应用数学和力学, 第 24 卷 第 1 期(2003 年 1 月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 01_0098_07

正交双复数空间变换与流体问题的边界元*

罗义银

(重庆大学 工程力学系, 重庆 400044)

(张汝清推荐)

摘要: 在确立特殊的正交双复数空间及正交双复变函数的概念上, 建立其相应的运算规则及空间保角变换的概念, 并用这些概念, 探索了它在流体边界元中的应用前景• 研究表明, 所建立的概念和特殊表达算符, 能够有效地将平面复数的概念扩展至三维空间, 并可构成数理应用领域的一个有效工具•

关 键 词: 正交双复数; 双复变函数空间; 空间保角变换; 流体边界元
中图分类号: O342　　文献标识码: A

引 言

现有的复变函数理论是在一维复数中研究二维实数, 借用复平面的特点, 取得了平面矢量、指数、谐波分析、调和分析的广泛应用• 据此, Wu J C 利用保角变换下的边界元法将平面流体问题在复平面上进行了较完善地分析[1,2], 从而导致了二维流体问题的高效、高精度边界元的变换算法• 但是众多的物理问题必须用更完善的三维空间来表达, 诸如三维非对称流形、裂纹扩展、传导与扩散等等; 如何将平面复数的理论推展到三维空间, 目前尚无成功的实例• 如果能用两个正交的复数平面将三维实数空间问题进行处理表达, 问题将得到明确表现• 而引入一般的 n 维复数空间, 又将问题过于抽象化和复杂化, 并失去了物理问题的直观特性[3,4]• 故针对三维实数空间的物理问题, 借用边界积分方程变换到正交的两个复平面内进行拓扑分析, 将具有莫大好处, 特别是可以直观引用一维复数的大部分结果; 借以研究三个空间实函数组成空间的位、势、流形问题, 从而展示物理问题的复杂性• 为此, 首先考虑建立空间正交的复平面及其表达, 从而确立一个表达空间正交复数的特殊的坐标函数体系, 推导其相应的运算规则及其空间变换原理; 针对三维流体为例, 进行相应的变换讨论和探索, 得到一些初步结果•

1 正交双复数空间概念

1.1 定义　正交的空间 x, y, z 坐标, 以 y 轴为虚轴, x, z 为实轴, 组成两个正交的复平面: $(x, y), (z, y)$ 及一个实数平面(x, z) , 共同构成正交的双复数空间, 标记:

$$\vartheta = (x, z) + \mathrm{i}y \tag{1}$$

* 收稿日期: 2001_07_30; 修订日期: 2002_09_30
作者简介: 罗义银(1946—) , 男, 重庆人, 副教授(E_mail: luoyiyin@hotmail.com)•

$$\vartheta = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\theta + i\sin\theta, \qquad (1)'$$

$$\vartheta = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi) \cdot e^{i\theta} \cdot \qquad (1)''$$

为正交双(二维)复数,或正交双复数空间•

如图 1 所示,其中 (x, z) 为双复数 ϑ 的实数坐标函数标记,它既具有坐标性质,又具有特定的函数特性,从后面的阐述中可见• $(1)'$ 和 $(1)''$ 式为其三角表示和指数表示, Ƨ约定为一个 $(1)'$ 或到 $(1)''$ 式的特殊的简化算符• 采用以下特殊符号标记相应信息•

$|\vartheta| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$ 为 ϑ 的模•

$\vartheta_x = \vartheta|_{z=0} = x + iy$ 为 (x, y) 平面内的一维复数•

$\vartheta_z = \vartheta|_{x=0} = z + iy$ 为 (z, y) 平面内的一维复数•

$\vartheta_{xz} = \vartheta|_{y=0} = (x, z)$ 为 (x, z) 平面内的实数点•

$\vartheta_y = \vartheta|_{x=z=0} = iy$ 为 y 轴上的纯虚数•

$\theta_x = \arctan(y/x)$, 为 ϑ_x 的幅角, $0 \leqslant \theta_x \leqslant 2\pi$•

$\theta_z = \arctan(y/z)$, 为 ϑ_z 的幅角, $0 \leqslant \theta_y \leqslant 2\pi$•

$\theta = (\theta_x, \theta_z) = \arctan(y/\sqrt{x^2 + z^2})$ 为双复数 ϑ 的幅角,也即是矢径 ρ 与 (x, z) 平面的夹角, φ 为 ρ 在 (x, z) 平面的上投影 ρ_{xz} 与 x 轴的夹角, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$•

