

文章编号: 1000-0887(2003) 08\_0779\_06

# 非线性弹性地基上的圆薄板的 分岔与混沌问题

邱平<sup>1</sup>, 王新志<sup>1</sup>, 叶开沅<sup>2</sup>

(1. 兰州理工大学 理学院, 兰州 730050;

2. 兰州大学 物理学院, 兰州 730000)

(本刊编委叶开沅来稿)

**摘要:** 根据非线性弹性地基上圆薄板大幅度方程, 弹性抗力有线性项, 三次非线性项和抗弯曲弹性项 在周边固定的条件下, 利用 Galerkin 法得到了一个非线性振动方程 在无外激励情况下, 求出在平衡点处的 Floquet 指数 分析了其稳定性与可能发生的分岔条件 在外激励条件下, 用 Melnikov 方法分析研究了可能发生的混沌振动 通过数字仿真给出了各种地基参数下混沌区域的临界曲线和相平面图

**关键词:** 分岔; 混沌; 大幅度; 非线性

**中图分类号:** O343.5; O326 **文献标识码:** A

## 引 言

非线性弹性地基上的圆薄板是工程中的常见结构, 对此结构振动的研究引起了不少学者的关注 N. Gajendar<sup>[1]</sup>、Y. Nath<sup>[2]</sup>、P. C. Dumin<sup>[3]</sup>、赵永刚<sup>[4]</sup>曾研究这方面的问题, 但都未涉及到分岔与混沌问题, 目前国内外高速公路的发展, 高层建筑受地震的影响问题, 大量的弹性地基问题都提出来, 为此对非线性弹性地基结构的非线性动力分岔和混沌的研究是十分必要的

## 1 基本方程

由文[5], 在圆薄板非线性动力方程中, 圆薄板受到的外力包括弹性地基的反力、阻尼力、干扰力、静载荷

平衡方程:

$$DL(w) - q - \frac{1}{r} \frac{r}{r} \left[ rN_r \frac{w}{r} \right] + k_1 w + k_2 w^3 - G \frac{1}{r} \frac{r}{r} \left[ r \frac{w}{r} \right] + c \frac{w}{t} + \frac{2}{t^2} w = F \cos t; \quad (1)$$

协调方程:

收稿日期: 2002\_07\_11; 修订日期: 2003\_05\_02

基金项目: 甘肃省自然科学基金资助项目(ZS021\_A25\_007\_Z)

作者简介: 邱平(1954), 男, 江西南城人, 副教授, 硕士(E-mail: qiup@gstt.edu.cn)

$$r \frac{1}{r} \frac{1}{r} \frac{1}{r} (r^2 N_r) = - \frac{Eh}{2} \left( \frac{w}{r} \right)^2 \quad (2)$$

边界条件:

$$\text{当 } r = a \text{ 时, } w = 0, \frac{w}{r} = 0, \frac{(rN_r)}{r} - N_r = 0, \quad (3)$$

$$\text{当 } r = 0 \text{ 时, } \frac{w}{r} = 0, w, N_r \text{ 有限;} \quad (4)$$

初始条件:

$$w(r, 0) = w_0(r), \frac{w(r, 0)}{t} = 0; \quad (5)$$

其中:

$$L = \frac{1}{r} \frac{1}{r} \frac{1}{r} \frac{1}{r} \frac{1}{r} \frac{1}{r}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

为圆薄板的单位面密度

引入无量纲量:

$$x = \frac{r}{a}, y = \frac{w}{h}, Q = \frac{a^4}{Dh^3} q, s = \frac{a}{D} r N_r,$$

$$k_1 = \frac{a^4}{D} k_1, k_2 = \frac{a^4 h^2}{D} k_2, G = \frac{a^2}{D} G,$$

$$= t \sqrt{\frac{D}{a^4}}, C = c \sqrt{\frac{a^4}{D}}, F = \frac{a^4 h^2}{D} F,$$

将无量纲量代入方程(1)~(5)得:

$$L_1(y) - Q - \frac{1}{x} \frac{1}{x} \left[ S \frac{y}{x} \right] + C \frac{y}{x} + k_1 y + k_2 y^3 - \\ G \frac{1}{x} \frac{1}{x} \left[ x \frac{y}{x} \right] + \frac{2y}{2} = F \cos \theta, \quad (6)$$

$$L_2(xS) = - \left[ \frac{y}{x} \right]^2, \quad (7)$$

其中:

$$L_1 = \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x}, L_2 = x \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x}, \nu = 6(1-\nu^2)$$

