

文章编号: 1000-0887(2003) 01-0029-10

变系数对流_扩散方程的交替 分段 Crank_Nicolson 方法*

王文洽

(山东大学数学与系统科学学院, 济南 250100)

(云天铨推荐)

摘要: 对 Saul'yev 型格式中的对流项构造了一种新的离散化逼近形式, 进而给出了变系数对流_扩散方程的 Crank_Nicolson 方法. 这个方法是绝对稳定的. 数值实验表明该方法并行性好, 精度高, 宜于直接在并行计算机上使用.

关键词: 对流_扩散方程; 交替分段方法; Crank_Nicolson 格式; 非对称差分格式;
绝对稳定; 并行计算

中图分类号: O241 文献标识码: A

引 言

变系数对流_扩散方程的数值解法在非均匀介质中的热传导、粒子扩散等物理现象的研究中有广泛应用, 例如在盆地发育史数值模拟中古地热的传递就属于这类问题. 因此, 研究该问题的并行数值计算方法是现代科学飞速发展的需要, 有重要的科学意义和应用价值. D. J. Evans, 张宝琳等人对于抛物型方程的并行差分法做了许多研究工作^[1~7], 提出了一类交替分组显式(AGE)方法和交替分组显_隐(AGE_I)格式. 而关于交替分段 Crank_Nicolson 方法(ASC_N)的研究, 却仅限于扩散方程^[8~11]. 本文对对流项做了不同于文献[5~7]的处理, 并利用了第二类 Saul'yev 型非对称格式和具有二阶精度的 Crank_Nicolson 格式, 构造了具有并行本性的绝对稳定的 ASC_N 方法. 数值试验表明, 方法在精度和稳定性方面都取得了很好的效果.

我们考虑的问题是

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (0 < x < 1, 0 < t < T). \quad (1)$$

初始条件和边界条件是

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < 1), \quad (2)$$

$$u(0, t) = f_1(t), \quad u(1, t) = f_2(t) \quad (0 < t < T), \quad (3)$$

此处, $a(x)$ 满足

* 收稿日期: 2000_11_20; 修订日期: 2002_07_21

基金项目: 国家教育部博士点专项基金资助项目(97042202)

作者简介: 王文洽(1950—), 男, 山东阳谷县人, 教授. 主要研究方向为油水资源数值模拟, 微分方程数值解法及应用软件等(E_mail: wwqia@math.sdu.edu.cn).

$$0 < a_0 \leq a(x) \leq A_0 \quad (4)$$

1 交替分段 Crank_Nicolson 方法

首先将区域 $(0, 1) \times (0, T)$ 进行剖分, 记空间步长 $h = 1/m$, 时间步长为 Δt , m 是正整数, 节点 (x_i, t_n) 用 (i, n) 表示, $x_i = ih (i = 0, 1, \dots, m)$, $t_n = n\Delta t (n = 0, 1, \dots, [T/\Delta t])$, $t_{n+1/2} = t_n + \Delta t/2$.

为方便起见, 定义

$$\begin{aligned} \delta_x u_i^n &= (u_{i+1}^n - u_i^n)/h, \quad \delta_x u_i^n = (u_i^n - u_{i-1}^n)/h, \\ \delta_x u_i^n &= (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)/2h, \quad \delta_x u_i^n = (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})/2h, \\ \delta_x u_i^n &= (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^n)/2h, \quad \delta_x u_i^n = (u_i^{n+1} - u_i^n)/\Delta t \end{aligned}$$

在构造交替分段 Crank_Nicolson 方法时, 我们用到下面的逼近方程 (1) 的 Crank_Nicolson 差分格式和第二类 Saul'yev 型非对称格式^[12]:

Crank_Nicolson 格式:

$$\delta_x u_i^n + \frac{k}{2} (\delta_x u_{i+1}^{n+1} + \delta_x u_i^n) = \frac{1}{2} (\delta_x (a_{i-1/2} \delta_x u)_i^{n+1} + \delta_x (a_{i-1/2} \delta_x u)_i^n), \quad (5)$$