$\vartheta = (x, z) - iy$, ϑ 与 ϑ 互为共轭双复数•

以上是将二维实数平面与两个空间正交的一维复数平面在欧式空间中形成了直观的正交组合,目的是为了展示物理问题的直观现象,并追求一些简便结果• 采用了一个特殊的符号 $\vartheta = (x, z) + iy = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\theta + i\sin\theta = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi)$ Ƨ$e^{i\theta}$ 来标记正交双复数概念,从上述可见,它既具有双复数与函数的性质,又具有坐标的部分特征,还具有矢量的一些特性• 之所以采用上述特殊符号来标记,完全是为了后面运算表达方便和简洁• 至于正交性,从上述空间的构造中明显可见,从以后的空间变换中也可以证明•

1.2 正交双复数的运算规则

和平面复数的四则运算规则一样[5~6],可以导出正交双复数的相应规则,以下的四则运算规则,除了按照平面复数的运算规则进行而外,也有部分人为的约定法则•

$\vartheta - \vartheta = 2iy$, 为 y 轴上的纯虚数,

$\vartheta + \vartheta = 2(x, z) = (2x, 2z)$ 为实平面 (x, z) 内的一个坐标点,

$$\vartheta_1 \pm \vartheta_2 = [(x_1, z_1) + iy_1] \pm [(x_2, z_2) + iy_2] = (x_1 \pm x_2, z_1 \pm z_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1 \cdot \vartheta_2 &= [(x_1, z_1) + iy_1][(x_2, z_2) + iy_2] = \\ &(x_1, z_1)(x_2, z_2) - y_1y_2 + i[y_1(x_2, z_2) + y_2(x_1, z_1)] = \\ &(x_1x_2, z_1z_2) - y_1y_2 + i[y_1(x_2, z_2) + y_2(x_1, z_1)],\end{aligned}$$

$$\vartheta^2 = [(x, z) + iy][(x, z) + iy] = (x, z)^2 - y^2 + i2y(x, z),$$

$$\vartheta_1/\vartheta_2 = \vartheta_1 \cdot \vartheta_2/(\vartheta_2 \cdot \vartheta_2) = \vartheta_1\vartheta_2/|\vartheta_2|^2,$$

$$|\vartheta^2| = \sqrt{[(x, z) - y^2]^2 + 4y^2(x, z)^2} = \sqrt{[(x, z)^2 + y^2]^2} = |\vartheta|^2,$$

$$\vartheta \cdot \vartheta = [(x, z) + iy][(x, z) - iy] = (x, z)^2 + y^2 = x^2 + z^2 + y^2 = |\vartheta|^2 \cdot$$

1.3 三角表示法及运算规则

按照上述 $(1)'$ 式的表达方式,可以导出相应的三角表示法的运算规则•

$$\vartheta = (|\vartheta_x|\cos\theta_x, |\vartheta_z|\cos\theta_z) + i|\vartheta_x|\sin\theta_x =$$

$$(|\vartheta_x|\cos\theta_x, |\vartheta_z|\cos\theta_z) + \mathrm{i}|\vartheta_z|\sin\theta_z =$$
$$\rho[(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta], \tag{1$'$}$$
$$\vartheta_1 \cdot \vartheta_2 = [|\vartheta_{1x}|\cdot|\vartheta_{2x}|\cos(\theta_{1x}+\theta_{2x}), |\vartheta_{1z}|\cdot|\vartheta_{2z}|\cos(\theta_{1z}+\theta_{2z})] +$$
$$\mathrm{i}|\vartheta_{1x}|\cdot|\vartheta_{2x}|\sin(\theta_{1x}+\theta_{2x}) =$$
$$\rho_1\rho_2\left\{[\cos(\varphi_1+\varphi_2), \sin(\varphi_1+\varphi_2)]\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\right\}.$$