边界条件:

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = 0, \frac{y}{x} = 0, \frac{S}{x} - S = 0; \quad (8)$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } \frac{y}{x} = 0, y, S \text{ 有限} \quad (9)$$

初始条件:

$$y(x, 0) = y_0(x), \frac{y(x, 0)}{t} = 0 \quad (10)$$

$$\text{取 } y(x, t) = f(x)(1-x^2)^2, \quad (11)$$

将(11)代入(7),并由条件(8)、(9)可得:

$$S = \frac{1}{3} f^2(x) (1-x-6x^3+4x^5-x^7), \quad (12)$$

$$\text{其中 } \nu = \frac{(5-3\nu)}{(1-\nu)}$$

将(11)、(12)代入(6)并利用 Galerkin 法:

$$\int_0^1 \left[ L_1(y) - Q - \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \left( S \frac{y}{x} \right) + C \frac{y}{x} + k_1 y + k_2 y^3 - G \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \left( x \frac{y}{x} \right) + \frac{y^2}{2} - F \cos \theta \right] (1-x^2)^2 dx,$$

可得:

$$f''(x) + A_1 f'(x) + A_2 f^3(x) - \frac{5}{3} Q = -C f'(x) + F \cos \theta, \tag{13}$$

$$A_1 = \frac{320}{3} + k_1 + \frac{20}{3} G, \quad A_2 = \frac{5k_2}{9} - \frac{80}{21} + \frac{2}{9}, \quad F = \frac{5}{3} F$$

为了进一步简化方程,我们令:

$$f = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \phi, \quad x = \sqrt{A_1} \xi, \quad C = C, \quad Q = 0,$$

得到化简后方程

$$\frac{d^2 \phi}{d \xi^2} + \phi^3 = \left[ F^l \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}^3} \cos \theta \frac{1}{\sqrt{A_1}} - C \sqrt{\frac{1}{A_1}} \frac{d \phi}{d \xi} \right] \tag{14}$$

## 2 稳定性分析

若无扰动时,则(14)可化为

$$\frac{d^2 \phi}{d \xi^2} + \phi^3 = 0, \tag{15}$$

其中  $\omega = \frac{C}{\sqrt{A_1}}$

而(15)的等价方程为:

$$\frac{d \phi}{d \xi} = \omega \phi, \quad \frac{d \omega}{d \xi} = -\omega^2 \phi - \omega - \phi^3,$$

此组方程有一平衡点为(0, 0), Floquet 指数为

$$= -\frac{\omega}{2} \sqrt{\left( \frac{\omega}{2} \right)^2 - 1}$$

当  $\omega = 2$  时, 平衡点为临界结点;

当  $\omega > 2$  时, 平衡点为稳定的结点;

当  $0 < \omega < 2$  时, 离开数轴在复平面上有稳定的焦点;

当  $\omega = 0$  时,  $\lambda$  为纯虚数, 这时发生 Hopf 分岔;

当  $\omega < 0$  时, 已失去物理意义, 这里不予讨论

方程(14)无阻尼的自由振动解为:

$$\phi_1(\xi) = \frac{\sqrt{2k^2}}{\sqrt{1-2k^2}} \operatorname{cn} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-2k^2}} \right), \tag{16}$$

$$\phi_2(\xi) = -\frac{\sqrt{2k^2}}{1-2k^2} \operatorname{sn} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-2k^2}} \right) \operatorname{dn} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-2k^2}} \right); \tag{17}$$

其哈密顿函数为:

$$H(\phi, \omega) = \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{4} \phi^4 = h;$$

闭轨的周期为  $T(k) = 4 \sqrt{1-2k^2} K(k)$ ;

其中  $k$  满足

$$h = \frac{2k^2}{1 - 2k^2} + \frac{2k^4}{(1 - 2k^2)^2} \quad k \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

为了利用 Melnikov 法来确定发生混沌的临界条件, 我们将(14)化为:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1(1 + \frac{2}{1}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F \sqrt{\frac{1}{A_1}} \cos \frac{0}{\sqrt{A_1}} - C \sqrt{\frac{1}{A_1}} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

