应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 01_0062_05

Birkhoff 系统的 Poincar _Cartan 积分不 变 量*

郭永新[1], 尚 玫[2], 罗绍凯[3]

(1. 辽宁大学 物理系 沈阳 110036 2. 北京理工大学 应用力学系 北京 10081
3. 长沙大学 数学力学与数学物理研究所 长沙 410003)

(林宗池推荐)

摘要: 基于现代微分几何学, 分析了作为保守系统和非保守系统的推广——Birkhoff 系统的辛结构· 构造 Birkhoff 系统的 Poincar _Cartan 积分不变量· 最后, 将一维阻尼振动作为示例, 求出其 Poincar 积分不变量·

关 键 词: Birkhoff 系统; 辛结构; 自伴随; Poincar _Cartan 积分不变量
中图分类号: O316; O186 文献标识码: A

引 言

Poincar _Cartan 积分不变量理论在物理学、力学领域有重要的应用· 但长期以来, 人们一直认为这一理论仅适用于 Hamilton 系统, 而非 Hamilton 系统不存在积分不变量, 只有积分不变关系[1~ 3]· 文献[4~ 6] 对 Poincar _Cartan 积分不变量理论作了有限推广· 事实上, 动力学系统的积分不变量与动力学系统的辛结构是紧密相关的, 辛结构不仅存在于 Hamilton 系统, 而且存在于 Birkhoff 系统· Birkhoff 系统的动力学理论不仅适于保守系统, 而且适于非保守系统, 它保持了 Lie 代数、辛几何、变分原理的共栖特性[7~ 10]· 因此, 在这种系统的动力学空间上必将存在 Poincar _Cartan 积分不变量· 由于动力学系统的 Birkhoff 表述具有直接普适性, 因而相应的积分不变量也具有同样的普适性·

1 Birkhoff 系统的辛结构

对 Lagrange 逆问题的研究表明, 实验室坐标和时间变量下的 Lagrange 表述和 Hamilton 表述不具有直接的普适性, 所以需要将 Lagrange 逆问题推广到 Birkhoff 逆问题· 任何 n 维二阶解析、正规动力学系统总可以约化为等价的 $2n$ 维一阶形式[7~ 10]·

$$\dot{a}^{\mu} - \Xi^{\mu}(t, \boldsymbol{a}) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

* 收稿日期: 2001_02_10; 修订日期: 2002_07_30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10175032); 辽宁省自然科研基金资助项目(002083); 河南省自然科学基金资助项目(998040080); 辽宁省教育厅科研基金资助项目(990111004, 20021004)
作者简介: 郭永新(1963—), 男, 博士(后), 教授(E_mail: guoyongxin@hotmail.com)·

其中 $a^{\mu}=(r^{\mu}, y^{\mu}(t, \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}))$• 根据Cauchy_Kovalevski 定理, 在实验者的时空变量的正规点的可缩区域内, 该系统总有一个 Birkhoff 表示:

$$\left[\frac{\partial R_{\nu}(t, \boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}(t, \boldsymbol{a})}{\partial a^{\nu}}\right] \dot{a}^{\nu}-\left[\frac{\partial B(t, \boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}(t, \boldsymbol{a})}{\partial t}\right]=0 \tag{2}$$

Birkhoff 函数 $B(t, \boldsymbol{a})$ 可以取为该系统最大自伴随子系统的总能量, 它仅与有势力相关, 而所有非有势力的动力学特性都包含在下述协变辛张量之中

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_{\nu}(t, \boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}(t, \boldsymbol{a})}{\partial a^{\nu}} \tag{3}$$

与 Hamilton 系统不同, 变量 a^{μ} 所表示的动力学空间不必是相空间, 它具有一般的辛结构, 即 $\Omega_{\mu\nu} \neq \omega_{\mu\nu}$•

在 $(2n+1)$ 维流形 $\mathbf{R} \times T^{*} M$($M$ 为位形流形) 上构造一个具有最大秩的、闭的 2_形式:

$$\Omega=\Omega_{\mu\nu}(\hat{\boldsymbol{a}}) \mathrm{d} \hat{a}^{\mu} \wedge \mathrm{d} \hat{a}^{\nu} \qquad (\mu, \nu=0,1,2, \ldots, n), \tag{4}$$

