

文章编号: 1000-0887(2003) 01-0067-07

复数阶开关广义 Mandelbrot 集*

王兴元

(大连理工大学 电子与信息工程学院, 大连 116024)

(张石生推荐)

摘要: 基于作者提出的开关复映射, 阐述了开关广义 Mandelbrot 集(简称开关广义 M 集)的构造方法, 并构造出一系列复数阶的开关广义 Mandelbrot 集. 通过分析广义 M 集的构造算法, 阐述了广义 M 集的结构特点. 在此基础上对在开关映射作用下复 C 平面上初始点的轨道进行了研究, 发现开关广义 M 集具有分形结构, 其结构特征依赖于复指数 w 及开关变量 r_0 , 其断裂的原因是主幅角选取的不连续性.

关键词: 复映射; 开关广义 M 集; 分形; 演化

中图分类号: TP301.5; 文献标识码: A

引言

在参数平面上由复映射 $z \leftarrow z^2 + c$ 所构造的 M 集, 经过人们近二十年的深入研究, 已发现其中深藏着规律性的结构, 从而丰富了分形理论^[1]. 1987 年和 1991 年, Lakhtakia 和 Gujar 先后研究了 $z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in \mathbf{R}^1)$ 的广义 M 集, 并基于广义 M 集的结构特征提出了几点假设^[2,3]; 在此基础上作者从理论上探讨了 $\alpha \in \mathbf{R}^1$ 时广义 M 集的分形结构, 给出广义 M 集的嵌套拓扑分布定理和裂变演化规律^[4-6]. 联想具有分形吸引子的简单动力系统——“面包师的”变换为一个简单的开关映射^[7], 作者试图探讨由开关映射所构造的广义 M 集会出现什么图形? 它们又将给我们什么启迪? 为此作者提出了开关复映射, 阐述了复映射 $z \leftarrow z^w + c (w \in \mathbf{C})$ 的开关广义 M 集的构造方法, 并构造出一系列复数阶开关广义 M 集, 研究了开关广义 M 集的结构特征及演化过程.

1 理论与方法

复映射 $f: z \leftarrow z^w + c (w = \alpha + i\beta; \alpha, \beta \in \mathbf{R}^1)$ 的临界点是使其一阶导数为零的点. 由于 $f'(z) = wz^{w-1}$, 故 f 的临界点应满足 $wz^{w-1} = (\alpha + i\beta)z^{(\alpha-1)+i\beta} = 0$. 若 $w \neq 0$, 则

* 收稿日期: 2000_12_10; 修订日期: 2002_09_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69974008); 中国博士后科学基金及辽宁省自然科学基金资助项目(972194)

作者简介: 王兴元(1964—), 男, 辽宁宽甸人, 副教授, 博士, 主要研究方向为混沌与分形理论及其在生物医学工程中的应用(E-mail: wangxy@dlut.edu.cn).

$$\begin{cases} \alpha < 1, \text{ 临界点为 } z \rightarrow \infty, \\ \alpha = 1, \text{ 无临界点,} \\ \alpha > 1, \text{ 临界点为 } z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

由复映射 $f: z \leftarrow z^w + c (w = \alpha + i\beta; \alpha, \beta \in \mathbf{R}^1)$ 构造广义 M 集, 应从 f 的临界点开始迭代, 可当 $\alpha > 1$ 时, 若取 $z_0 = 0$, 则 $z_1 = c, z_2 = c^w + c, \dots$; 当 $\alpha < 0$ 时, 若取 $z_0 = \infty$, 则 $z_1 = c, z_2 = c^w + c, \dots$ 因此为避免计算机溢出, 可选取迭代初始点 $z_0 = c$, 这使得用计算机构造任意复指数 $w = \alpha + i\beta; \alpha, \beta \in \mathbf{R}^1$ 且 $\alpha \notin [0, 1]$ 的广义 M 集的操作得到了统一. 值得注意的是, 当 $\alpha \in [0, 1]$ 时, 仍用 c 作为初始点迭代, 得到的图像不是真正的广义 M 集. 这是因为: $\alpha = 1$ 时, 因为无临界点, 所以也就谈不上临界点的轨道; $0 \leq \alpha < 1$ 时, 临界点 ∞, ∞ 的轨道上没有参数 c , 所以从 c 开始迭代的图像不是广义 M 集.