当系统受到扰动时, 同宿轨道发生破裂, Melnikov 函数将测量轨道的距离来确定何时轨道发生破裂

Melnikov 函数

$$\begin{aligned} (t_0) = & - \left\{ \left\{ \begin{matrix} 2(T) \\ -1(T)(1 + \frac{2}{1(T)}) \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0 \\ B \end{matrix} \right\} \right\} dT = \\ & - C \sqrt{\frac{1}{A_1}} I(m, n) + F \sqrt{\frac{A_2}{A_1^3}} \sin \frac{0}{\sqrt{A_1}} t_0 I(m, n), \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $B = F \sqrt{\frac{A_2}{A_1^3}} \cos \frac{0}{\sqrt{A_1}} (T - t_0) - C \sqrt{\frac{1}{A_1}} 2(T);$

$I(m, n), I(m, n)$  同文[6], 利用(19)可以确定圆板在弹性地基上受到横向微扰时发生混沌的临界条件:

$$\frac{F}{C} = \frac{I(m, n) A_1}{I(m, n) \sqrt{A_2}} \quad (20)$$

为了分析地基参数对混沌发生的影响, 我们取了一组参数来进行计算

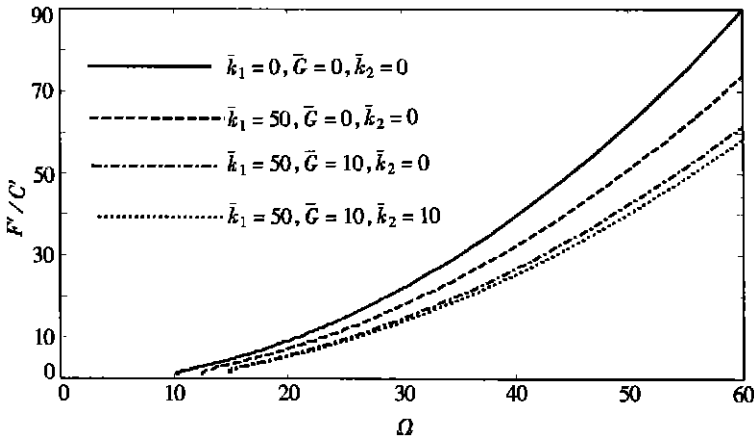


图 1 各种地基参数下混沌区域的临界曲线 ( $m = 1$ )

由图 1、图 2 我们给出了发生混沌的最低临界值, 从图 3 可以看到发生了混沌现象, 轨道无重叠, 无一定的规律, 运动的时间历程图 4 呈现混沌行为<sup>[7]</sup>

### 3 讨 论

本文简单的分析了非线性弹性地基上的圆薄板在横向扰动下的非线性力学行为, 系统出现的复杂的混沌行为受到干扰力振幅与阻尼之比干扰力的频率影响, 由于方程是硬弹簧 Duffing

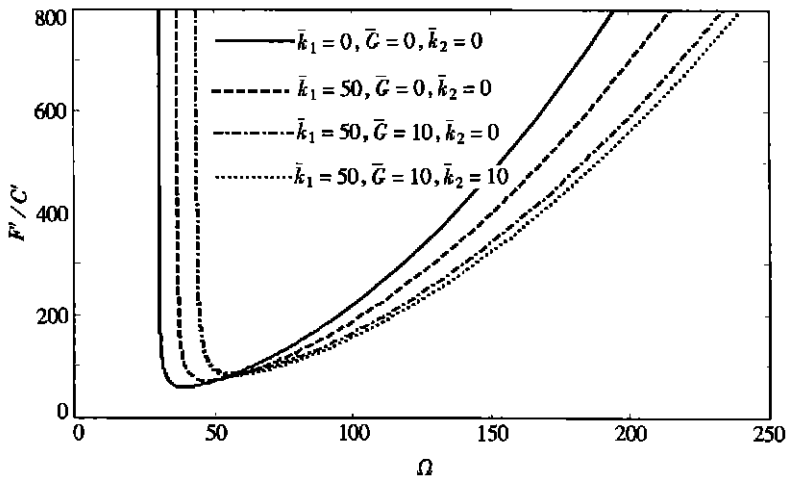


图 2 各种地基参数下混沌区域的临界曲线 ( $m = 3$ )

