文章编号: 1000_0887(2003)01_0105_06

# 一类多滞量周期扰动非线性系统的周期解*

曹显兵

(1. 北京工商大学 基础部, 北京 100037)

(樊大钧推荐)

摘要: 研究一类具有多个滞量的周期扰动非线性系统的 $T$ 周期解• 利用拓扑度的方法得到了系统存在 $T$ 周期解的充分条件• 作为应用, 证明了具有滞后的单种群对数模型在一定条件下存在正周期解•

关 键 词: 多滞量; 周期解; 拓扑度
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

## 引 言

本文研究一类具有多个滞量的周期扰动非线性系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \cdots, x(t-\tau_m(t))) \tag{1}$$

的 $T$ 周期解•

其中, $x(t) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $f$ 连续且 $f(t+T, \cdot) = f(t, \cdot)$, $\tau_i(t)\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 均为连续的 $T$ 周期函数•

为了讨论系统(1)的 $T$ 周期解的存在性, 先介绍一个引理•

设 $X$ 是一 Banach 空间, 考虑算子方程

$$Lx = \lambda Nx \qquad (\lambda \in [0, 1]),$$

这里, $L: \mathrm{Dom}L \cap X \to X$ 是线性算子, $\lambda \in [0, 1]$ 为参数• 令 $P, Q$ 为两个投影算子:

$$P: \mathrm{Dom}L \cap X \to \mathrm{Ker}L,$$
$$Q: X \to X/\mathrm{Im}\,L•$$

则有如下引理:

引理[1] 假设 $X$ 为 Banach 空间, $L$ 是指标为零的 Fredholm 算子, $N: \Omega \to X$ 在 $\Omega$ 上 $L$ 紧, 其中 $\Omega$ 为 $X$ 中的有界开集• 进一步假设

( i ) $Lx \neq \lambda Nx,\ \forall \lambda \in (0, 1) \qquad (\forall x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Dom}L)$,

( ii ) $QNx \neq 0 \qquad (\forall x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L)$,

( iii ) $\deg\{QNx, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0$,

则 $Lx = Nx$ 在 $\Omega$ 中至少有一个解•

* 收稿日期: 2001_10_09; 修订日期: 2002_09_26
作者简介: 曹显兵(1964—), 男, 湖南桃江人, 副教授, 博士(E_mail: xbcao3613@sina.com.cn)•

# 1 主要结果

定理 1 假设系统(1)满足

A1) 存在 $R_0>0$, 当 $u_i>R_0(i=1,2,\cdots,m)$ 时, $f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)>0$(或 $<0$);

当 $u_i<-R_0(i=1,2,\cdots,m)$ 时, $f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)<0$(或 $>0$);

A2) $|f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots x(t-\tau_m(t)))|\leqslant a_0(t)|x(t)|+$
$a_1(t)|x(t-\tau_1(t))|+\cdots+a_m(t)|x(t-\tau_m(t))|+p(t)$,

其中, $a_i(t)\ (i=0,1,2,\cdots,m)$, $p(t)$ 均为 $T$ 周期函数. 记 $a_i=\max\limits_{[0,T]}|a_i(t)|$, 则当 $T\sum\limits_{i=0}^{m}a_i<1$ 时, 系统(1)至少存在一个 $T$ 周期解.

证明 为了利用引理, 设 $X=\left\{x(t)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ x(t+T)=x(t)\right\}$, 定义 $|x|_0=\max\limits_{[0,T]}|x(t)|$, 则 $X$ 在 $|x|_0$ 下成为 Banach 空间. 令

$$Lx=x'(t),\quad Nx=f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t))),$$

$$Px=Qx=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t\qquad(x(t)\in X).$$

易证, $L$ 是指标为零的 Fredholm 算子, $N$ 在 $\Omega$ 上 $L$ 紧, 其中 $\Omega$ 为 $X$ 中的有界开集. 对应算子方程 $Lx=\lambda Nx(\lambda\in(0,1))$ 有

$$x'(t)=\lambda f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)))\qquad(\lambda\in(0,1)).\tag{2}$$

