

文章编号: 1000-0887(2003) 08_0771_08

纤维悬浮槽流空间模式稳定性分析^{*}

林建忠, 游振江

(浙江大学 力学系, 流体传动及控制国家重点实验室, 杭州 310027)

(我刊编委林建忠来稿)

摘要: 采用扰动的空间发展模式而非通常的时间发展模式, 对含有悬浮纤维的槽流进行了线性稳定性分析。建立了适用于纤维悬浮流的稳定性方程并针对较大范围的流动 Re 数及扰动波角频率进行了数值求解。计算结果表明, 纤维轴向抗拉伸力与流体惯性力之比 H 可以反映纤维对流动稳定性的影响。 H 增大使临界 Re 数升高, 对应的扰动波数减小, 扰动空间衰减率增加, 扰动速度幅值的峰值降低, 不稳定扰动区域缩小, 长波扰动所受影响相对较大。纤维的存在抑制了流场的失稳。

关键词: 流动稳定性; 空间模式; 纤维悬浮流; 槽流

中图分类号: O373 **文献标识码:** A

引 言

纤维悬浮流在工业生产许多领域中的应用十分普遍, 如材料加工、造纸业以及化学工业等。纤维添加剂对改变流体流动特性起着重要作用, 而纤维影响流动的稳定性就是其中的一个例子, 纤维添加剂还会影响流场从层流到湍流的转捩过程。已有研究表明, 随着纤维长径比及浓度的增加, 纤维抑制流场失稳的效果更加明显^[1]。

尽管已有一些固粒对流场稳定性影响的研究结果^[2,3], 但有关纤维对流动稳定性影响的研究却很少。Azaiez^[4,5] 对高 Re 数下自由剪切流的线性稳定性进行了分析, 总结了纤维对时间模式流动不稳定性的影响。至于空间模式的稳定性分析, 目前尚未见文献报导。

以往的稳定性研究大多采用时间模式, 即假定扰动波随时间发展, 而在空间表现出周期性, 在空间模式中, 假设扰动波随空间发展而具有时间周期性。Itoh^[6] 曾得到了平面 Poiseuille 流中, 随空间发展的小扰动稳定性方程的数值解并被后来的实验所证实^[7]。本文拟对含有悬浮纤维的槽流场进行空间模式的稳定性分析。

1 计算模型

1.1 槽流场与控制方程

平面槽流场如图 1 所示, 无量纲控制方程为以下的连续性方程和动量方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

* 收稿日期: 2002_08_25; 修订日期: 2003_04_29

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(19925210)

作者简介: 林建忠(1958—), 男, 福建建阳人, 教授, 博士, 博导(E-mail: mecjzlin@public.zju.edu.cn)。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

式中 \mathbf{u} 为速度矢量, 在壁面处 $\mathbf{u} = 0$, p 为压力, 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 表示为:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \quad (3)$$

其中第一项 $\boldsymbol{\tau}_1 = \eta \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ 是牛顿流体的应力, $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$ 为应变率张量, η 是粘性系数. 第二项 $\boldsymbol{\tau}_2$ 是纤维引起的附加应力. 对于半稀纤维悬浮液可设 $1/r^2 \leq \phi \leq 1/r$, ϕ 为纤维的体积分, r 为纤维长径比, 因此附加应力可表示为

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \eta \phi (\dot{\boldsymbol{\gamma}} : \mathbf{a}_4) \quad (4)$$

考虑到纤维长径比及流场 Re 数较大时有^[8]:

$$A = \frac{r^2}{3 \ln(\sqrt{2\pi}/\phi)} \quad (5)$$

(4) 式中四阶张量 \mathbf{a}_4 反映纤维在流场中的取向分布, Hinch^[9] 给出了描述它的本构方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a}_2 - \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2 \cdot \nabla \mathbf{u} = \\ \frac{\chi - 1}{2} (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}) - \chi (\dot{\boldsymbol{\gamma}} : \mathbf{a}_4) + 2\mathbf{D}_r (\mathbf{I} - m\mathbf{a}_2), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\chi = (r^2 - 1)/(r^2 + 1)$, \mathbf{I} 是单位张量, m 表示空间维数. 扩散率张量 \mathbf{D}_r 形式为 $C_1 |\dot{\boldsymbol{\gamma}}|$, C_1 取常数 0.01 ^[10]. \mathbf{a}_2 是二阶方向张量, 它与 \mathbf{a}_4 的关系式为^[11]:

$$a_{ijkl} = \frac{1}{6} \det(a_{ij}) (\delta_j \delta_{kl} + \delta_k \delta_{jl} + \delta_l \delta_{jk}) + \frac{1}{3} (a_{ij} a_{kl} + a_{ik} a_{jl} + a_{il} a_{jk}) \quad (7)$$

式中 $\det(a_{ij})$ 是二阶张量的行列式, δ_j 为 Kronecker 符号.