此处, $a_{i+1/2} = a(x_i + h/2)$, u_i^n 是要求的数值解, 记 $r = \Delta t/2h^2$, (5) 式可写成

$$\begin{aligned} -r(a_{i-1/2} + kh/2) u_{i-1}^{n+1} + (1 + r(a_{i-1/2} + a_{i+1/2})) u_i^{n+1} - r(a_{i+1/2} - kh/2) u_{i+1}^{n+1} = \\ r(a_{i-1/2} + kh/2) u_{i-1}^n + (1 - r(a_{i-1/2} + a_{i+1/2})) u_i^n + r(a_{i+1/2} - kh/2) u_{i+1}^n \end{aligned} \quad (6)$$

Saul'yev 型非对称格式:

$$\delta_x u_i^n + \frac{k}{2} (\delta_x u_i^n + \delta_x u_i^n) = \frac{1}{2} (\delta_x (a_{i-1/2} \delta_x u)_i^n + h^{-1} (a_{i+1/2} \delta_x u_{i+1}^{n+1} - a_{i-1/2} \delta_x u_i^n)), \quad (7)$$

$$\delta_x u_i^n + \frac{k}{2} (\delta_x u_i^n + \delta_x u_i^n) = \frac{1}{2} (\delta_x (a_{i-1/2} \delta_x u)_i^n + h^{-1} (a_{i+1/2} \delta_x u_i^n - a_{i-1/2} \delta_x u_{i+1}^{n+1})), \quad (8)$$

$$\delta_x u_i^n + \frac{k}{2} (\delta_x u_i^n + \delta_x u_{i+1}^{n+1}) = \frac{1}{2} (\delta_x (a_{i-1/2} \delta_x u)_i^{n+1} + h^{-1} (a_{i+1/2} \delta_x u_{i+1}^{n+1} - a_{i-1/2} \delta_x u_i^n)), \quad (9)$$

$$\delta_x u_i^n + \frac{k}{2} (\delta_x u_i^n + \delta_x u_{i+1}^{n+1}) = \frac{1}{2} (\delta_x (a_{i-1/2} \delta_x u)_i^{n+1} + h^{-1} (a_{i+1/2} \delta_x u_i^n - a_{i-1/2} \delta_x u_{i+1}^{n+1})), \quad (10)$$

同样, (7)~(10) 式也可以写成下面的形式

$$\begin{aligned} (1 + ra_{i+1/2}) u_i^{n+1} - r \left[a_{i+1/2} - \frac{kh}{2} \right] u_{i+1}^{n+1} = \\ r(2a_{i-1/2} + kh) u_{i-1}^n + (1 - r(2a_{i-1/2} + a_{i+1/2})) u_i^n + r \left[a_{i+1/2} - \frac{kh}{2} \right] u_{i+1}^n, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -r \left[a_{i-1/2} - \frac{kh}{2} \right] u_{i-1}^{n+1} + (1 + ra_{i-1/2}) u_i^{n+1} = \\ r \left[a_{i-1/2} + \frac{kh}{2} \right] u_{i-1}^n + (1 - r(2a_{i+1/2} + a_{i-1/2})) u_i^n + r(2a_{i+1/2} - kh) u_{i+1}^n, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -r \left[a_{i-1/2} + \frac{kh}{2} \right] u_{i-1}^{n+1} + (1 + r(2a_{i+1/2} + a_{i-1/2})) u_i^{n+1} - r(2a_{i+1/2} - kh) u_{i+1}^{n+1} = \\ r \left[a_{i-1/2} + \frac{kh}{2} \right] u_{i-1}^n + (1 - ra_{i-1/2}) u_i^n, \quad (13) \end{aligned}$$

$$-r(2a_{i-1/2} + kh) u_{i-1}^{n+1} + (1 + r(2a_{i-1/2} + a_{i+1/2})) u_i^{n+1} - r \left[a_{i+1/2} - \frac{kh}{2} \right] u_{i+1}^{n+1} =$$