1.4 指数表示法及运算规则

$$\vartheta = (|\vartheta_x|, |\vartheta_z|)e^{\mathrm{i}(\theta_x,\theta_z)} = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi)\cdot e^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1$''$}$$

这里 $\vartheta_x = |\vartheta_x| e^{\mathrm{i}\theta_x} = \rho_x e^{\mathrm{i}\theta_x}$, $\vartheta_z = |\vartheta_z| e^{\mathrm{i}\theta_z} = \rho_z e^{\mathrm{i}\theta_z}$,

$$\vartheta_1 \cdot \vartheta_2 = (|\vartheta_{1x}|, |\vartheta_{2x}|, |\vartheta_{1z}|\cdot|\vartheta_{2z}|)e^{\mathrm{i}(\theta_{1x}+\theta_{2x}, \theta_{1z}+\theta_{2z})} =$$
$$\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2), \sin(\varphi_1+\varphi_2)]\cdot \exp[\mathrm{i}(\theta_{1x}+\theta_{2x}, \theta_{1z}+\theta_{2z})],$$
$$\vartheta_1/\vartheta_2 = (|\vartheta_{1x}|/|\vartheta_{2x}|, |\vartheta_{1z}|/|\vartheta_{2z}|)e^{\mathrm{i}(\theta_{1x}-\theta_{2x}, \theta_{1z}-\theta_{2z})} =$$
$$\rho_1/\rho_2[\cos(\varphi_1-\varphi_2), \sin(\varphi_1-\varphi_2)]\cdot e^{\mathrm{i}(\theta_{1x}-\theta_{2x}, \theta_{1z}-\theta_{2z})},$$
$$\vartheta^n = (|\vartheta_x|^n, |\vartheta_z|^n)e^{\mathrm{i}(n\theta_x, n\theta_z)} = \rho^n[\cos(n\varphi), \sin(n\varphi)]\cdot e^{\mathrm{i}n\theta},$$
$$\vartheta^{1/n} = (|\vartheta_x|^{1/n}, |\vartheta_z|^{1/n})e^{\mathrm{i}(\theta_x/n+2k\pi, \theta_z/n+2k\pi)} =$$
$$\rho^{1/n}[\cos(\varphi/n+2k\pi), \sin(\varphi/n+2k\pi)]\cdot e^{\mathrm{i}(\theta/n+2k\pi)}.$$

和平面复数一样,具体使用时,为了方便,可以灵活地采用上述表达式.

2 "解析函数"

和平面复数及复变函数一样[5~6],可以方便地导出其相应的双复变函数、导数、微分、积分、调和函数与解析函数的概念,以及相应的"柯西_黎曼条件".

2.1 正交双复变函数

$$\Omega = f(\vartheta) = [u(x,y,z), w(x,y,z)] + \mathrm{i}v(x,y,z) = (u,w) + \mathrm{i}v, \tag{2}$$

定义为双复数 ϑ 的正交双复变函数,且 Ω 是 ϑ 的连续函数. 其中 $\vartheta = (x,z) + \mathrm{i}y$; $u(x,y,z)$, $w(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ 均是 x,y,z 的实函数. 显然(2)式构成三维空间中的三重实函数的特殊偶合,可以以表达三维空间中的位、势及流形问题.

2.2 导数

$$\Omega'|_{\vartheta=\vartheta_0} = f'(\vartheta_0) = \lim_{\vartheta\to\vartheta_0}[f(\vartheta) - f(\vartheta_0)]/(\vartheta - \vartheta_0) \tag{3}$$

存在,则 $f'(\vartheta_0)$ 称为 $\Omega = f(\vartheta)$ 在 ϑ_0 的导数. $|f'(\vartheta_0)|$ 称为 $\Omega = f(\vartheta)$ 在 ϑ_0 点的伸缩系数,$f'(\vartheta_0)$ 的幅角称为 $\Omega = f(\vartheta)$ 在 ϑ_0 点的旋转角.