由方程(6)和(7)导出方向张量表达式并代入(4), 得到纤维应力表达式. 纤维悬浮液的控制方程组随之建立.

1.2 线性稳定性方程

文中的雷诺数 Re 定义为 $Re = \rho U(d/2)/\eta$, 其中 U 是中心线上流向速度, d 为槽道宽度. 引进纤维特性参数 $H = A\phi/Re$, 反映纤维抵抗轴向拉伸的能力^[5]. 令 $\mathbf{F} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} : \mathbf{a}_4$, 动量方程改写为:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\frac{1}{Re} \dot{\boldsymbol{\gamma}} + H\mathbf{F} \right], \quad (8)$$

边界条件为:

$$\mathbf{u} |_{y=\pm 1} = 0 \quad (9)$$

考虑二维线性扰动, 将流函数作为基本变量, 并表示成平均值与小扰动叠加的形式:

$$\psi(x, y, t) = \Psi_0(y) + \psi'(x, y, t) = \Psi_0(y) + \varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (10)$$

在本文采用的空间模式中, 令 β 为实数, α 为复数, $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$. β 表示扰动角频率, α_r 则为扰动波, α_i 为扰动衰减率.

其它的变量也可写成基本流动加上小扰动的形式:

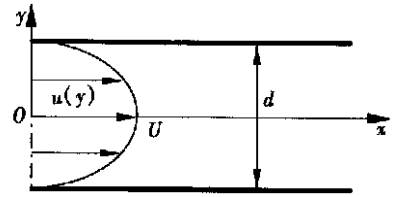


图 1 槽流场示意图

$$F(x, y, t) = F_0(y) + F'(x, y, t) = F_0(y) + F(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}, \tag{11}$$

$$u(x, y, t) = U_0(y) + u'(x, y, t) = U_0(y) + \frac{d\varphi}{dy}e^{i(\alpha x - \beta t)}, \tag{12}$$

$$v(x, y, t) = V_0(y) + v'(x, y, t) = V_0(y) - i\alpha\varphi e^{i(\alpha x - \beta t)}, \tag{13}$$

其中流向平均速度 $U_0(y) = 1 - y^2$, 垂直平板方向的平均速度 $V_0(y) = 0$ 。

对方程(8)取旋度并将式(11)~(13)代入, 就得到关于扰动流函数幅值 φ 的微分方程, 即纤维悬浮流的稳定性方程:

$$i\alpha \left[\left(U_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right) (D^2 - \alpha^2) - D^2 U_0 \right] \varphi - \frac{1}{Re} (D^2 - \alpha^2)^2 \varphi = H [(D^2 + \alpha^2) F_{12} + i\alpha D (F_{11} - F_{12})], \tag{14}$$

式中 $D = d/dy$ 。边界条件为:

$$\varphi(\pm 1) = 0, \quad D\varphi(\pm 1) = 0. \tag{15}$$

在方程(14)中, 参数 $H = 0$ 对应不含纤维的情况, 此时, 方程(14)简化成标准的 Orr-Sommerfeld 方程。

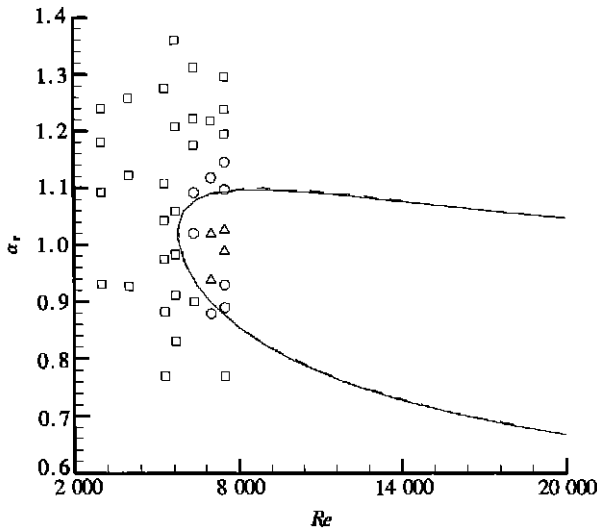
2 稳定性方程数值解法

为便于求解, 方程(14)整理成如下形式:

$$\sum_{i=0}^4 J_i D^i \varphi(y) = 0, \tag{16}$$

其中各阶导数的系数 $J_i (i = 0, 4)$ 均与坐标位置有关。

求解方程(16)采用 Gauss-Jackson-Noumerov 差分方法^[12], 该方法可以达到 4 阶精度, 优于一般的差分法。计算时使用均匀网络, 设网络间距为 h , 引入中间变量 $g(y)$, 将未知量 $\varphi(y)$ 及其各阶导数离散化。变换公式为:



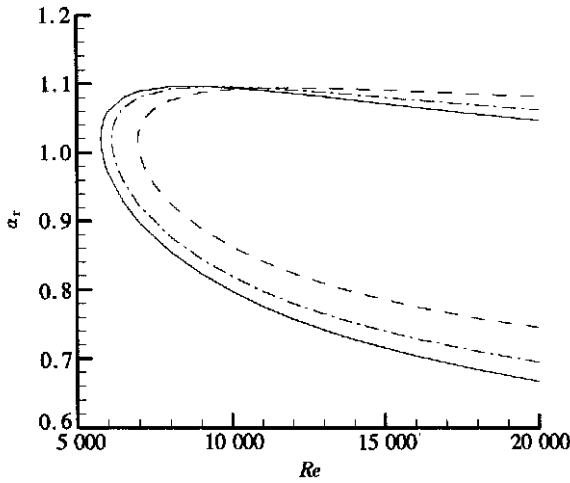
— 本文结果, - - Pekeris, et al

Nishioka 等的实验结果: □ 衰减; ○ 中性; △ 放大

图 2 槽流中性稳定性曲线(与其它结果比较)

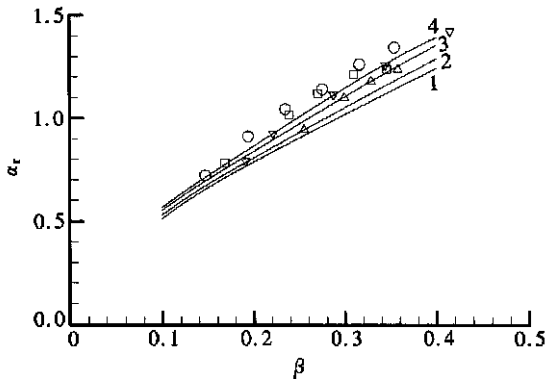
$$\begin{pmatrix} \varphi \\ hD\varphi \\ h^2D^2\varphi \\ h^3D^3\varphi \\ h^4D^4\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{360} & \frac{7}{45} & \frac{41}{60} & \frac{7}{45} & \frac{1}{360} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{n-2} \\ g_{n-1} \\ g_n \\ g_{n+1} \\ g_{n+2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

于是, 关于 $\varphi(y)$ 的常微分方程转化为关于 g_n 的代数方程组, 给定参数 β 及 Re 后即可求解。



— $H = 0$; - - $H = 0.0001$; - · - $H = 0.0003$

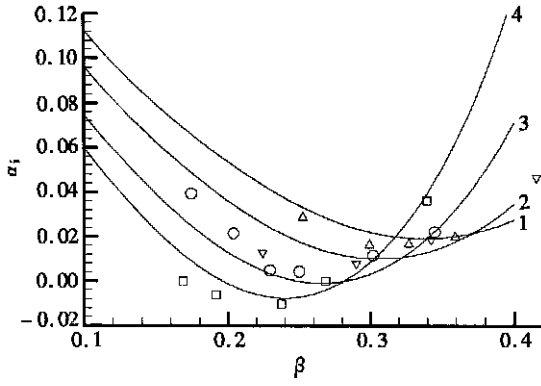
图3 纤维悬浮槽流中性曲线



Re 数	3 000	4 000	6 000	8 000
本文结果	1	2	3	4
实验结果	\triangle	∇	\circ	\square

(Nishioka 等)

