应用数学和力学,第 24 卷 第 1 期(2003 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003)01_0089_09

非线性椭圆型边值问题解的存在性*

邵 荣[1], 牛 欣[2], 沈祖和[1]

(1. 南京大学 数学系, 南京 210093; 阜阳师范学院 数学系 安徽阜阳 236032)

(吴启光推荐)

摘要: Hilbert 空间方法被用于一类二阶半线性椭圆型边值问题并得出了某些条件下的解的存在性.

关 键 词: Hilbert 空间; 强制条件; 紧; 嵌入; 椭圆型方程
中图分类号: O175.25; O177 文献标识码: A

引 言

在文献[1]中 Kannan 和 Locker 得出了下列方程至少存在一个解, 方程为

$$\begin{aligned}&Ty - h(t, y, \cdots, y^{(n-1)})\,y = f(t, y, \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (a < t < b),\\ &By = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

其中 T 是 n 阶线性对称微分算子, 系数 ∞ 阶连续可微, 首项系数在区间 $[a, b]$ 上处处不为 0. 在边值条件 $By = 0$ 下, 算子 T 确定为 $L_2[a, b]$ 上的自伴算子 L. 对 h 和 f 的假设为

(i) h 和 f 都连续,

(ii) 对所有 $t \in [a, b]$, $y_i \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 函数 $f(t, y_1, \cdots, y_n)$ 有界,

(iii) 存在两个实数 $q \leqslant p$ 使得对所有 $t \in [a, b]$, $y_i \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 有

$$q \leqslant h(t, y_1, \cdots, y_n) \leqslant p,$$

同时要求 L 的特征值不落在 $[q, p]$ 区间上.

Bates[2] 推广了上述结论, 去掉了条件(ii), 减弱了条件(iii).

设 H 是(实或复)Hilbert 空间, 内积记为 $(\cdot, \cdot)$, 范数记为 $\|\cdot\|$.

设 $L: D(L) \subset H \to H$ 是一个线性自伴算子, 具有谱 σ.

再设 H_1 和 H_2 也都是 Hilbert 空间, 各自的内积记为 $(\cdot, \cdot)_1$ 和 $(\cdot, \cdot)_2$, 范数记为 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. H_1 连续嵌入 H, H_2 连续嵌入 H_1, 且有关系

$$\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2. \tag{2}$$

假设 L 满足一个强制条件: 存在常数 M 使得对全体 $\boldsymbol{u} \in D(L) \subset H_2$ 有

$$\text{(L)} \qquad \|\boldsymbol{u}\|_2 \leqslant M(\|\boldsymbol{u}\| + \|L\boldsymbol{u}\|).$$

设 $r > 0$, h 为满足下列条件的映射

* 收稿日期: 2002_08_25; 修订日期: 2002_09_30
基金项目: 安徽省教委资助项目(2001kj187zc)
作者简介: 邵荣(1965—), 安徽绩溪人, 副教授, 硕士(E_mail: shao_rong@mail.china.com).

(h1) $h: B_1(0, r) \to B(H)$ 连续, 其中 $B_1(0, r)$ 表示 H_1 中 0 为球心 r 为半径的开球, $B(H)$ 为 H 上的有界线性算子空间

(h2) 对任一 $\boldsymbol{w} \in B_1(0, r)$, $h(\boldsymbol{w})$ 对称,

(h3) 存在两个实数 $q \leqslant p$ 使得对任一 $\boldsymbol{w} \in B_1(0, r)$ 有 $qI \leqslant h(\boldsymbol{w}) \leqslant pI$ •

定理(Bates[2]) 设 L 和 h 如上所述, 且满足非共振条件 $[q, p] \cap \sigma = \Phi$• 假设映射 $f: B_1(0, r) \to H$ 连续有界, 且满足

(F) 对所有 H_1 中满足 $\|\boldsymbol{w}\|_1 = r$ 的 $\boldsymbol{w}$, 有

$$\|f(\boldsymbol{w})\| < rK,$$

其中 $K = M^{-1}((\max\{|q|, |p|\} + 1) C + 1)^{-1}$ 而 $C = 1/\mathrm{dist}([q, p], \sigma)$,
则方程

$$L\boldsymbol{u} - h(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{u}) \tag{3}$$

在 $H_2 \cap B_1(0, r)$ 中至少有一个解•

本文继续这一讨论, 给出了方程(3) 的解的存在性, 并将它应用于半线性椭圆型边值问题•

1 基 本 定 理

考虑方程

$$L\boldsymbol{u} - h(\boldsymbol{u}) u = f(\boldsymbol{u})• \tag{4}$$

假设 H, H_1, H_2 为引言所述的 Hilbert 空间, 且满足关系(2) 和强制条件 (L) •

我们有主要结论如下

定理 1.1 假设

(h1) 映射 $h: H_1 \to B(H)$ 连续,

(h2) 对任一 $\boldsymbol{w} \in H_1$, $h(\boldsymbol{w})$ 对称,

(h3) $L - h(\boldsymbol{w})$ 可逆, 且对所有 $\boldsymbol{w} \in H_1$ 和所有的 $\boldsymbol{u} \in H_2$, 满足

$$\|\boldsymbol{u}\| \leqslant C_0(\boldsymbol{w}) \|[L - h(\boldsymbol{w})]\boldsymbol{u}\|,$$