2.3 解 析 函 数

当 $\Omega' = f'(\vartheta)$ 在 Σ 区域内存在,且不处处为零,则称

$\Omega = f(\vartheta) = [u(x,y,z), w(x,y,z)] + \mathrm{i}v(x,y,z)$ 为在区域 Σ 内是 ϑ 的"解析函数".

2.4 柯西_黎曼条件

$$f'(\vartheta) = \mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}\vartheta = \lim_{\Delta\vartheta\to 0}\Big[\big\{[u(x,\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z), w(x,\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)] +$$
$$\mathrm{i}v(x,\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\big\} - \big\{[u(x,y,z), w(x,y,z)] -$$
$$\mathrm{i}v(x,y,z)\big\}\Big]/\big[(\Delta x, \Delta z) + \mathrm{i}\Delta y\big],$$

令 ϑ 分别从 x,y,z 轴方向使 $\Delta\vartheta \to 0$,即 $\Delta\vartheta = (\Delta x, \Delta z) + \mathrm{i}\Delta y \to 0$,

$$f'_x(\vartheta) = \lim_{\Delta\vartheta\to 0}[f(\vartheta+\Delta\vartheta) - f(\vartheta)]/\Delta\vartheta =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Big[\Big\{[u(x,\Delta x,y,z),w(x,\Delta x,y,z)]+\mathrm{i}v(x,\Delta x,y,z)\Big\}-\Big\{[u(x,y,z),w(x,y,z)]+\mathrm{i}v(x,y,z)\Big\}\Big]/\Delta x=$$
$$\frac{\partial}{\partial x}[u(x,y,z),w(x,y,z)]+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}v(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}[(u,w)+\mathrm{i}v],\tag{3$'$}$$

同样 $$f'_z(\vartheta)=\frac{\partial}{\partial z}[(u,w)+\mathrm{i}v],\tag{3$''$}$$

$$f'_y(\vartheta)=\lim_{\Delta y\to 0}\Big\{[u(x,y+\Delta y,z),w(x,y+\Delta y,z)]-\mathrm{i}v(x,,+\Delta y,z)\Big\}/(\mathrm{i}\Delta y)=$$
$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}(u,w)+\frac{\partial}{\partial y}v=\frac{\partial}{\partial y}[v-\mathrm{i}(u,w)]\cdot\tag{3$'''$}$$

从上面可得:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u,w)=\frac{\partial}{\partial z}(u,w)=\frac{\partial}{\partial y}v,\tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u,w)=-\frac{\partial}{\partial x}v=-\frac{\partial}{\partial z}v,\tag{4$'$}$$

即有相应的正交双复变函数的“柯西_黎曼条件”•

2.5 积分

可以证明, $f(\vartheta)$ 沿空间光滑闭曲线 c 积分可以表达为

$$\oint_c f(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta=\oint_c[(u,w)\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y]+\mathrm{i}\oint_c[(u,w)\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x]=$$
$$\oint_c[(u,v)\mathrm{d}z-w\,\mathrm{d}y]+\mathrm{i}\oint_c[(u,w)\mathrm{d}y+v\mathrm{d}z]=$$
$$\iint_D\Big[\frac{\partial}{\partial x}(-w)=\frac{\partial}{\partial y}(u,v)\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+\mathrm{i}\iint_D\Big[\frac{\partial}{\partial x}(u,v)-\frac{\partial}{\partial y}w\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

其中 D 为过闭曲线 c 的空间光滑闭曲面, 根据“柯西_黎曼条件”, 上述积分为零• 故

$$\oint_c f(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta=0,\tag{5}$$

同样可以得到相应的“柯西公式”为:

$$f(\vartheta)=-\frac{1}{4\pi}\oint_c[f(\vartheta)/(\vartheta-\vartheta_0)]\,\mathrm{d}\vartheta\cdot\tag{6}$$

2.6 调和函数

从上述可知,

$$f''(\vartheta)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}[(u,w)+\mathrm{i}v]\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}[(u,w)+\mathrm{i}v]\right)=$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}[(u,w)+\mathrm{i}v]/\mathrm{i}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}[-\mathrm{i}(u,w)+v]\cdot$$