基于构造广义 M 集的反射射 f , 作者给出构造开关广义 M 集的开关复映射如下

$$\begin{cases} z_{n+1} = f(z_n) = (z_n)^{w_f} + c, & |z_n| \leq r_0, \\ z_{n+1} = g(z_n) = (z_n)^{w_g} + c, & |z_n| > r_0 \end{cases} \quad (2)$$

式中 $w_f, w_g \in \mathbf{C}$ 且 $\operatorname{Re}(w_f) \notin [0, 1], \operatorname{Re}(w_g) \notin [0, 1], r_0$ 为复映射 f 与 g 之间的开关变量.

定义 1 设 $\varphi(z)$ 代表式(2), 为黎曼球 C 上的复映射, \mathcal{U} 表示 C 中 c 点的轨道有界的复数 c 的集合, 即

$$\mathcal{U} = \{c \in \mathbf{C}: \{\varphi^k(c)\}_{k=1}^{\infty} \text{ 有界}\}.$$

则称 \mathcal{U} 为相应于 φ 的开关广义 M 集. 该定义利用了函数族 c 点的迭代特征, 这正是构造开关广义 M 集逃逸时间算法的出发点^[4]. 下面给出构造开关广义 M 集的方法:

(i) 对于开关映射(2), 设定开关变量 r_0 , 视窗 W 及逃逸半径 R 和逃逸时间限制 N ;

(ii) 设函数 $\varphi(z)$ 代表开关映射(2), 且满足

$$\varphi^k(z) = \begin{cases} f(\varphi^{k-1}(z)), & |\varphi^{k-1}(z)| \leq r_0 \\ g(\varphi^{k-1}(z)), & |\varphi^{k-1}(z)| > r_0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (3)$$

定义逃逸时间函数

$$T(x) = \begin{cases} k, & |\varphi^k(x)| \geq R \text{ 或 } |\varphi^k(x)| < R \quad (i = 1, 2, \dots, k-1; k \leq N), \\ 0, & |\varphi^k(x)| < R \quad (i = 1, 2, \dots, N); \end{cases} \quad (4)$$

(iii) 对视窗内的点 c_0 计算 $T(c_0)$;

(iv) 如果 $T(c_0) = 0$, 则 $c_0 \in \mathcal{U}$; 如果 $T(c_0) \neq 0$, 则 $c_0 \notin \mathcal{U}$;

(v) 重复过程 (iii) ~ (iv), 直到穷尽视窗 W 内所有的点, 即可获得开关广义 M 集.

定理 1 由复映射 $f: z \leftarrow z^w + c (w = \alpha + i\beta)$ 构造广义 M 集, 当选取主幅角 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 时, 有

$$f_u^k(c) = \overline{f_w^k(C)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N).$$

证明 利用数学归纳法, 令 $\theta_c \in [-\pi, \pi)$ 为复数 c 的主幅角, $|c|$ 为 c 的模, 则 $c = |c| e^{i\theta_c}, \bar{c} = |c| e^{-i\theta_c}$. 因为 $c = \exp[\ln c] = \exp[\ln |c| + i\theta_c]$, 故可得

$$\begin{aligned} f_u^1(c) &= c^w + c = c^{\alpha + i\beta} + c = \exp[(\alpha \ln |c| - \beta \theta_c) + i(\beta \ln |c| + \alpha \theta_c)] + c, \\ f_w^1(c) &= \bar{c}^w + \bar{c} = \exp[(\alpha \ln |c| - \beta \theta_c) - i(\beta \ln |c| + \alpha \theta_c)] + \bar{c}. \end{aligned} \quad (5)$$

所以,

$$f_w^{-1}(c) = \overline{f_w^{-1}(c)}, \tag{6}$$

设 $f_w^{k-1}(c) = \overline{f_w^{k-1}(c)}$ 成立,

$$\text{则有 } f_w^k(c) = f_w^{k-1}[f_w^{-1}(c)] = f_w^{k-1}[\overline{f_w^{-1}(c)}] = \overline{f_w^{k-1}[f_w^{-1}(c)]} = \overline{f_w^k(c)}. \tag{7}$$

故命题真. 该定理表明复指数 $w = \alpha + i\beta$ 的广义 M 集以 x 轴为轴翻转 180° 后即得复指数 $w = \alpha - i\beta$ 的广义 M 集; 反之亦然.