设 $x(t)$ 是(2)的任一 $T$ 周期解, 下证 $x(t)$ 关于 $\lambda$ 一致有界. (2)式两边从 0 到 $T$ 积分得

$$\int_0^T f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)))\,\mathrm{d}t=0.\tag{3}$$

由条件 A1) 知, 至少存在一点 $t_0\in[0,T]$, 使得

$$|x(t_0)|\leqslant R_0.\tag{4}$$

事实上, 若不然, 不妨设 $x(t)>R_0$, $t\in[0,T]$, 则由 $x(t)$ 的周期性知, 对 $\forall t\in R$, $x(t)>R_0$, 于是 $x(t-\tau_i(t))>R_0(i=1,2,\cdots,m)$. 因此

$$f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)))>0,$$

从而有

$$\int_0^T f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)))\,\mathrm{d}t>0.$$

这与(3)式矛盾. 于是由

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^t x'(s)\,\mathrm{d}s\qquad(t\in[0,T]),$$

得

$$|x(t)|\leqslant R_0+\int_0^T|x'(t)|\,\mathrm{d}t.\tag{5}$$

又(3)式两边同乘以 $x'(t)$, 并从 0 到 $T$ 积分得

$$\int_0^T|x'|^2\mathrm{d}t=\lambda\int_0^T x'f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)))\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\int_0^T|x'(t)||f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)))|\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\int_0^T|x'(t)|(a_0(t)|x(t)|+a_1(t)|x(t-\tau_1(t))|+\cdots+$$

$$a_m(t)|x(t-\tau_m(t))|+p(t))\mathrm{d}t\leqslant$$
$$a_0\int_0^T|x'(t)||x(t)|\mathrm{d}t+a_1\int_0^T|x'(t)||x(t-\tau_1(t))|\mathrm{d}t+\cdots+$$
$$a_m\int_0^T|x'(t)||x(t-\tau_m(t))|\mathrm{d}t+b\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t,$$

其中，$b=\max\limits_{[0,T]}|p(t)|$。

根据(5)式，有

$$\int_0^T|x'(t)||x(t-\tau_i(t))|\mathrm{d}t\leqslant R_0\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t+\left(\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\leqslant$$
$$R_0\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t+T\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t.$$

故由此可得

$$\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\left(R_0\sum_{i=0}^m a_i+b\right)\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t+T\sum_{i=0}^m a_i\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t.$$

即

$$\left(1-T\sum_{i=0}^m a_i\right)\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\left(R_0\sum_{i=0}^m a_i+b\right)\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\left(R_0\sum_{i=0}^m a_i+b\right)\sqrt{T}\left(\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是有

$$\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{R_0\sum\limits_{i=0}^m a_i+b}{1-T\sum\limits_{i=0}^m a_i}\right)^2 T=R_1. \tag{6}$$

进一步由(5)得

$$|x(t)|\leqslant R_0+\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$R_0+\sqrt{T}\left(\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant R_0+\sqrt{TR_1}=R_2.$$

令 $\Omega=\left\{x(t)\in X\,|\,|x|_0<R_2\right\}$，则易进一步验证引理的条件均满足，故方程 $Lx=Nx$，即系统(1) 至少存在一个 $T$ 周期解。

当 $\tau_i(t)=\tau_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 为常数时，则系统 (1) 化为

$$x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m)). \tag{7}$$

我们有

定理 2　假设存在连续 $T$ 周期非负函数 $a_i(t)$，$i=1,2,\cdots,m$，$p(t)$ 以及定号函数 $a_0(t)$，使得

A1)　$|f(t,x(t),x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))-a_0(t)x(t)|\leqslant$
$a_1(t)|x(t-\tau_1)|+\cdots+a_m(t)|x(t-\tau_m)|+p(t)$。

A2)　$a_0>\sum\limits_{i=1}^m a_i$，其中 $a_i=\max\limits_{[0,T]}|a_i(t)|$，$i=0,1,2,\cdots,m$。　则系统(7) 至少存在一个 $T$ 周期解。