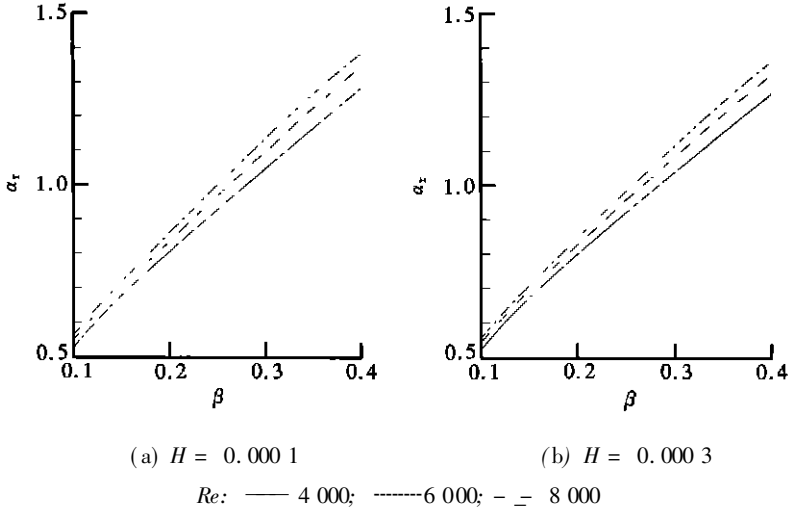
图4 不同 Re 数下扰动波数与角频率关系曲线



Re 数	3 000	4 000	6 000	8 000
本文结果	1	2	3	4
实验结果	△	▽	○	□

(Nishioka 等)

图5 不同 Re 数下扰动衰减率与角频率关系曲线



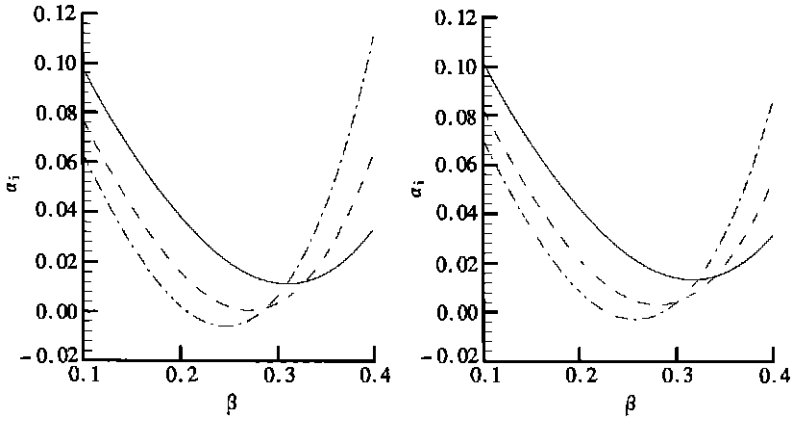
(a) $H = 0.000\ 1$ (b) $H = 0.000\ 3$
 Re: — 4 000; - - - 6 000; - · - 8 000

图6 不同 Re 数下扰动波数与角频率关系曲线

3 结果与讨论

中性稳定性曲线是反映流动稳定性特征的重要结果。图2给出了牛顿流体槽流的分析结果,并同一些计算与实验结果作比较。本文得到的流动临界 Re 数 Re_c 是 5 775, 对应的波数是 $\alpha_c = 1.020\ 545\ 66$, 同已知的计算结果相符, 如 Orszag^[13] 的结果: $Re_c = 5\ 772.22$, $\alpha_c = 1.020\ 558$; Pekeris 等^[14] 的结果: $Re_c = 5\ 800$, $\alpha_c = 1.025\ 0$; Itoh^[6] 的结果: $Re_c = 5\ 771$ 。以上理论结果也为 Nishioka 等的实验所证实^[7] ($Re_c = 6\ 000$)。图中所示实验结果中扰动的 3 种发展形式也同理论预测相一致。