选取逃逸半径 $R = 30$, 逃逸时间限制 $N = 100$, 作者绘制了开关广义 M 集. 为探讨开关广义 M 集的分形结构, 作者首先从理论上研究了广义 M 集的结构特征. 令 $w = \pm\alpha \pm i\beta$, 其中 α, β 皆为正实数. 根据定理 1 及图形结构特点, 可分 $w = \pm(\alpha + i\beta)$ 两种情况来研究.

2 结果与分析

2.1 广义 M 集

图 1 为复数阶的广义 M 集. $w = \alpha + i\beta$ 时, 图中黑色为稳定区 \mathcal{S} , 白色为逃逸区 \mathcal{A} (图 1(a) 和 1(b)); α 固定, 随着 β 值的增大, \mathcal{S} 沿负实轴上方不断扩张的同时, 又沿负实轴下方不断向原点收缩, 逐渐形成排列在实轴上方的花瓣串, 一端在原点附近, 此处花瓣最小, 另一端在负实轴上, 此处花瓣大, 且两端不断出现新花瓣. $w = -(\alpha + i\beta)$ 时, 图中黑色为逃逸区 \mathcal{S} , 白色为稳定区 \mathcal{A} (图 1(c) 和 1(d)); α 固定, 随 β 值的增加, \mathcal{S} 在负实轴上方不断扩张, 逐渐演变成成为排列在实轴上方的星群结构, 它的一端在原点附近, 此处卫星群最小, 另一端在负实轴上最远处, 此处卫星群最大, 且两端不断出现新卫星群. 由图 1 可见广义 M 集在负实轴上出现了断裂.



(a) (b) (c) (d)

图 1 广义 M 集

((a) $w = 3 + 0.5i$, (b) $w = 5.5 + 2i$, (c) $w = -3 - 0.5i$, (d) $w = -5 - 3.8i$)

对广义 M 集的结构特征可作如下分析: 由复映射

$$z \leftarrow z^w + c (w = \alpha + i\beta; \alpha, \beta \in \mathbf{R}^1). \tag{8}$$

构造广义 M 集, 对 z^w 的计算, 采用了 $z = \exp[\ln z] = \exp[\ln |z| + i\theta]$ 这一方法, 这里 θ 表示复数 z 的主幅角, $|z|$ 为 z 的模. 这样有

$$z^w = \exp[\alpha \ln |z| - \beta \theta] [\cos(\beta \ln |z| + \alpha \theta) + i \sin(\beta \ln |z| + \alpha \theta)]. \tag{9}$$

作者选取 z 的主幅角: $\theta \in [-\pi, \pi)$. 如果 c 为较小的复数, 则复 C 平面上 z 点按式(8) 迭代所得下一点的模可近似表示为

$$|z^w| = \exp[\alpha \ln |z| - \beta \theta]. \tag{10}$$

当 $\alpha > 0$ 时, 若 $|z| < 1$, 则 $\alpha \ln |z| < 0$, 故 $|z^w|$ 较小, 根据逃逸时间算法, 可知原点及其小邻域中的点应属于 \mathcal{S} . 如果 $\beta > 0$, 若 $\theta \in [-\pi, 0)$, 则 $\beta \theta < 0$, $|z^w|$ 较大; 若 $\theta \in [0,$

π), 则 $\beta_2 > 0$, $|z^w|$ 较小. 由逃逸时间算法, 可知广义 M 集的 \mathcal{B} 主要位于实轴上方, 且在负实轴上方一端的花瓣最大, 在原点一端的花瓣最小(图 1(c) 和 1(d)). 如果 $\beta > 0$, 仿上类推, 广义 M 集的 \mathcal{B} 主要位于实轴下方, 且在负实轴下一端的花瓣最大, 在原点一端的花瓣最小.