证明 同定理 1 类似, 令 $X$ 为连续 $T$ 周期函数空间,

$$Lx = x'(t), Nx = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)),$$

$$Px = Qx = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t \qquad (x(t) \in X).$$

考虑算子方程

$$Lx = \lambda Nx \qquad (\lambda \in (0,1)),$$

即

$$x'(t) = \lambda f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)) \qquad (\lambda \in (0,1)). \tag{8}$$

设 $x(t)$ 是(8) 的任一 $T$ 周期解, 下证 $x(t)$ 关于 $\lambda$ 一致有界. (8) 式两边同乘以 $x(t)$ 并从 0 到 $T$ 积分得

$$\int_0^T x(t)f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m))\mathrm{d}t = 0. \tag{9}$$

根据条件 A 1) 知

$$\begin{aligned}
&|x(t)||f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)) - a_0(t)x(t)| = \\
&\quad |x(t)f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)) - a_0(t)x^2(t)| \leqslant \\
&\quad a_1(t)|x(t)||x(t-\tau_1)| + \cdots + \\
&\quad a_m(t)|x(t)||x(t-\tau_m)| + |x(t)|p(t),
\end{aligned}$$

不妨设 $a_0(t) > 0$, 从而有

$$\begin{aligned}
&x(t)f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)) \geqslant a_0(t)|x(t)|^2 - \\
&\quad a_1(t)|x(t)||x(t-\tau_1)| - \cdots - \\
&\quad a_m(t)|x(t)||x(t-\tau_m)| - p(t)|x(t)|.
\end{aligned}$$

由(9) 式得

$$\begin{aligned}
a_0\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant\ & a_1\int_0^T |x(t)||x(t-\tau_1)|\mathrm{d}t + \cdots \\
& a_m\int_0^T |x(t)||x(t-\tau_m)|\mathrm{d}t + b\int_0^T |x(t)|\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $b = \max\limits_{[0,T]}|p(t)|$. 因为

$$\begin{aligned}
\int_0^T |x(t)||x(t-\tau_i)|\mathrm{d}t \leqslant &\left(\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |x(t-\tau_i)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

所以由(10) 得

$$a_0\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=1}^m a_i\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t + b\int_0^T |x(t)|\mathrm{d}t,$$

$$\left(a_0 - \sum_{i=1}^m a_i\right)\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant b\int_0^T |x(t)|\mathrm{d}t \leqslant b\sqrt{T}\left(\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

于是

$$\int_0^T |x(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{b}{a_0 - \sum\limits_{i=1}^m a_i}\right)^2 T = R_1. \tag{11}$$

故存在 $t_0\in[0,T]$，使 $|x(t_0)|\leqslant\sqrt{\frac{R_1}{T}}$。

再由 $x(t)=x(t_0)+\int_0^t \dot{x}(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,T]$，得

$$|x(t)|\leqslant R_0+\int_0^T|\dot{x}(t)|\mathrm{d}t\leqslant\sqrt{\frac{R_1}{T}}+\int_0^T|\dot{x}(t)|\mathrm{d}t, \tag{12}$$

由条件 A1) 知

$$\begin{aligned}&|f(t,x(t),x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))|\leqslant\\&\quad|f(t,x(t),x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))-a_0(t)x(t)|+|a_0(t)x(t)|\leqslant\\&\quad a_0(t)|x(t)|+a_1(t)|x(t-\tau_1)|+\cdots+a_m(t)|x(t-\tau_m)|+p(t),\end{aligned}$$