其次,我们给出 G_l 组上的差分方程, G_l 组是由内点 (x_{j+i}, t_{n+1}) ($i = 1, \dots, l$) 组成, 其差分格式按如下的规定给出, 在第一个点 (x_{j+1}, t_{n+1}) 处使用格式(11), 在点 (x_{j+l}, t_{n+1}) 处使用格式(12), 在其余各点 (x_{j+i}, t_{n+1}) ($i = 2, \dots, l-1$) 处使用 Crank_Nicolson 格式(6). 于是可以得到基本段 G_l 上的差分格式的矩阵形式

$$A_l^{(j)} \mathbf{u}_j^{n+1} = B_l^{(j)} \mathbf{u}_j^n + \mathbf{b}_l^{(1)}, \quad (16)$$

$$A_l^{(j)} = I + rQ_l^{(j)},$$

$$B_l^{(j)} = I - rP_l^{(j)}.$$

此处, $\mathbf{u}_j^n = (u_{j+1}^n, u_{j+2}^n, \dots, u_{j+l}^n)^\top$, $\mathbf{b}_l^{(1)} = (2rb_1^j u_j^n, 0, \dots, 0, 2rc_l^j u_{j+l+1}^n)^\top$.

$$Q_l^{(j)} = \begin{bmatrix} d_1^j & -c_1^j & & & & \\ -b_2^j & d_2^j & -c_2^j & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -b_{l-1}^j & d_{l-1}^j & -c_{l-1}^j & \\ & & & -b_l^j & d_l^j & \end{bmatrix}_{l \times l},$$

$$P_l^{(j)} = \begin{bmatrix} \hat{d}_1^j & -c_1^j & & & & \\ -b_2^j & \hat{d}_2^j & -c_2^j & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -b_{l-1}^j & \hat{d}_{l-1}^j & -c_{l-1}^j & \\ & & & -b_l^j & \hat{d}_l^j & \end{bmatrix}_{l \times l}.$$

对于 G_{2l} 组和 G_l 组的两种特殊情况, 其差分格式要做如下改变:

注1 当 G_{2l} 组或 G_l 组靠近左边界时, 即 (x_j, t_{n+1}) 为左边界点, 则(15) 或(16) 中的第一个方程用 Crank_Nicolson 格式(6) 替换, $Q_{2l}^{(j)}$, $P_{2l}^{(j)}$, $b_{2l}^{(2)}$, $Q_l^{(j)}$, $P_l^{(j)}$, 和 $b_l^{(1)}$, 相应做微小变化.

注2 当 G_{2l} 组或 G_l 组靠近右边界时, 即 (x_{j+2l+1}, t_{n+1}) 或 (x_{j+l+1}, t_{n+1}) 为右边界点, 则(15) 中的第 $2l$ 个方程或(16) 中的第 l 个方程用 Crank_Nicolson 格式(6) 替换, $Q_{2l}^{(j)}$, $P_{2l}^{(j)}$, $b_{2l}^{(2)}$, $Q_l^{(j)}$, $P_l^{(j)}$, 和 $b_l^{(1)}$, 也要做微小变化.

值得指出的是, 本文用到的 G_l 组都是靠近左右边界的特殊情况.

对内点数为 $m-1 = (2J+1)l$ 或 $m-1 = 2Jl$ ($J \geq 1, l \geq 3$) 两种情况, 我们给出交替分段 Crank_Nicolson 方法.

1 当 $m-1 = (2J+1)l$ 时,

设 n 为偶数, 第 n 层上的值 u_i^n 已经给出, 为了求第 $(n+1)$ 层的值 u_i^{n+1} , 我们把 $(n+1)$ 层上的节点划分为 $(J+1)$ 个独立计算组, 分组模式如图(1) 所示, 这些独立计算组上的差分方程具有并行本性, 可以在多处理器的并行计算机上直接进行并行计算. 从左到右, 第1组到第 J 组, 连续 J 个 G_{2l} 组, 每组上的差分格式由可以独立计算的联立方程组(15) 表示; 剩下的靠近右边界的 G_l 组, 其格式由联立方程组(16) 表示. 在 t_{n+2} 层上划分 $(J+1)$ 个独立计算组, 从左到右, 第1组为 G_l 组, 其格式由联立方程组(16) 表示; 第2组到第 $(J+1)$ 组是 G_{2l} 组, 每组上的

$$\rho(G) = \rho(G) \leq \|I - rG_1\|_2 \|I - rG_2\|_2 \leq 1,$$

由此可知, 格式(17) 绝对稳定. 此处, $\rho(G)$ 和 $\rho(G)$ 分别表示矩阵 G 和 G 的谱半径.

用同样的方法可以证明格式(19) ~ (21) 绝对稳定.