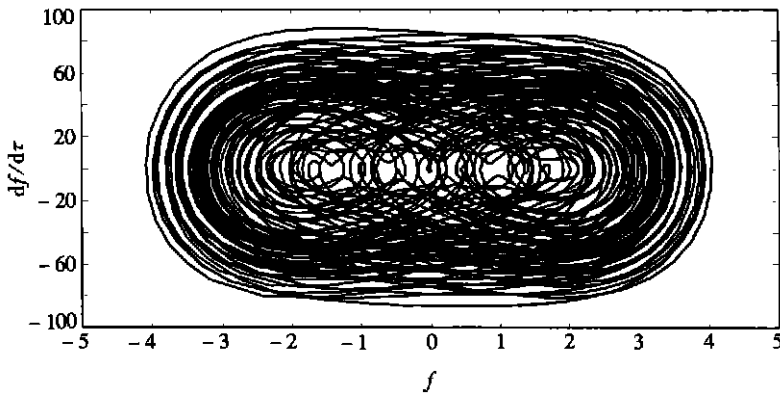


图 3 相图 ( $k_1 = 50, k_2 = 10, G = 10, F = 500, \omega = 15, C = 0.1$ )

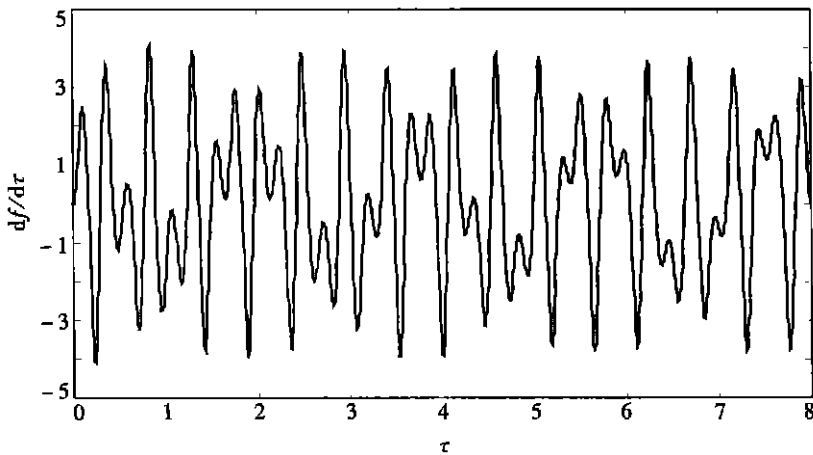


图 4 振幅随时间的变化

( $k_1 = 50, k_2 = 10, G = 10, F = 500, \omega = 15, C = 0.1$ )

方程, 适当的选择参数可得文[6]的结果 本文结果也可得到圆薄板的分岔和混沌行为

## [参 考 文 献]

- [1] Gajendar N. Large amplitude vibrations of plates on elastic foundations[J]. Int J Nonlinear Mech, 1967, 2(1): 163-168.
- [2] Nath Y. Large amplitude response of circular plate on elastic foundation[J]. Int J Nonlinear Mech, 1982, 17(4): 285-296.
- [3] Dumir P. C. Nonlinear vibration and postbuckling of isotropic thin circular plate on elastic foundation [J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, 107(2): 253-263.
- [4] 赵永刚, 王新志, 丁雪兴, 等. 静载荷作用下弹性地基上圆薄板的小阻尼非线性振动[A]. 见: 焦善庆主编. 数学、力学、物理、高新技术研究进展[C]. 成都: 西南交通大学出版社, 2000, 104-109.
- [5] 丁雪兴, 赵永刚, 王新志. 弹性地基上圆薄板的变参数迭代解[J]. 甘肃工业大学学报, 1999, 25(4): 101-105.
- [6] 唐建宁, 刘文明, 刘曾荣. 硬弹簧 Duffing 方程的全局分叉[J]. 力学与实践, 1987, 9(1): 33-37.
- [7] 陈予恕, 唐云. 非线性动力学的现代分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2000, 167-168.

## Bifurcation and Chaos of the Circular Plates on the Nonlinear Elastic Foundation

QIU Ping<sup>1</sup>, WANG Xin\_zhi<sup>1</sup>, YEH Kai\_yuan<sup>2</sup>

(1. School of Science, Lanzhou University of Science and Technology,  
Lanzhou 730050, P. R. China;

2. Physics College, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China)

**Abstract:** According to the large amplitude equation of the circular plate on nonlinear elastic foundation, elastic resisting force has linear item, cubic nonlinear item and resisting bend elastic item. A nonlinear vibration equation is obtained with the method of Galerkin under the condition of fixed boundary. Floquet exponent at equilibrium point is obtained without external excitation. Its stability and condition of possible bifurcation is analysed. Possible chaotic vibration is analysed and studied with the method of Melnikov with external excitation. The critical curves of the chaotic region and phase figure under some foundation parameters are obtained with the method of digital artificial.

**Key words:** bifurcation; chaos; large amplitude; nonlinear