当 $\alpha < 0$ 时, 若 $|z| < 1$, 则 $\alpha \ln|z| > 0$, 故 $|z^w|$ 较大, 根据逃逸时间算法, 可知原点及其小邻域中的点应属于 \mathcal{B} . 如果 $\beta < 0$, 若 $\theta \in [0, \pi)$, 则 $\beta\theta < 0$, $|z^w|$ 较大; 若 $\theta \in [-\pi, 0)$, 则 $\beta\theta > 0$, $|z^w|$ 较小. 由逃逸时间算法, 可知广义 M 集的 \mathcal{B} 主要位于实轴上方, 且在负实轴上方一端的卫星群最大, 在原点一端的卫星群最小(图 1(e) 和 1(d)). 如果 $\beta > 0$, 仿上类推, 广义 M 集的 \mathcal{B} 主要位于实轴下方, 且在负实轴下方一端的卫星群最大, 在原点一端的卫星群最小.

另外在使用式(9)时, 若 $\beta \ln|z| + \alpha\theta$ 超出上述主幅角 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 的范围, 就要使 $\beta \ln|z| + \alpha\theta$ 加或减 2π 的整数倍来进行调整, 这就导致广义 M 集出现了断裂. 又由于主幅角 θ 的选取在负 x 轴处的不连续性, 导致了广义 M 集的断裂仅出现在负 x 轴处.

定理 2 由复映射 $f: z \leftarrow z^w + c (w \in \mathbf{C})$ 构造广义 M 集, 有

$$|f^k(c)| = \left| f^k \left[c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right] \right|$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, (|w-1|-1)).$$

证明 利用数学归纳法

$$\text{因为 } f^1 \left[c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right] = \left[c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right]^w + c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] =$$

$$\exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] (c^w \exp[i(2\pi j)] + c) = \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] (c^w + c),$$

$$\text{及 } f^{-1}(c) = c^w + c,$$

$$\text{所以 } |f^{-1}(c)| = \left| f^{-1} \left[c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right] \right|. \quad (11)$$

$$\text{设 } |f^{k-1}(c)| = \left| f^{k-1} \left[c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right] \right|. \quad (12)$$

$$\text{因为 } f^k \left[c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right] = f^{k-1} \left[f \left[c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right] \right] = f^{k-1} \left[\exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] (c^w + c) \right],$$

$$\text{令 } f^{-1}(c) = c^w + c = c', \text{ 则}$$

$$f^k \left(c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right) = f^{k-1} \left(c' \left[\exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right] \right) \text{ 而 } f^k(c) = f^{k-1} [f^{-1}(c)] = f^{k-1}(c'),$$

$$\text{由式(12)知: } |f^{k-1}(c')| = \left| f^{k-1} \left[c' \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right] \right|,$$

$$\text{所以 } |f^k(c)| = \left| f^k \left[c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \right] \right|. \quad (13)$$

故命题真. 该定理表明若 $c \in \mathcal{B}$, 则 $c \exp \left[i \frac{2\pi j}{w-1} \right] \in \mathcal{B}$. 故 w 为整数的广义 M 集的中心为原点, 且具有 $|w-1|$ 倍的旋转对称性.

2.2 开关广义 M 集

图 2 为由生成图 1 的四个复映射两两组合所构造的复数阶开关广义 M 集. 图 2(a) ~ 2(c)、2(f) 的黑色为稳定区 \mathcal{B} , 白色为逃逸区 \mathcal{B} ; 而图 2(d)、2(e)、2(g) 和图 2(h) 的黑色为逃逸区 \mathcal{B} , 白色为稳定区 \mathcal{B} . 由图 2(a) 可见在开关广义 M 集的边界处出现了断裂, 并产生了碎片,