3 数值例子

我们就 $a(x) = \varepsilon$ 为常数的模型问题进行了数值试验. 对不同的分组模式用本文给出的 ASC_N 方法进行了上机计算, 并与用 Crank_Nicolson 全稳格式和 Evans^[5] 给出的 AGE 方法得到的数值解的绝对误差和相对误差进行了比较. 交替分段 Crank_Nicolson 方法把一个规模为 $(m - 1)$ 的问题分成若干个规模为 $2l$ 或 l 的可以独立计算的小问题, 宜于在并行计算机上直接使用. 结果表明, 即使对大的网比 r , 其精度也几乎与全隐式 Crank_Nicolson 格式一致, 甚至在有些点上比全隐式的 Crank_Nicolson 格式还好. 这主要是因为在同一层的少数相邻点上对称地使用了 Saul'yev 格式, 在奇偶层之间交替使用了 Saul'yev 格式, 使得 Saul'yev 格式的误差部分抵消, 最后的总体效果使精度几乎没有降低.

例:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < 1, 0 < t < T, \varepsilon > 0), \\ u(x, 0) = 0 & (0 < x < 1), \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1 & (0 < t < T). \end{cases} \quad (22)$$

(22) 的精确解是^[5]

$$u(x, t) = \frac{e^{kx/\varepsilon} - 1}{e^{k/\varepsilon} - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \pi}{(n \pi)^2 + (\frac{k}{2\varepsilon})^2} e^{k(x-1)/2\varepsilon} \sin(n \pi x) e^{-[(n \pi)^2 \varepsilon + k^2/4\varepsilon] t}. \quad (23)$$

我们在对例子(22) 应用格式(17) 进行数值试验时, 取 $\varepsilon = 1, k = 1, m = 40$, 并就 Δt 和 $r = \Delta t/h^2$ 的不同值进行了计算, 分别给出了 $r = 1.6, 3.2, 6.4$ 在 $t = 0.2, 0.4, 0.6$ 时数值解的绝对误差(A. E.) 和相对误差(P. E.) (见表(1) ~ (3)).

此处, 绝对误差(A. E.):

$$e_j^n = |u_j^n - u(x_j, t_n)|,$$

相对误差(P. E.):

$$E_j^n = \frac{e_j^n}{|u(x_j, t_n)|} \times 100.$$

表 1 $t = 0.2$ 时的数值计算结果 ($m = 40, l = 13$)

x_j		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$r = 1.6$ 方程(2.13)	A. E.	0.000 01	0.000 01	0.000 02	0.000 01	0.000 01	0.000 01	0.000 02	0.000 02	0.000 01
	P. E.	0.013 22	0.012 15	0.010 68	0.005 22	0.00 431	0.003 19	0.003 95	0.002 43	0.001 06
$r = 1.6$ C_N 方法	A. E.	0.000 01	0.000 01	0.000 02	0.000 02	0.000 02	0.000 02	0.000 02	0.000 01	0.000 01
	P. E.	0.010 21	0.009 45	0.008 45	0.007 24	0.005 87	0.004 49	0.003 08	0.001 83	0.000 79
$r = 1.6$ Evans ^[5]	A. E.	0.000 09	0.000 19	0.000 27	0.000 34	0.000 38	0.000 38	0.000 34	0.000 25	0.000 11
	P. E.	0.173 80	0.165 42	0.151 64	0.133 12	0.110 84	0.086 12	0.060 55	0.035 75	0.013 36
精确解		0.053 15	0.112 72	0.180 26	0.257 35	0.345 59	0.446 49	0.561 37	0.691 37	0.837 57

表 2 $t = 0.4$ 时的数值计算结果 ($m = 40, l = 13$)

x_j		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$r = 3.2$ 方程(2.13)	A. E.	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
	P. E.	0.00102	0.000 69	0.000 36	0.001 76	0.001 59	0.001 41	0.000 19	0.000 20	0.000 13
$r = 3.2$ C_N 方法	A. E.	0.000 00	0.000 00	0.000 01	0.000 01	0.000 01	0.000 01	0.000 00	0.000 00	0.000 00
	P. E.	0.003 22	0.002 88	0.002 50	0.002 09	0.001 64	0.001 20	0.000 80	0.000 45	0.000 18
$r = 3.2$ Evans ^[5]	A. E.	0.000 19	0.000 38	0.000 55	0.000 68	0.000 75	0.000 75	0.000 66	0.000 50	0.000 26
	P. E.	0.317 65	0.301 28	0.275 17	0.240 90	0.200 78	0.157 16	0.112 67	0.069 85	0.030 85
精确解		0.060 14	0.126 72	0.200 52	0.282 41	0.373 32	0.474 23	0.586 21	0.710 35	0.847 86