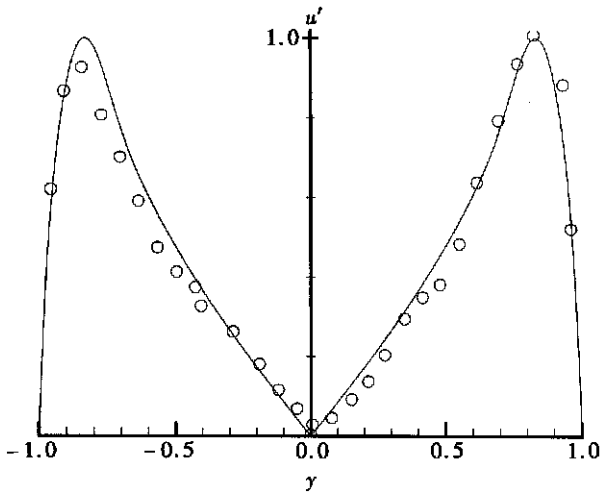
与牛顿流相比, 纤维悬浮流的稳定性特征有很大差异。不同参数 H 条件下的中性曲线如图3所示, 其中实线对应牛顿流体。随着 H 值的增加, 临界 Re 数增大而对应的波数减小, 即 $H = 0$ 时, $Re_c = 5\ 775$, $\alpha_{rc} = 1.020\ 545\ 66$; $H = 0.000\ 1$ 时, $Re_c = 6\ 124$, $\alpha_{rc} = 1.019\ 129\ 49$; $H = 0.000\ 3$ 时, $Re_c = 6\ 965$, $\alpha_{rc} = 1.016\ 814\ 77$ 。此外, 若给定 Re 数(大于 Re_c), H 增大时不稳



(a) $H = 0.0001$ (b) $H = 0.0003$

Re: — 4 000; -----6 000; - _ 8 000

图 7 不同 Re 数下扰动衰减率与角频率关系曲线



○ Nishioka 等的实验结果

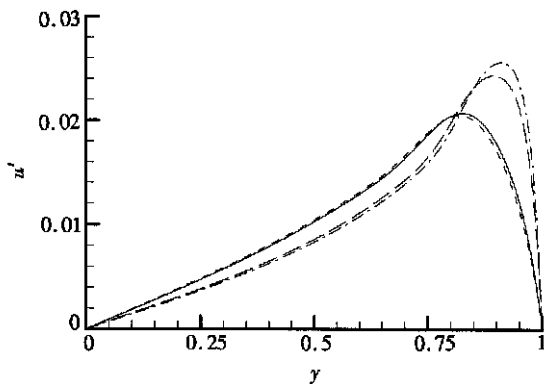
($Re = 4\,000, \beta = 0.27$)

图 8 流向扰动速度的均方根值分布

定波的范围缩小。纤维对长波扰动的影响更为显著。

图 4 和图 5 分别表示 Re 数一定时 α_r 与 α_i 随扰动频率 β 的变化规律, 一些实验结果也同时标出。计算的 Re 数范围是 3 000 至 8 000, β 值选取时涵盖了整个不稳定区以及中性曲线附近的扰动衰减区。图 4 中, α_r 与 β 的关系近似直线, 这些曲线斜率的倒数表示扰动波的相速度, Re 数增大时不稳定扰动的相速度略微减小。扰动衰减因子 α_i 为负时说明流动不稳定, 由图 5 可知槽流的临界 Re_c 数接近 6 000。这些结果同 Itoh 的计算结果一致^[6]。

图 6、图 7 分别为纤维悬浮流中 α_r 与 α_i 随 β 的变化规律。参照图 4 与图 5 可以看出 H 值改变对扰动波的影响。频率一定时, H 增加不仅使波数下降, 而且不同 Re 数条件下的波数差也在减小, 纤维的存在减缓了流动因 Re 数增加而稳定性减弱的趋势。另外, 相同 Re 数下扰动空间衰减率的最小值随 H 的增大而增大, 扰动增长区不断缩小, 也说明纤维对流动失稳的抑制作用。



$Re = 4\,000, \beta = 0.25$: — $H = 0$;
 ----- $H = 0.000\,3$;
 $Re = 12\,000$: - - $\beta = 0.258\,2, H = 0$;
 - - - $\beta = 0.275\,8, H = 0.000\,3$

图9 扰动流向速度的幅值分布

流向扰动速度的均方根值分布如图8所示,图中的值用流向扰动速度的均方根值最大值 u'_m 进行了归一化,图中也给出了实验值。可见最大值出现在 $y = \pm 0.83$ 附近。正如 Itoh^[6] 所指出的,分布曲线关于槽道中心线对称。