由上述可以定义, $u(x,z,y),w(x,z,y)$ 为调和函数的条件:

$$\Delta u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w=0\cdot$$

3 空间正交(保角)映射

正交(保角)映射定理, 若 $\Omega=f(\vartheta)$ 在 ϑ_0 解析, 且 $f'(\vartheta_0)\neq 0$, 则 $\Omega=f(\vartheta)$ 在 ϑ_0 点所构成的映射是正交(保角)映射•

与平面复变函数的保角变换一样, 可得到空间正交保角变换的同样结果• 例如, 当 $\Omega = a + \vartheta$, $a = (a_x, a_z) + \mathrm{i}a_y$, 实现从 ϑ 空间到 Ω 空间的平移• $\Omega = a \cdot \vartheta$, $a = (a_x, a_z) + \mathrm{i}a_y$, 实现了从 ϑ 空间到 Ω 空间的伸缩和旋转, 同样可以得到诸如单位球内外的变换等等•

例如 $\Omega = f(\vartheta) = \vartheta^2$ 的映射:

$\Omega = f(\vartheta) = \vartheta^2 = (x, z)^2 - y^2 + \mathrm{i}2y(x, z)$, $u = x^2 - y^2$, $w = z^2 - y^2$, $v = 2y(x, y)$; ①如 $x = a$, $z = 0$, 表示 ϑ 空间中(x, y) 平面内的直线 a_1(图2), 可以映射为 Ω 空间中 $u = a^2 - y^2$, $v = 2ay$, $w = -y^2$, 消去 y, 得到: $u = a^2 - v^2/(4a^2)$, $w = -v^2/(4a^2)$, $u = a^2 + w$, 这表示顶点在$(a^2, 0, 0)$ 的(u, v) 平面和(w, v) 平面内的抛物线 a_1, 和(u, w) 平面内的直线 a_1(图3)•

②如 $x = a$, $y = 0$, 表示 ϑ 空间中(x, z) 平面内的直线 a_2(图2), 可映射为 Ω 空间中的: $w = z^2$, $u = a^2$, $v = 0$, 直线 a_2 (图3)•

③如 $y = b$, $z = 0$, 表示 ϑ 空间中(x, y) 平面内的直线 b_1(图2), 可以映射为 Ω 空间中的 $u = x^2 - b^2$, $v = 2bx$, $w = -b^2$, 消去 x, 得到: $u = v^2/(4b^2) - b^2$, $w = -b^2$, 这就是平面(u, v) 顶点在$(-b^2, 0, -b^2)$ 的抛物线 b_1 (图4)•

④如 $y = b$, $x = 0$, 表示 ϑ 空间中(x, y) 平面内的直线 b_2(图2), 映射为 Ω 空间中: $u = -b^2$, $v = 2bz$, $w = z^2 - b^2$, 消去 z, 得到: $w = v^2/(4b^2) - b^2$, 这就是平面内(w, u) 顶点在$(-b^2, 0, -b^2)$ 的抛物线 b_2 (图4)•

⑤如 $z = c$, $x = 0$, 得 $w = c^2 - y^2$, $v = 2cy$, $w = -y^2$, 消去 y, 得: $w = c^2 + u$, $w = c^2 - v^2/(4c^2)$, $u = -v^2/(4c^2)$, 这是平面(w, v) 和(u, v) 内的顶点在$(a^2, 0, 0)$ 的抛物线 c_1(图5), 及(w, u) 平面内的直线 c_1 •