其中 $\Omega_{\mu\nu}=\Omega_{\mu\nu}$, $\Omega_{0\nu}=-\Omega_{\mu\nu} \Xi^{\mu}=-\Omega_{\nu 0}$, $\hat{a}^{\mu}=(t, r^{\mu}, y^{\mu})$• 由于 Ω 是闭的, 故 $\Omega_{\mu\nu}$ 满足自伴随条件[7~10]• 根据 Poincar 引理的逆命题, 可以在 $\mathbf{R} \times T^{*} M$ 的可缩区域上引入一个满足 $\Omega=\mathrm{d} \boldsymbol{R}$ 的 1_形式 $\boldsymbol{R}$, 由于 Birkhoff 系统的动力学空间一般不是相空间, 所以相应的 1_形式 R 亦不是接触流形上的正则 1_形式• 在局部坐标下,

$$\boldsymbol{R}=R_{\mu}(\hat{\boldsymbol{a}}) \mathrm{d} \hat{a}^{\mu}=R_{\mu}(t, \boldsymbol{a}) \mathrm{d} a^{\mu}-B(t, \boldsymbol{a}) \mathrm{d} t, B(t, \boldsymbol{a})=R_{0}(t, \boldsymbol{a}), \tag{5a}$$

$$\Omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_{\nu}(t, \boldsymbol{a})}{\partial \hat{a}^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}(t, \boldsymbol{a})}{\partial \hat{a}^{\nu}}\right) \mathrm{d} \hat{a}^{\mu} \wedge \mathrm{d} \hat{a}^{\nu} \tag{5b}$$

定义 1.1　一般 Birkhoff 矢量场定义为接触流形 $\mathbf{R} \times T^{*} M$ 上的非自治矢量场 $\boldsymbol{X}$, 它满足

$$i_{X} \Omega=0, \quad \mathrm{d} t(\boldsymbol{X})=1 \tag{6}$$

这是非自治 Birkhoff 方程(2) 的整体表述• 在局部坐标下,

$$\boldsymbol{X}=\frac{\partial}{\partial t}+\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{a}^{\mu}}-\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mu}}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial a^{\nu}} \tag{7}$$

尽管 Birkhoff 方程与 Hamilton 方程的整体表述形式相同, 但是在局部上, 一般无法实现对该系统的 Hamilton 描述, 除非该系统退化为 Hamilton 系统• 正是通过理论的局部描述, 才确定了通常的 Hamilton 方程描述动力学系统的局限性•

2　Birkhoff 系统的 Poincar _Cartan 积分不变量

根据接触流形 $\mathbf{R} \times T^{*} M$ 上的基本 2_形式 Ω 的封闭性和 Birkhoff 方程的整体描述可知, Ω 是 Birkhoff 矢量场 $\boldsymbol{X}$ 的不变 2_形式, 即 $L_{X} \Omega=i_{X} \mathrm{d} \Omega+\mathrm{d} i_{X} \Omega=0$• 由 Ω 的局部恰当性可得 $\mathrm{d} L_{X} \boldsymbol{R}=L_{X} \mathrm{d} \boldsymbol{R}=L_{X} \Omega=0$, 这表明 1_形式 $\boldsymbol{R}$ 是 Birkhoff 矢场 $\boldsymbol{X}$ 的相对不变 1_形式•

定义 2.1　考虑 $c_{2} \in C_{2}(\mathbf{R} \times T^{*} M)$ 和 2_形式 $\boldsymbol{F} \in F^{2}(\mathbf{R} \times T^{*} M)$• 如果在 Birkhoff 系统动力学空间 2_链 c_{2} 上的积分 $\int_{c_{2}} \boldsymbol{F}$ 沿着 Birkhoff 矢量场 $\boldsymbol{X}$ 的积分曲线保持不变, 即 $\int_{c_{2}} \boldsymbol{F}=\int_{c_{2}^{\prime}} \boldsymbol{F}$(其中 $c_{2}^{\prime}$ 是 c_{2} 沿 $\boldsymbol{X}$ 的积分曲线的同胚变换), 则称 $\int_{c_{2}} F$ 为矢量场 $\boldsymbol{X}$ 定义的 Birkhoff 系统的绝对积分不变量•

命题 2.1　设 $c_{2} \in(\mathbf{R} \times T^{*} M)$, 当且仅当 $\Omega \in F^{2}(\mathbf{R} \times T^{*} M)$ 是矢量场 $\boldsymbol{X}$ 的不变形式时,

$\int_{c_2}\Omega$ 是 Birkhoff 系统的绝对积分不变量•

证明 设 ϕ_t 是Birkhoff矢量场 $\boldsymbol{X}$ 的积分曲线• 由于 Ω 是 Birkhoff 矢量场 $\boldsymbol{X}$ 的不变形式,所以 $L_X\Omega = \lim \frac{1}{t}((\phi_t)^*\Omega - \Omega) = 0$,即$(\phi_t)^*\Omega = \Omega$• 因此,

$$\int_{c'_2}\Omega = \int_{(\phi_t)^* c_2}\Omega = \int_{c_2}(\phi_t)^*\Omega = \int_{c_2}\Omega, \tag{8}$$

