x}{t} \right)^{i-1/2} - \sum_{i=1}^I w(x) \left( \frac{x}{t} \right)^{i-1/2} =$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{bc_m}{(n+m-1)(2n-1)} \left(\frac{b}{x}\right)^{n-1/2} \left(\frac{x}{t}\right)^{i-1/2} \quad (b < x < L), \quad (19)$$

方程(19)两端对  $x$  在  $(b, L)$  上积分, 并交换求和与积分顺序, 从而有:

$$\begin{aligned} QS_e \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{L}\right)^{n-1/2} \left(\frac{1}{t}\right)^{i-1/2} \int_b^L x^{n+i-1} dx - \\ \sum_{i=1}^I \left(\frac{1}{t}\right)^{i-1/2} \int_b^L w(x) x^{i-1/2} dx = \\ \sum_{i=1}^I \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{c_m}{(n+m-1)(2n-1)} b^{n+1/2} \left(\frac{1}{t}\right)^{i-1/2} \int_b^L x^{i-n} dx \quad (b < t < L) \cdot \end{aligned} \quad (20)$$

对于任意的  $t$ , 比较上式两侧  $(1/t)$  的幂次系数, 得到如下系列方程组:

$$\begin{aligned} QS_e \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{L}\right)^{n-1/2} \int_b^L x^{n+i-1} dx - \int_b^L w(x) x^{i-1/2} dx = \\ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{c_m}{(n+m-1)(2n-1)} b^{n+1/2} \int_b^L x^{i-n} dx \quad (i = 1, 2, 3, \dots, I) \cdot \end{aligned} \quad (21)$$

积分并化简以上各式从而得到代数方程组:

$$\sum_{m=1}^M D_{im} c_m = Q_i - \omega_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, I), \quad (22)$$

其中:

$$Q_i = QS_e \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{L}\right)^{n-1/2} \frac{L^{n+i} - b^{n+i}}{n+i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, I) \cdot \quad (23)$$

若  $N > I$  有:

$$\begin{aligned} D_{im} = \sum_{n=1}^N \frac{b^{n+1/2}}{(n+m-1)(2n-1)} \int_b^L x^{i-n} dx = \frac{b^{i+3/2} \ln(L/b)}{(i+m)(2i+1)} + \\ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i+1}}^N \frac{b^{n+1/2}}{(n+m-1)(2n-1)} \frac{L^{i-n+1} - b^{i-n+1}}{i-n+1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots, M), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\omega_i = \int_b^L w(x) x^{i-1/2} dx \quad (i = 1, 2, 3, \dots, I) \cdot \quad (25)$$

当矩阵  $(D_{im})$  的秩  $I \leq M$  时, 代数方程组(22)有解<sup>[9]</sup>, 于是可求得粘聚力分布函数(15)中各系数  $c_m (m = 1, 2, 3, \dots, M)$  的数值。

### 3.2 最小二乘法

设在裂纹处测得  $J$  个裂纹张开位移数据点

$$\xi_j = \delta(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, J) \cdot \quad (26)$$

又从公式(2)、(8)得到相应点的裂纹张开位移数值

$$\begin{aligned} V(x_j) = Bw(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, J), \\ w(x_j)B = QS_e B \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x_j}{L}\right)^{n-1/2} - B \sum_{n=1}^N \left[ \int_0^b \frac{\sigma(\xi)}{2n-1} \left(\frac{\xi}{x_j}\right)^{n-1/2} d\xi \right] \\ (b < x_j < L) \cdot \end{aligned} \quad (27)$$

这里, 在粘聚力分布函数(15)式中取前  $M$  项, 在此用最小二乘法求解该函数中的未知系数<sup>[10]</sup>, 并设  $M \geq J$ 。此方法要求下列误差取得最小值:

$$E = \sum_{j=1}^J [\delta(x_j) - V(x_j)]^2 \tag{28}$$

为此, 上式对  $c_m$  求偏导数得:

$$\frac{\partial E}{\partial c_m} = 2 \sum_{j=1}^J \delta(x_j) - V(x_j) \frac{\partial V(x_j)}{\partial c_m} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots, M), \tag{29}$$

而:

$$\frac{\partial V(x_j)}{\partial c_m} = -B \sum_{n=1}^N \int_0^b \frac{1}{2n-1} \left(\frac{b}{x_j}\right)^{n-1/2} \left(\frac{\xi}{b}\right)^{n+m-2} d\xi \tag{30}$$