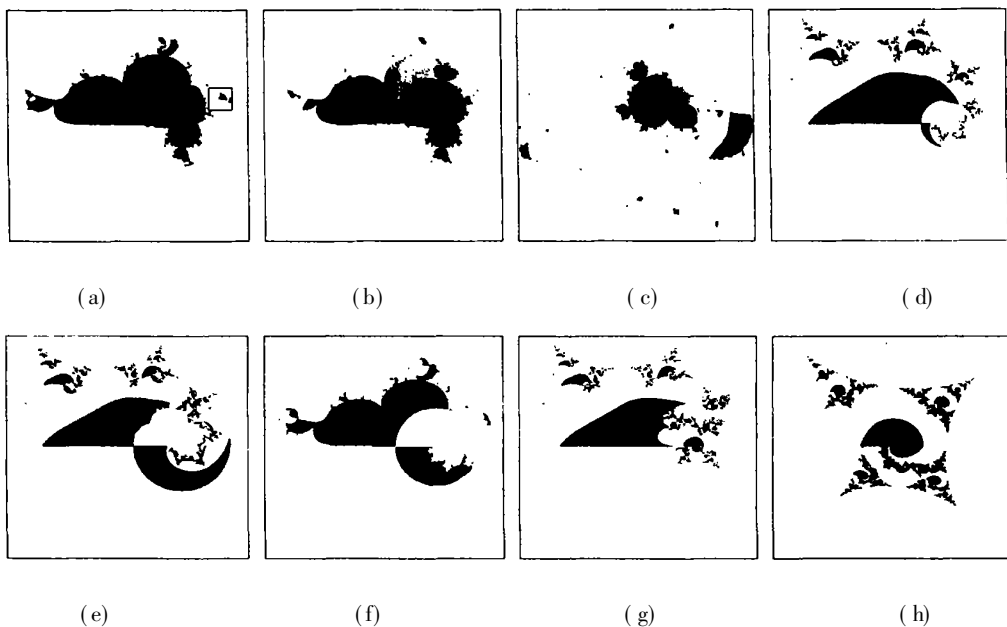


图 2 开关广义 M 集

((a) $w_f = 3 + 0.5i$, $w_g = 5.5 + 2i$, $r_0 = 1.0$; (b) $w_f = 3 + 0.5i$, $w_g = 5.5 + 2i$, $r_0 = 1.5$;
 (c) 图(a)中小方块部分放大 (d) $w_f = 5.5 + 2i$, $w_g = -5 - 3.8i$, $r_0 = 1.0$; (e) $w_f = 5.5 + 2i$,
 $w_g = -5 - 3.8i$, $r_0 = 2.0$; (f) $w_f = -5 - 3.8i$, $w_g = 5.5 + 2i$, $r_0 = 1.0$; (g) $w_f = -3 - 0.5i$,
 $w_g = -5 - 3.8i$, $r_0 = 2.0$; (h) $w_f = -5 - 3.8i$, $w_g = -3 - 0.5i$, $r_0 = 0.5$)

在低倍率情况下碎片似乎杂乱无章。然而，逐步提高放大倍率，就可发现碎片具有精细的分形结构(图 2(c))。这是开关广义 M 集的共性，而非图 2(a) 所独有，只不过碎片的精细结构因开关广义 M 集的阶次 w_f 和 w_g 的不同有所变化而已。

根据开关映射(2)，可推出复 C 平面上从 z_0 点出发的轨道为

$$z_1 = \begin{cases} f(z_0), & |z_0| \leq r_0, \\ g(z_0), & |z_0| > r_0; \end{cases} \quad (14)$$

$$z_2 = \begin{cases} f^2(z_0), & |z_0| \leq r_0 \text{ 且 } |f(z_0)| \leq r_0, \\ g(f(z_0)), & |z_0| \leq r_0 \text{ 且 } |f(z_0)| > r_0, \\ f(g(z_0)), & |z_0| > r_0 \text{ 且 } |g(z_0)| \leq r_0 \\ g^2(z_0), & |z_0| > r_0 \text{ 且 } |g(z_0)| > r_0 \end{cases} \quad (15)$$