反之,如果上式成立,则对任意 ϕ_t,必有$(\phi_t)^*\Omega = \Omega$,从而 Ω 为Birkhoff矢量场 $\boldsymbol{X}$ 的不变2_形式• 证毕•

定义 2.2 设 $\gamma = \partial c_2$, $\gamma' = \partial c'_2$, $\theta \in F^1(R\times T^* M)$,如果积分$\oint_\gamma\theta$ 沿着 Birkhoff 矢量场 $\boldsymbol{X}$ 的积分曲线保持不变,即$\oint_\gamma\theta = \oint_{\gamma'}\theta$,则称$\oint_\gamma\theta$ 为 Birkhoff 系统的相对积分不变量•

如果 θ 是 Birkhoff 矢量场 $\boldsymbol{X}$ 的相对不变 1_形式,则 $\mathrm{d}\theta$ 为系统的绝对不变 2_形式• 根据 Stokes 定理,有

$$\oint_\gamma\theta = \int_{c_2}\mathrm{d}\theta = \int_{c'_2}\mathrm{d}\theta = \oint_{\gamma'}\theta, \tag{9}$$

反之,如果$\oint_\gamma\theta$ 为 Birkhoff 系统的相对积分不变量,则 $\mathrm{d}L_X\theta = 0$• 因此有如下命题:

命题 2.2 $\oint_\gamma\theta$ 为 Birkhoff 系统的相对积分不变量的充分必要条件是 θ 是 Birkhoff 矢量场 $\boldsymbol{X}$ 的相对不变 1_形式•

如上所述, $\boldsymbol{R} = R_\mu(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\mu - B(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}t$ 是$\boldsymbol{X}$ 的相对不变 1_形式,因此有如下推论:

推论 2.1 在接触流形 $\mathbf{R}\times T^* M$ 上,沿着 Birkhoff 系统积分曲线的流管,积分$\int_\gamma\boldsymbol{R}$ 对围绕环路的闭曲线 γ 的变化保持不变,即,

$$\oint_\gamma R_\mu(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\mu - B(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}t = \oint_{\gamma'} R_\mu(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\mu - B(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}t\text{•} \tag{10}$$

$\oint_\gamma R_\mu(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}a^\mu - B(t,\boldsymbol{a})\mathrm{d}t$ 称为 Birkhoff 系统的 Poincar _Cartan 积分不变量• 类似于 Hamilton 系统的正则变换,我们可以由微分同胚 $\phi_t: \mathbf{R}\times T^* M \rightarrow \mathbf{R}\times T^* M$ 来定义一个非接触的或非正则的 Birkhoff 变换,它保持 Poincar _Cartan 积分不变量不变• 综上所述,任意正规、光滑动力学系统的 Birkhoff 表示的直接普适性导致该系统动力学空间的辛结构的直接普适性,而这种普适性便决定了在所考虑的流形上总存在 Poincar _Cartan 积分不变量•

3 线性阻尼振子的 Birkhoff 表示与积分不变量

考虑线性阻尼振子

$$\ddot{x} + x + 2\lambda\dot{x} = 0 \qquad (\lambda = \mathrm{const},\ 0 < \lambda < 1)\text{•}$$

这个方程是非自伴随的,在通常意义下没有积分不变量[4]• 取 $a^1 = x$, $a^2 = \dot{x}$,则上述方程表示为 $\dot{a}^1 = a^2$, $\dot{a}^2 = -a^1 - 2\lambda a^2$,其解为

$$a^1 = c_1\mathrm{e}^{(-\lambda+\mathrm{i}\omega)t} + c_2\mathrm{e}^{(-\lambda+\mathrm{i}\omega)t}$$

$$a^2 = c_1(-\lambda + i\omega)e^{(-\lambda+i\omega)t} - c_2(\lambda + i\omega)e^{-(\lambda+i\omega)t},$$