( $m = 1, 2, 3, \dots, M$ )•

代入公式(29)得  $M$  个代数方程:

$$\sum_{m=1}^M H_{km} c_m = QG_k - F_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, M), \tag{31}$$

其中:

$$F_k = \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \frac{b \delta(x_j)}{B(n+k-1)(2n-1)} \left(\frac{b}{x_j}\right)^{n-1/2}, \tag{32}$$

$$G_k = \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{b S_e}{(n+k-1)(2s-1)(2n-1)} \left(\frac{1}{L}\right)^{s-1/2} x_j^{s-n} b^{n-1/2}, \tag{33}$$

$$H_{km} = \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{b^2}{(s+m-1)(2s-1)(n+k-1)(2n-1)} \left(\frac{b}{x_j}\right)^{s+n-1} \tag{34}$$

( $k = 1, 2, 3, \dots, M$ )•

显然, 若矩阵  $(H_{km})$  的行列式不为零, 则  $c_m$  有唯一解•

### 4 算例与讨论

本文采用文献[11]的混凝土断裂过程试验结果作为原始数据• 图2为紧凑拉伸裂纹构型的载荷与加载点位移关系曲线, 该曲线反映出了混凝土材料断裂的典型特性• 可以从图中看出, 在加载的前段, 裂纹的张开是随着载荷的增加而变大的, 但是在载荷加到一定程度后载荷增加缓慢, 而变形增加较多, 这时实际已经有亚临界裂纹扩展• 载荷达到最大值时, 裂纹将失稳扩展, 表现出载荷下降和变形急剧增加的特点, 试件很快破坏•

这里离散裂纹张开位移数据仅取两个点 ( $J = 2$ ), 即加载点处的裂纹张开位移  $V_{COD}$ , 和预制裂纹端部的张开位移  $V_{CROD}$ ; 为便于比较, 取试件几何因素系数  $S_e = 1$ • 断裂过程区  $b$  为可以观察到的开裂长度  $d_a$  与半个最大骨料粒径尺寸  $D_m/2$  之和; 裂纹加载点到虚拟裂纹尖端的距离  $L$ , 为预制裂纹长度  $a$  与断裂过程区长度  $b$  之和• 已知该混凝土材料的弹性模量为  $E = 43.14 \text{ GPa}$ , 最大骨料粒径为  $15 \text{ cm}$ • 由于裂纹位移离散点仅有2个, 所以取待求未知数为3个, 即  $M = 3$ ; 表1列出了在不同载荷下的系列参数; 并且令  $N = 50$  由公式(31) ~ (34) 进行数值计算, 得到的在相应载荷下的粘聚力分布