⑥如 $z = c$, $y = 0$, 得: $u = x^2$, $v = 0$, $w = c^2$, 这是平面(w, u) 内的直线 c_2 (图5)•

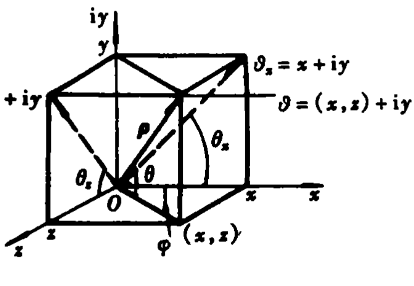

图1 正交双复数空间

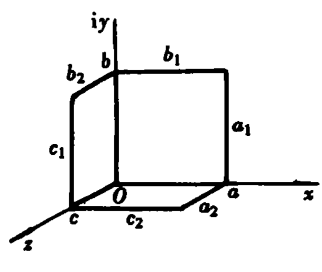

图2 ϑ_空间中的直线

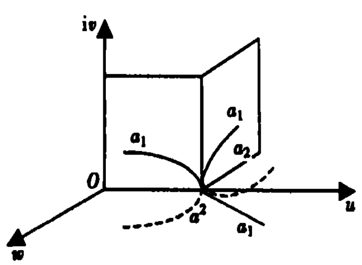

图3 a_1, a_2 在 Ω_空间中的映射

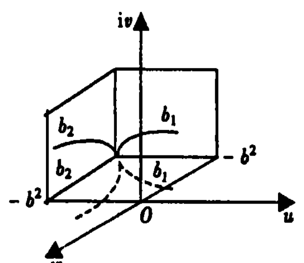

图4 b_1, b_2 在 Ω_空间中的映射

4 流体问题的边界元法

由上述定义的正交双复数空间及所规定的运算规则以及相应的解析函数、保角映射例子,尽管缺少严格的数学逻辑推理证明,但从实用的角度看,应该是正确的;而且不难发现正交双复数空间概念作为一种数理工具,具有明显的优势,利用它的解析函数及保形映射特点可以处理许多数理问题• 诸如空间流场、流体分形、复杂形态的空间变换等问题,可利用格林公式转换到正交的复平面及一个与之同样正交的实平面内或其边界上进行处理,将会收到许多好处• 为此给出一些结果•

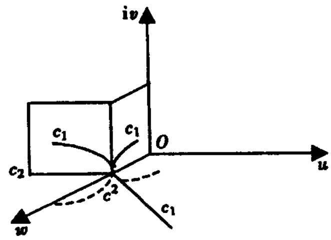

图 5 c_1, c_2 在 Ω_ 空间中的映射

例如以泊松方程为例•

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = -\omega \tag{7}$$

令速度场为 $q(x,y,z)=(u,w)+\mathrm{i}v$, 设势函数为 $k=\Phi+\psi+\mathrm{i}\varepsilon$, 这儿 u、w、v、Φ、ψ、ε 均为 x、y、z 的实函数• 由于

$$f' = (\xi,\zeta)+\mathrm{i}\eta = (h_\xi, h_\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta+\gamma)}, \quad q = \nabla k = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial z}\right)k + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}k,$$

则可得:

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\Phi+\frac{\partial}{\partial x}\varphi+\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon, \quad w = \frac{\partial}{\partial x}\Phi+\frac{\partial}{\partial x}\varphi+\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon,$$

$$v = \frac{\partial}{\partial y}\Phi+\frac{\partial}{\partial y}\varphi-\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon = \frac{\partial}{\partial y}\Phi+\frac{\partial}{\partial y}\varphi-\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon,$$

可导出: $q_\vartheta = \nabla_\vartheta k = \left(\frac{\partial}{\partial \xi},\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)k - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \eta}k, \Rightarrow q = (h_\xi, h_\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta\delta,\theta\gamma)} q_\vartheta,$

设 $\nabla\cdot q = \lambda$, 则 $\nabla\times q = \omega, \Rightarrow \nabla^2\Phi = \lambda_\xi,\ \nabla^2\psi = \lambda_\zeta,\ \nabla^2\varepsilon = -\omega, \Rightarrow$

$$\nabla_\vartheta\cdot q_\vartheta = \nabla_\vartheta^2(\Phi,\psi) = (\lambda_\xi/h_\xi^2, \lambda_\zeta/h_\zeta^2),\ \nabla_\vartheta\times q_\vartheta = -\nabla_\vartheta^2\varepsilon = (\omega/h_\xi^2, \omega/h_\zeta^2) \Rightarrow$$

$$q(\vartheta) = -\int_R \lambda_0 Q\,\mathrm{d}R_0 - \int_R \omega_0\times Q\,\mathrm{d}R_0 + \int_B [(q_0\cdot n_0)Q - (q_0\times n_0)\times Q]\,\mathrm{d}B_0,$$