表 3 $t = 0.6$ 时的数值计算结果 ($m = 40, l = 13$)

x_j		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$r = 6.4$ 方程(2.13)	A. E.	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 01	0.000 01	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
	P. E.	0.000 65	0.000 80	0.000 94	0.001 91	0.001 64	0.001 33	0.000 51	0.000 34	0.000 16
$r = 6.4$ C_N 方法	A. E.	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
	P. E.	0.001 11	0.000 87	0.000 65	0.000 45	0.000 28	0.000 15	0.000 05	0.000 01	0.000 02
$r = 6.4$ Evans ^[5]	A. E.	0.000 13	0.000 27	0.000 39	0.000 48	0.000 53	0.000 53	0.000 47	0.000 36	0.000 20
	P. E.	0.219 21	0.208 13	0.190 64	0.167 20	0.140 16	0.110 19	0.079 97	0.050 49	0.023 22
精确解		0.061 07	0.128 57	0.203 20	0.285 73	0.376 98	0.477 90	0.589 48	0.712 86	0.849 27

[参 考 文 献]

- [1] Evans D J, Abdullah A R B. Group explicit methods for parabolic equations[J]. Internat J Computer Math, 1983, 14(1): 73—105.
- [2] Evans D J. Alternating group explicit method for the diffusion equations[J]. Appl Math Modeling, 1985, 9(3): 201—206.
- [3] Evans D J, Sahimi M S. The numerical solution of Burgers equations by the alternating group explicit (AGE) method[J]. Internat J Computer Math, 1989, 29(1): 39—64.
- [4] ZHANG Bao_lin, SU Xiu_min. Alternating block explicit_implicit method for two_dimensional diffusion equation[J]. Internat J Computer Math, 1991, 38(3/4): 241—255.
- [5] Evans D J, Abdullah A R B. A new explicit method for the diffusion_convection equation[J]. Comput Math Appl, 1985, 11(1—3): 145—154.
- [6] 曾文平. 求解扩散_对流方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (u \frac{\partial u}{\partial x})$ 型 CE 方法[J]. 高等学校计算数学学报, 2000, 22(2): 123—130.
- [7] 陆金甫, 张宝琳, 徐涛. 求解对流_扩散方程分段显_隐方法[J]. 数值计算与计算机应用, 1998, 19(3): 161—167.
- [8] 张宝琳, 符鸿源. 一类交替块 Crank_Nicolson 方法的差分图[J]. 科学通报, 1999, 40(11): 1148—1152.
- [9] ZHANG Bao_lin, LI Wen_zhi. On alternating segment Crank_Nicolson scheme[J]. Parallel Computing, 1994, 20(8): 897—902.
- [10] CHEN Jin, ZHANG Bao_lin. A class of alternating block Crank_Nicolson method[J]. Internat J Computer Math, 1992, 45(1/2): 89—112.
- [11] CHEN Jin, ZHANG Bao_lin. Variable coefficient ASE_I and ASC_N method and their stability[J]. Internat J Computer Math, 1994, 54(3/4): 215—229.
- [12] Sauf yev V K. Integration of Techniques for Fluid Dynamics[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1998.

[13] Kellogg R B. An alternating direction method for operator equations[J]. *SIAMJ*, 1964, **12**(6): 848—854.

The Alternating Segment Crank_Nicolson Method for Solving Convection_Diffusion Equation With Variable Coefficient

WANG Wen_qia

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: A new discrete approximation to the convection term of the convection diffusion equation was constructed in Saul'yev type difference scheme, then the alternating segment Crank_Nicolson (ASC_N) method for solving the convection_diffusion equation with variable coefficient was developed. The ASC_N method is unconditionally stable. Numerical experiment shows that this method has the obvious property of parallelism and accuracy. The method can be used directly on parallel computers.

Key words: convection_diffusion equation; alternating segment method; Crank_Nicolson scheme; asymmetries difference scheme; unconditionally stable; parallel computing