所以由(8)得

$$\begin{aligned}\int_0^T|\dot{x}(t)|\mathrm{d}t&\leqslant\int_0^T\Big(\sum_{i=1}^m a_i(t)|x(t-\tau_i)|+a_0(t)|x(t)|+p(t)\Big)\mathrm{d}t\leqslant\\&\quad a_0\int_0^T|x(t)|\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^m a_i\int_0^T|x(t-\tau_i)|\mathrm{d}t+bT=\\&\quad a_0\int_0^T|x(t)|\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^m a_i\int_0^T|x(t)|\mathrm{d}t+bT\leqslant\\&\quad\left(\sum_{i=0}^m a_i\right)\sqrt{T}\left(\int_0^T|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+bT\leqslant\left(\sum_{i=0}^m a_i\right)\sqrt{TR_1}+bT=R_2。\end{aligned} \tag{13}$$

由(12)、(13)得

$$|x(t)|\leqslant\sqrt{\frac{R_1}{T}}+R_2=R_3。$$

令 $\Omega=\left\{x(t)\in X\,\middle|\,|x|_0<R_3\right\}$，则易验证引理的条件均满足，故系统(7)至少存在一个 $T$ 周期解。

## 2 例　　子

例 1　考虑如下一般单种群对数模型[2]

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=N(t)\left\{r(t)-a_0(t)\ln N(t)-\sum_{i=1}^m a_i(t)\ln N(t-\tau_i(t))\right\}, \tag{14}$$

其中 $r(t),a_i(t)(i=0,1,2,\cdots,m),\tau_i(t)$ 均为正的 $T$ 周期函数。

令 $N(t)=\exp[x(t)]$，则(14)可化为

$$\dot{x}(t)=r(t)-a_0(t)x(t)-\sum_{i=1}^m a_i(t)x(t-\tau_i(t))。 \tag{15}$$

记 $a_i=\max\limits_{[0,T]}a_i(t),(i=0,1,2,\cdots,m)$，则当 $T\sum\limits_{i=0}^m a_i<1$ 时，易验证定理 1 的条件均满足，故系统(15)至少存在一个 $T$ 周期解，从而系统(14)存在正的 $T$ 周期解。

例 2　考虑系统

$$\dot{x}(t)=a_0x(t)-\sum_{i=1}^m a_i(t)x(t-\tau_i)+p(t), \tag{16}$$

其中 $a_i(t),p(t)$ 均为连续的 $T$ 周期函数，$\tau_i>0(i=1,2,\cdots,m)$ 为常数，$a_0<0$ 为常数。则

1) 当 $|a_0| > \sum_{i=1}^{m} a_i$ 时, 其中 $a_i = \max_{[0, T]} |a_i(t)|$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 系统(16) 存在 $T$ 周期解• 若进一步假定

2) $\int_{t-\tau}^{t} -\sum_{i=1}^{m} a_i(s)\exp[a_0(t-s)]\,ds \leqslant 1 + \frac{1}{2}\exp[a_0\tau],\ t \geqslant \tau = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \tau_i$, 则系统(16) 存在唯一 $T$ 周期解, 且是渐近稳定的•

证明 1) 是定理2 的直接推论;

2) 利用文[3] 中定理 1 即得•

## [参 考 文 献]


[1] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1977, **568**(2): 10—35.

[2] Gopalsmay K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics [M]. Boston: Kluwer Academic Publisher, 1992, 44—88.

[3] 庾建设. 非自治时滞微分方程的渐近稳定性[J]. 科学通报, 1997, **42**(12): 1284—1252.

[4] Brower F E, Nussbaum R D. The topological degree for noncompact nonlinear mappings in Banach space[J]. Bull Amer Math Soc, 1968, **74**(3): 671—676.

[5] Hale J K, Mawhin J. Coincidence degree and periodic solutions of nuetral equations[J]. J Differential Equations, 1974, **15**(2): 295—307.


# On the Existence of Periodic Solutions for Nonlinear System With Multiple Delays


CAO Xian_bing

(Basic Sciences Department, Beijing Technology and Business University, Beijing 100037, China)



**Abstract**: The existence of $T$_periodic solutions of the nonlinear system with multiple delays is studied. By using the topological degree method, sufficient conditions are obtained for the existence of $T$_periodic solutions. As an application, the existence of positive periodic solution for a logarithmic population model is established under some conditions.



**Key words**: multiple delays; periodic solution; topological degree