图9说明纤维对扰动速度分布的影响,为清楚起见只显示槽道的一半。一般地,流动 Re 数升高将导致扰动速度幅值的峰值增大且向壁面方向偏移,纤维的加入起到抑制峰值的作用,从而削弱了流动的不稳定性。相比较而言,高 Re 数下纤维的这种作用更加显著。

4 结 论

本文对含有悬浮纤维的槽流进行线性稳定性分析,推导了空间增长模式的修正 Orr-Sommerfeld 方程,并对较大范围的 Re 数与角频率进行了数值求解。牛顿流的计算结果同现有的数值解及实验数据符合较好。

对纤维悬浮流的分析结果表明,纤维对流动稳定性的影响由参数 H 即纤维轴向抗拉伸力与流体惯性力之比刻划。 H 增加引起临界 Re 数升高,对应的扰动波数减小,整体上不稳定扰动区域缩小,并且长波扰动受到纤维的影响较大。 H 增加导致扰动空间衰减率增大,扰动速度幅值的峰值受到抑制。添加纤维起到增加抑制流场失稳的作用。

[参 考 文 献]

- [1] Arranaga A B. Friction reduction characteristics of fibrous and colloidal substances[J]. Nature, 1970, 225: 447—449.
- [2] Yang Y, Chung J N, Troutt T R, et al. The influence of particles on the spatial stability of two phase mixing layers[J]. Physics of Fluids A, 1990, 2: 1839—1845.
- [3] 周泽宣,林建忠. 悬浮固粒对二维混合层流动失稳特性的影响[J]. 应用数学和力学, 1997, 18(6): 507—512.
- [4] Azaiez J. Linear stability of free shear flows of fiber suspensions[J]. J Fluid Mech, 2000, 404: 179—209.
- [5] Azaiez J. Reduction of free shear flows instability: Effects of polymer versus fiber additives[J]. J

- Non-Newtonian Fluid Mech, 2000, **91**: 233—254.
- [6] Itoh N. A power series method for the numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation[J]. Trans Japan Soc Aero Space Sci, 1974, **17**: 65—75.
- [7] Nishioka M, Iida S, Ichikawa Y. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow [J]. J Fluid Mech, 1975, **72**: 731—751.
- [8] Batchelor G K. The stress generated in a non-dilute suspension of elongational particles by pure straining[J]. J Fluid Mech, 1971, **46**: 813—829.
- [9] Hinch E J. Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows[J]. Phys Fluids, 1977, **20**: 22—30.
- [10] Folgar F P, Tucker C L. Orientation behavior of fibers in concentrated suspensions[J]. J Reinf Plast Comp, 1984, **3**: 98—119.
- [11] Cintra J S, Tucker C L. Orthotropic closure approximation for flow-induced fiber orientation[J]. J Rheol, 1995, **39**: 1095—1122.
- [12] Thomas L H. The stability of plane Poiseuille flow[J]. Phys Rev, 1953, **91**: 780—783.
- [13] Orszag S A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation[J]. J Fluid Mech, 1971, **50**: 689—703.
- [14] Pekeris C L, Shkoller B. Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude in the vicinity of the neutral curve[J]. J Fluid Mech, 1967, **29**: 31—38.

Stability Analysis in Spatial Mode for Channel Flow of Fiber Suspensions

LIN Jian_zhong, YOU Zhen_jiang

(Department of Mechanics, State Key Laboratory of Fluid Power Transmission and Control,
Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China)

Abstract: Different from previous temporal evolution assumption, the spatially growing mode was employed to analyze the linear stability for the channel flow of fiber suspensions. The stability equation applicable to fiber suspensions was established and solutions for a wide range of Reynolds number and angular frequency were given numerically. The results show that, the flow instability is governed by a parameter H which represents a ratio between the axial stretching resistance of fiber and the inertial force of the fluid. An increase of H leads to a raise of the critical Reynolds number, a decrease of corresponding wave number, a slowdown of the decreasing of phase velocity, a growth of the spatial attenuation rate and a diminishment of the peak value of disturbance velocity. Although the unstable region is reduced on the whole, long wave disturbances are susceptible to fibers.

Key words: flow stability; spatial mode; fiber suspensions; channel flow