其中 $\omega = \sqrt{1-\lambda^2}$. 取 Birkhoff 函数为系统的能量, 即 $B(t, \boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2]$, 利用 Santilli 第一种方法[7,8]可求得 Birkhoff 函数组

$$R_1(t, \boldsymbol{a}) = (2\lambda a^2 + a^1)e^{2\lambda t}/2\lambda - a^1 t =$$
$$c_1\left[\left(-\lambda + i\omega + \frac{1}{2}\lambda\right)e^{(\lambda+i\omega)t} - te^{(-\lambda+i\omega)t}\right] +$$
$$c_2\left[\left(-\lambda - i\omega + \frac{1}{2}\lambda\right)e^{(\lambda-i\omega)t} - te^{-(\lambda+i\omega)t}\right],$$
$$R_2(t, \boldsymbol{a}) = a^2 e^{2\lambda t}/2\lambda - a^2 t =$$
$$c_1\left[\left(\frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda t} - t\right)(-\lambda + i\omega)e^{(-\lambda+i\omega)t}\right] -$$
$$c_2\left[\left(\frac{1}{2}\lambda e^{2\lambda t} - t\right)(\lambda + i\omega)e^{-(\lambda+i\omega)t}\right].$$

令 $c_1 = \rho_0\cos\alpha$, $c_2 = \delta\rho_0\sin\alpha$, 其中 $\delta, \rho_0 = \text{const.}$, $0 < \alpha < 2\pi$. 则 Poincar 积分不变量为

$$\oint_\gamma R_1(t, \boldsymbol{a})\,da^1 + R_2(t, \boldsymbol{a})\,da^2 =$$
$$\int_0^{2\pi}\left[R_1(t, \boldsymbol{a})\frac{\partial a^1}{\partial\alpha} + R_2(t, \boldsymbol{a})\frac{\partial a^2}{\partial\alpha}\right]d\alpha =$$
$$\int_0^{2\pi} i\delta\rho_0^2\omega\,d\alpha - \int_0^{2\pi}\left[\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) - 2te^{-2\lambda t}\right]\delta\rho_0^2\cos 2\alpha\,d\alpha +$$
$$\int_0^{2\pi}\left\{\left[\left(\frac{1}{4\lambda}\right)\rho_0^2\left(\delta e^{-i2\omega t} + e^{i2\omega t}\right)\right] + \frac{1}{2}t\rho_0^2\left[e^{-2(\lambda-i\omega)t}(2\lambda(\lambda - i\omega) + 1)\right] = \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}t\delta^2\rho_0^2\left[e^{-2(\lambda+i\omega)t}(2\lambda(\lambda + i\omega) - 1)\right]\right\}\sin 2\alpha\,d\alpha = i2\pi\delta\rho_0^2\omega.$$

[参 考 文 献]

[1] 陈滨. 分析动力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.

[2] LIU Duan, LUO Yong, XIN Shen_yu. About the basic integral variants of holonomic nonconservative dynamical systems[J]. Acta Mechanica Sinica, 1991, **7**(2): 175—185.

[3] Marsden J E, Ratiu T S. Introduction to Mechanics and Symmetry[M]. New York: Springer Verlag, 1994.

[4] GUO Yong_xin, SHANG Mei, Mei Feng_xiang. Poincar _Cartan integral invariants of nonconservative dynamical systems[J]. Internat J Theoret Phys, 1999, **38**(3): 1017—1027.

[5] GUO Yong_xin, SHANG Mei, LUO Shao_kai, et al. Poincar _Cartan integral variants and invariants of nonholonomic constrained systems[J]. Intetnat J Theoret Phys., 2001, **40**(6): 1197—1205.

[6] 刘成群, 罗诗裕. 非保守系统的积分不变量及其在现代物理中的应用[J]. 应用数学与力学, 1985, **6**(10): 879—885.

[7] Santilli R M. Foundation of Theoretical Mechanics Ⅱ[M]. New York: Springer_Verlag, 1983.

[8] 梅凤翔. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1996.

[9] 梅凤翔. Birkhoff 系统动力学研究进展[J]. 力学进展, 1997, **27**(4): 436—446.

[10] MEI Feng_xiang. Lie symmetry and conservation law of Birkhoffian system[J]. Chinese Science Bulletin, 1994, **44**(4): 318—320.

Poincar _Cartan Integral Invariants of Birkhoffian Systems

GUO Yong_xin[1], SHANG Mei[2], LUO Shao_kai[3]

(1. Department of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China
2. Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China
3. Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics,
Changsha University, Changsha 410003, China)

Abstract: Based on modern differential geometry, the symplectic structure of a Birkhoffian system which is an extension of conservative and nonconservative systems is analyzed. An integral invariant of Poincar _Cartan's type is constructed for Birkhoffian systems. Finally, one_dimensional damped vibration is taken as an illustrative example and an integral invariant of Poincar 's type is found.

Key words: Birkhoffian systems; symplectic structure; self_adjiontness; Poincar _Cartan integral invariants