$$z_3 = \begin{cases} f^3(z_0), & |z_0| \leq r_0, |f(z_0)| \leq r_0 \text{ 且 } |f^2(z_0)| \leq r_0, \\ g(f^2(z_0)), & |z_0| \leq r_0, |f(z_0)| \leq r_0 \text{ 且 } |f^2(z_0)| > r_0, \\ f(g(f(z_0))), & |z_0| \leq r_0, |f(z_0)| > r_0 \text{ 且 } |g(f(z_0))| \leq r_0, \\ g^2(f(z_0)), & |z_0| \leq r_0, |f(z_0)| > r_0 \text{ 且 } |g(f(z_0))| > r_0, \\ f^2(g(z_0)), & |z_0| > r_0, |g(z_0)| \leq r_0 \text{ 且 } |f(g(z_0))| \leq r_0, \\ g(f(g(z_0))), & |z_0| > r_0, |g(z_0)| \leq r_0 \text{ 且 } |f(g(z_0))| > r_0, \\ f(g^2(z_0)), & |z_0| > r_0, |g(z_0)| > r_0 \text{ 且 } |g^2(z_0)| \leq r_0, \\ g^3(z_0), & |z_0| > r_0, |g(z_0)| > r_0 \text{ 且 } |g^2(z_0)| > r_0; \end{cases} \quad (16)$$

定义 1 表明开关广义 M 集是指使这一迭代序列 $z_0, z_1, z_2 \dots$ 有界的复数 z_0 的集合。令 $w_f = \alpha_f + i\beta_f, w_g = \alpha_g + i\beta_g$, 从上述分析可知当 $\alpha_f > 0$ 和 $\alpha_g > 0$ 时, 若 z_0 表示原点或其小邻域中的一点, 则 z_0 的轨道应为 $z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots$; 若 z_0 表示距原点的距离大于 1 并远大于 r_0 的点中的一点, 则 z_0 的轨道应为 $z_0, g(z_0), g^2(z_0), \dots$ 。故根据定理 1, 可知此时开关广义 M 集的中心区域具有 $|w_f - 1|$ 倍的旋转对称性, 而远离原点的外环区域则具有 $|w_g - 1|$ 倍的旋转对称性(图 2(a) 和 2(b))。当 $\alpha_f > 0$ 和 $\alpha_g < 0$ 时, 则原点或其小邻域中的点 z_0 的轨道应为 $z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots$; 距原点的距离大于 r_0 的外环中的点 z_0 的轨道应为 $z_0, g(z_0), \dots, f(g^m(z_0)), \dots$ (m 为整数且 $m \geq 1$)。此时开关广义 M 集仅中心区域具有 $|w_f - 1|$ 倍的旋转对称性(图 2(d) 和 2(e))。当 $\alpha_f < 0$ 和 $\alpha_g > 0$ 时, 则原点或其小邻域中的点 z_0 的轨道应为 $z_0, g(z_0), g^2(z_0), \dots$ 。此时开关广义 M 集仅外环区域具有 $|w_g - 1|$ 倍的旋转对称性(图 2(f))。当 $\alpha_f < 0$ 和 $\alpha_g < 0$ 时, 则原点或其小邻域中的点 z_0 的轨道应为 $z_0, f(z_0), \dots, g(f^p(z_0)), \dots$ (p 为整数且 $p \geq 1$); 距原点的距离大于 r_0 的外环中的点 z_0 的轨道应为 $z_0, g(z_0), \dots, f(g^q(z_0)), \dots$ (q 为整数且 $q \geq 1$)。此时开关广义 M 集部分区域不具有旋转对称性(图 2(g) 和 2(h))。另外也可推出 r_0 越大, 开关广义 M 集与式(2) 的第一式所构造的广义 M 集越相似; 反之则与式(2) 的第二式所构造的广义 M 集越相似(图 2(a) 和图 2(b)、图 2(d) 和图 2(e))。

构造开关广义 M 集时, 对式(2) 中的 z^{w_f} 和 z^{w_g} 的计算, 同样采用了式(9), 这就涉及主幅角范围的选取, 作者选取主幅角: $\theta \in [-\pi, \pi)$, 根据前面分析可知, 这将导致开关广义 M 集在负实轴处出现断裂(图 2)。