这里 $Q(\vartheta,\vartheta_0) = -(\vartheta-\vartheta_0)/(4\pi|\vartheta-\vartheta_0|^2)$, $h_\xi, h_\zeta, \lambda_\xi, \lambda_\zeta$ 为坐标变换系数,通常是非线性的系数,它随划分网格点位置不同而不同; $\boldsymbol{n}_0$ 为边界外法线单位矢量• 这样,边界元_边界积分方程在正交双复数空间中表达为:

$$q_\vartheta(j) = -\int_{R_j}\frac{\lambda_{j_0}\nabla Q_{j_0}}{h_{j_0}^2}\mathrm{d}j_0 - \int_{R_j}\frac{\omega_{j_0}\times Q_{j_0}}{h_{j_0}^2}\mathrm{d}j_0 - \int_{R_s}\frac{\lambda_{s_0}\nabla Q_{s_0}}{h_{j_0}^2}\mathrm{d}R_0 - \int_{R_s}\frac{\omega_{s_0}\nabla Q_{s_0}}{h_{j_0}^2}\mathrm{d}R_0 +$$
$$\int_{B_J}[(q_{j_0}\cdot \boldsymbol{n}_{j_0})Q_J - (q_{j_0}\times n_{j_0})\times Q_j]\,\mathrm{d}B_0, \tag{8}$$

这儿, $Q_J(j,j_0) = -(j-j_0)/(2\pi|j-j_0|^2)$ 为格林函数,其中 $j=(\xi,\zeta)$, $j_0=(\xi_0,\zeta_0)$• R_s 为 (x,y) 平面内的投影边界, R_j 为正交的两个复平面内的边界, B 为区域内部•

由此可以将三维流体问题导入到正交双复数空间,利用空间保角变换理论变换到两个复平面上进行边界积分运算,求得明确数值解• 但是要将上述方程(8)进行数值求解,尚需具体求出相应的变换系数,并要确定计算网格的选择,而这些网络在映射中通常具有某些非线性特

性, 这从保角映射的实例中可以看出•

5 结 论

从上述分析可知, 正交双复数及其双复变函数的概念具有较优越的特性, 所使用的标记符号 $\vartheta = (x, z) + iy$, 对于定义它的运算规则及空间变换是方便适用的; 分析表明, 正交双复数及其复函数和平面复数及其复变函数的特性相近; 利用这种变换可以将三维流体及其他相关问题变换到空间正交的两个复平面上进行求解, 从而较好地利用平面复数的现有特性表达和计算• 该方法进一步完善, 将能有效地把一维复数推广到三维空间, 并为物理问题的求解提供新方法和新手段• 本变换要用于计算机求解, 尚需解决映射网格的计算生成变换中的非线性等问题• 本文的方法值得进一步深入研究•

[参 考 文 献]

[1] Wu J C. Boundary element solution of viscous flow problems[A]. In: BET Ed. Proceedings of the 3rd International Conference on Boundary Element Technology [C], London: Elsever Applied Science, 1987, 467—473.

[2] Wang C W, Wu J C. Numerical solution of Navier_Stokes problem using integral representations with series expansions[J]. AIAA Journal, 1986, (8): 1305—1312.

[3] Mandell M A, Mya J P, Schvede S, et al. Model categories of diagram spectra[J]. Proceedings of London Mathematical Society, 2001, **82**(2): 72—81.

[4] Herbert Reismann. Three_dimensional finite inextensional deformation of a beam[J]. International Journal of Non_Linear Mechanics, 2000, **35**: 157—165.

[5] 梁昆淼. 数学物理方法[M]. 北京: 人民出教育版社, 1979, 4—61.

[6] 华罗庚. 高等数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 1979, 190—209.

Fluid Boundary Element Method and Orthogonal Transform of Double Complex Variables

LUO Yi_ying

(Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: A concept of orthogonal double complex variables space was put forward, Its corresponding operation rules, the concept of analytic function and conformal transform and its foreground for application of fluid boundary element method are explained. The results indicate that the concept and special mark may develop the plane complex into space, and extensive application in physics is got.

Key words: orthogond double complex variable; space of double complex variables; space conformal transform; boundary element method of fluid