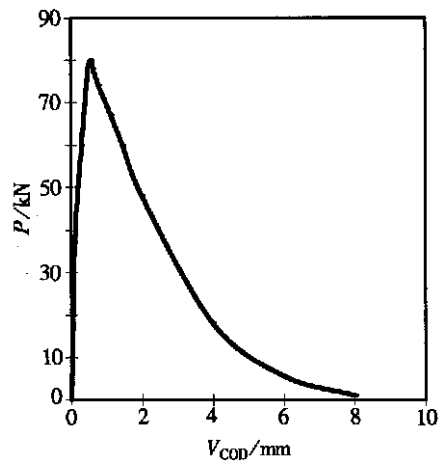


图2 混凝土紧凑拉伸断裂试验载荷与裂纹张开位移关系曲线

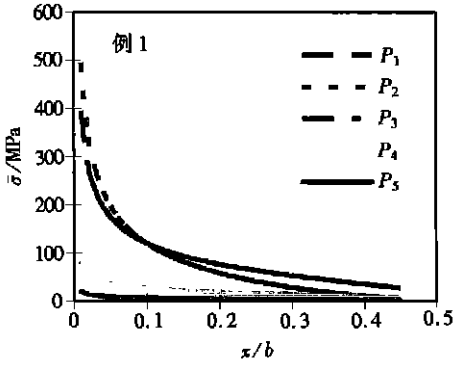


图3 不同荷载状况下的裂纹端部粘聚力分布

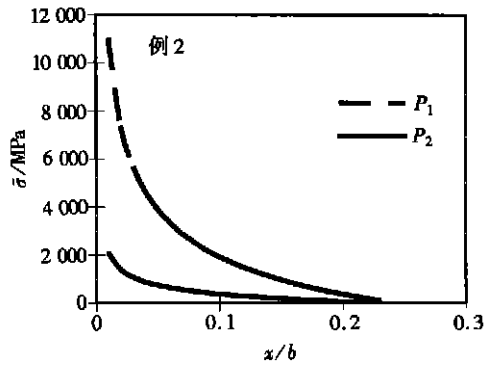


图4 两种荷载状况下的裂纹端部粘聚力分布

函数系数  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$  也列入该表中。

对照表 1 和图 2 可以看出,在裂纹的稳定发展阶段,裂纹端部粘聚力函数的奇异项系数  $c_1$  是随着荷载加大而变大的;但是在最大荷载之后的裂纹失稳发展阶段  $c_1$  却随裂纹的变形增大而急剧变小。图 3 表示出了在 5 种荷载下的裂纹端部粘聚力  $\sigma$  分布曲线,其中图标框中的符号自上而下顺序为  $P_1$  到  $P_5$  的顺序。从该图中可以看出,在裂纹失稳扩展阶段,其粘聚力比裂纹稳定扩展阶段降低了一个多数量级。

采用公式 (22) ~ (25) 对两种不同荷载状态进行计算,其结果列入表 2 中。其中较低荷载的状态为裂纹的稳定发展阶段,比较大的荷载状态处在刚过最大荷载时的裂纹发展阶段。图 4 表示出了相应于表 2 的虚拟裂纹粘聚力  $\sigma$  分布。从表和图中结果可以看出混凝土在不同的两种荷载状态,其虚拟裂纹端部的粘聚力  $\sigma$  是不同的,过峰值荷载后的粘聚应力梯度明显减弱。

表 1 混凝土裂纹试件在不同荷载下的断裂参数和粘聚力系数值

荷载 $P/kN$	46.4	59.1	79.7	76.7	20.0
$b(= d_a + D_m)/m$	0.075	0.125	0.297	0.300 0	0.300 0
$L(= b + a)/m$	1.175	1.225	1.397	1.397	1.397
$V_{COB}/mm$	0.12	0.21	0.42	0.856	3.82
$V_{CROB}/mm$	0.006 92	0.031 25	0.088 02	0.231	1.72
$c_1$	39 548 928	50 757 632	8 067 072	8 139 776	1 921 280
$c_2$	- 11 485 184	- 138 674 176	4 030 464	1 310 720	305 152
$c_3$	- 79 740 928	69 009 408	- 24 895 488	- 21 331 968	- 5 040 128

注 试件标号 CT75\_2\_2, 骨料最大粒径  $D_m = 15$  cm, 原裂纹长  $a = 1.1$  m, 弹性模量  $E = 43.14$  GPa, 开裂长度  $d_a$

表 2 两种荷载状态下的实验数据和积分变换法的数值计算结果

荷载 $P_i/kN$	$L/m$	$b/m$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$P_1 = 60.0$	1.25	0.125	$1.162 3 \times 10^9$	$- 6.116 1 \times 10^9$	$5.697 7 \times 10^9$
$P_2 = 77.6$	1.41	0.290	$0.217 2 \times 10^9$	$- 1.091 5 \times 10^9$	$0.990 1 \times 10^9$

为了清楚观察和分析粘聚力随裂纹扩展的变化形态,借助于图 3 的结果和表 1 的数据,把

粘聚力  $\sigma$  画在变化的裂纹面上, 如图 5 所示。该图中左端点为裂纹完全张开无粘聚力和断裂过程区的分界点, 裂纹扩展从左到右发展, 纵轴为粘聚力的数值, 横轴数值为过程区点到分界点的距离, 该图表示的裂纹扩展段相当于图 1 中长度为  $b$  的虚拟裂纹段, 不过在此  $b$  是变化的。从图 5 看出, 峰值载荷前粘聚力  $\sigma$  是随着裂纹的不断加载而增大的, 表现出粘聚力对裂纹发展的阻抗作用; 而当载荷超过临界值后, 这种粘聚力的阻抗将大大减弱, 反映出结构和材料的软化和弱化特征。总之, 本文方法和结果基本上能够从数量上反映出混凝土类准脆性材料的断裂特性。