3 结 论

令 V_f 和 V_g 分别表示复 C 平面 $|z| \leq r_0$ 和 $|z| > r_0$ 的区域, 当 $\alpha_f > 0$ 和 $\alpha_g > 0$ 时, 根据上述对 z_0 点轨道的分析, 可得出如下结论:

- (i) 存在于 V_f 内的映射 f 的稳定区, 在由映射式(2) 所构造的开关广义 M 集中再次准确出现。
- (ii) 存在于 V_g 内的映射 g 的稳定区, 在由映射式(2) 所构造的开关广义 M 集中再次准确出现。
- (iii) 如在映射 g 的作用下, 点 $z_{0g} \in V_g$ 的轨道趋于无穷, 则在映射式(2) 的作用下, 点 z_{0g} 的轨道将不穿过圆 $|z| = r_0$, 而趋于无穷。
- (iv) 如在映射 f 的作用下, 点 $z_{0f} \in V_f$ 的轨道趋于无穷, 则该轨道一定于某点 z' 处穿过圆 $|z| = r_0$ 。如 $f(z') \in V_g$ 且 $f(z')$ 满足 (iii) 中 z_{0g} 所需的条件, 则在映射式(2) 的作用下, z_{0f} 的轨道也将趋于无穷。
- (v) 复 C 平面上其它初始点, 在映射式(2) 的作用下, 其轨道是很复杂的, 一些点的轨道可能穿过圆 $|z| = r_0$ 数次后, 才趋于无穷, 或最终被稳定区所俘获。在该情况下, z_0 点的轨道在圆 $|z| = r_0$ 内外跳跃, 而引起映射 f 和 g 相互替换, 这可能对人口学家研究人口变化规律有所启迪。

对 $\alpha_f > 0$ 和 $\alpha_g < 0$, $\alpha_f < 0$ 和 $\alpha_g > 0$, $\alpha_f < 0$ 和 $\alpha_g < 0$ 时的情况, 可模仿上述分析, 得出结论, 故不再赘述。

[参 考 文 献]

- [1] Peitgen H O, Saupe D. The Science of Fractal Images [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 137—218.
- [2] Lakhtakia A, Varadan V V, Messier R, et al. On the symmetries of the Julia sets for the process $z \leftarrow z^p + c$ [J]. J Phys A: Math Gen, 1987, 20: 3533—3535.
- [3] Gujar U G, Bhavsar V C, Vangala N. Fractals images from $z \leftarrow z^a + c$ in the complex z -plane [J]. Computers & Graphics, 1992, 16(1): 45—49.
- [4] WANG Xing_yuan, LIU Xiang_dong, ZHU Wei_yong, et al. Analysis of C -plane fractal images from $z \leftarrow z^a + c$ for $a < 0$ [J]. Fractals, 2000, 8(3): 307—314.
- [5] 王兴元, 刘向东, 朱伟勇. 由复映射 $z \leftarrow z^a + c$ ($a < 0$) 所构造的广义 M 集的研究 [J]. 数学物理学报, 1999, 19(1): 73—79.
- [6] 王兴元, 刘向东, 朱伟勇. 广义 M 集演化的研究 [J]. 东北大学学报(自然科学版), 1999, 20(4): 355—358.
- [7] Falconer K J. 分形几何——数学基础及其应用 [M]. 曾文曲, 刘世耀译. 沈阳: 东北大学出版社, 1991. 238—245.

Switched Processes Generalized Mandelbrot Sets for Complex Index Number

WANG Xing_yuan

(School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: According to the switched complex mapping proposed by the author, the method constructing the switched processes generalized M (Mandelbrot) sets was elaborated, and a series of the switched processes generalized M sets for complex index number were constructed. The construction characteristics of the generalized M sets were expounded according to the analysis of the algorithm constructing the generalized M sets. On the basis of what has already been achieved, the trajectories of a starting point in the complex C -plane under the switched mapping were researched into. The results show that the switched processes generalized M sets have the fractal feature. The construction characteristics of the switched processes generalized M sets are dependent on the complex index number w and the switched variable r_0 , and the reason which results in the discontinuity of the switched processes generalized M sets is the discontinuity of choice of the principal range of the phase angle.

Key words: complex mapping; switched processes generalized M sets; fractal; evolution