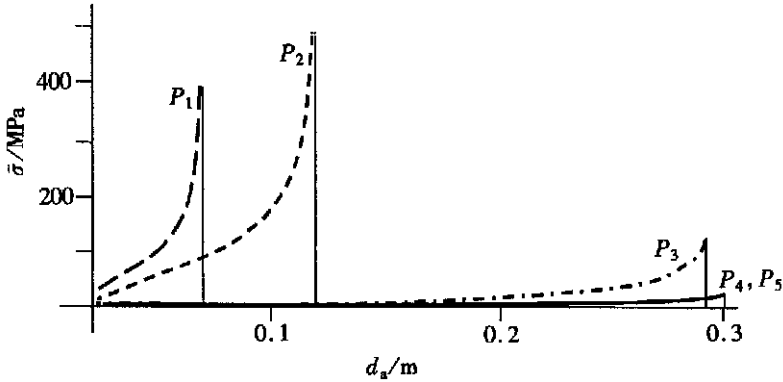


图 5 粘聚力在裂纹扩展段上的分布变化

准脆性材料的断裂特性以及尺寸效应与裂纹发展的阻力特性密切相关, 本文仅建立了力学模型和数学方程, 给出了分析方法和几个算例, 若要从根本上解决问题, 还需做许多工作, 包括试验工作。尺寸效应问题的解决将有助于采用数值模拟的方法进行结构强度分析和稳定性预测, 减少材料特性试验规模和消耗。此外, 关于裂纹端部粘聚力分布与裂纹张开位移的本构关系研究, 和分布函数的其它确定方法, 作者将撰写文章作陆续报道。

致谢 本文工作中与大连理工大学孙焕纯教授进行了有益的讨论, 在此作者表示衷心感谢。

### [参 考 文 献]

- [1] Bazant Z, Chen E P, Scaling of structural failure[J]. Applied Mechanics Review, 1997, 50(10): 593—627.
- [2] XU Shi\_lang, Reinhardt H W. Determination of double\_K criterion for crack propagation in quasi\_brittle fracture\_Part I, II, III[J]. International Journal of Fracture, 1999, 98(2): 111—193.
- [3] Weibull W. A statistical theory of the strength of materials[J]. Proceedings of the Royal Swedish Institute for Engineering Research, 1939, 153(1): 1—55.
- [4] 徐世 . 混凝土断裂韧度的概率统计分析[J]. 水利学报, 1984, (10): 51—58.
- [5] Karihaloo B L. Size effect in shallow and deep notched quasi\_brittle structures[J]. International Journal of Fracture, 1999, 95(1/4): 379—390.
- [6] Carpinteri A. Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties[J]. Mechanics of Materials, 1994, 18(2): 89—101.
- [7] 沈成康. 断裂力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1996.
- [8] 路见可, 钟寿国. 积分方程论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.
- [9] 北京大学数学力学系. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978.



- [10] 徐萃薇. 计算方法引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.
- [11] 赵国藩, 徐世 . 大骨料全级配混凝土断裂韧度和断裂能[R]. 国家七五科技攻关项目阶段成果报告, 大连理工大学 土木工程系, 1989.

## Analysis on the Cohesive Stress at Half Infinite Crack Tip

WANG Li\_min<sup>1,2</sup>, XU Shi\_lang<sup>2</sup>

(1 Mechanics Department, Shandong University of Technology,  
Zibo, Shandong 255012, P. R. China;

2 Department of Civil Engineering, Dalian University of Technology,  
Dalian 116024, P. R. China)

**Abstract:** The nonlinear fracture behavior of quasi\_brittle materials is closely related with the cohesive force distribution of fracture process zone at crack tip. Based on fracture character of quasi\_brittle materials, a mechanical analysis model of half infinite crack with cohesive stress is presented. A pair of integral equations is established according to the superposition principle of crack opening displacement in solids, and the fictitious adhesive stress is unknown function. The properties of integral equations are analyzed, and the series function expression of cohesive stress is certified. By means of the data of actual crack opening displacement, two approaches to gain the cohesive stress distribution are proposed through resolving algebra equation. They are the integral transformation method for continuous displacement of actual crack opening, and the least square method for the discrete data of crack opening displacement. The calculation examples of two approaches and associated discussions are given.

**Key words:** quasi\_brittle material; crack cohesive force; integral equation; method of least squares; integral transformation method; algebra equation