其中 $C_0(\boldsymbol{w})$ 为连续依赖于 $\boldsymbol{w}$ 的正值函数,

(f) $f: H_1 \to H$ 连续且满足 $\|f(\boldsymbol{w})\| = O(\tau(\|\boldsymbol{w}\|_1)^{-1})$,

其中 $\tau(s) = \sup\limits_{\|\boldsymbol{w}\|_1 \leqslant s} K(\boldsymbol{w}), K(\boldsymbol{w}) = M[C_0(\boldsymbol{w})(1 + \|h(\boldsymbol{w})\|) + 1]$,

则方程(4) 至少有一个解•

证明 由(h3) 对固定的 $\boldsymbol{w} \in H_1$, 方程

$$L\boldsymbol{u} - h(\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{w}) \tag{5}$$

存在唯一解•

因此由式子 $T\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$($\boldsymbol{u}$ 为方程(5) 的唯一解) 定义的映射 $T: H_1 \to D(L) \subset H_2 \subset H$ 是确定的•

(5) 等价于

$$T\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} = (L - h(\boldsymbol{w}))^{-1} f(\boldsymbol{w}),$$

并且条件(h3) 也可写成

$$\|\boldsymbol{u}\| \leqslant C_0(\boldsymbol{w}) \|f(\boldsymbol{w})\|•$$

现在, 由强制条件 (L), 有

$$\|u\|_2 \leqslant M(\|u\| + \|Lu\|) \leqslant$$
$$M(\|u\| + \|Lu - h(w)u\| + \|h(w)\|\,\|u\|) =$$
$$M(\|u\| + \|f(w)\| + \|h(w)\|\,\|u\|) \leqslant$$
$$M[C_0(w)(1 + \|h(w)\|) + 1]\|f(w)\|,$$

此即

$$\|u\|_2 \leqslant K(w)\|f(w)\| \leqslant \tau(\|w\|_1)\|f(w)\|. \tag{6}$$

假设 $w_1, w_2 \in H_1$ 且 $u_1 = Tw_1, u_2 = Tw_2$, 则 $u_1 - u_2$ 满足方程

$$L(u_1 - u_2) - h(w_1)(u_1 - u_2) = (h(w_1) - h(w_2))u_2 + f(w_1) - f(w_2),$$

此即方程(5)的形式. 因此由(6), 有

$$\|Tw_1 - Tw_2\|_2 = \|u_1 - u_2\|_2 \leqslant$$
$$K(w_1)\|(h(w_1) - h(w_1))u_2 + f(w_1) - f(w_2)\| \leqslant$$
$$K(w_1)(\|u_2\|\,\|h(w_1) - h(w_2)\| + \|f(w_1) - f(w_2)\|)$$
$$K(w_1)(C_0(w_2)\|f(w_2)\|\,\|h(w_1) - h(w_2)\| + \|f(w_1) - f(w_2)\|),$$

故 T 由 H_1 映入 H_2 是连续的.

由于嵌入 $H_2 \subset H_1$ 是紧连续的, 故映射 T 由 H_1 映入 H_1 也是紧连续的.

下面证明对所有 $w \in H_1$, 存在一个常数 M_0, 使得 $\|Tw\|_1 \leqslant M_0$.

不失一般性, 假设

$$\|f(w)\| \leqslant M_0[\tau(\|w\|_1)]^{-1},$$

其中 M_0 是某个常数. 于是, 对每个 $w \in H_1$, 设 $Tw = u$, 则

$$\|Tw\|_1 \leqslant \|Tw\|_2 = \|u\|_2 \leqslant$$
$$\tau(\|w\|_1)\|f(w)\| \leqslant M_0.$$

设 $B = \{w \in H_1, \|w\|_1 \leqslant M_0\}$, 则 $TB \subset B$.

因此, 由 Leray_Schauder 不动点定理, 至少存在一个不动点 u 使得

$$Tu = u.$$

于是上述 u 即是方程(4)的一个解. □

2 关于紧连续嵌入的一个结论

这一节我们讨论嵌入的紧连续性. 首先我们引用熟知的嵌入定理.

嵌入定理　假设 $\Omega \subset R^n$ 有界, 则嵌入映射

$$i:\ W^k_{p,0}(\Omega) \to \begin{cases} L_q(\Omega) & (kp < n, q < np/(n - kp)), \\ C_m(\Omega) & (0 \leqslant m < k - n/p), \end{cases} \tag{7}$$

是紧连续的.

注 2.1　当 $n = kp$ 时, 我们将 $np/(n - kp)$ 看成 $+\infty$. 于是对所有 $q \in [1, +\infty)$ 嵌入映射

$$i:\ W^k_{p,0}(\Omega) \to L_q(\Omega)$$

是紧连续的.

为了后面的需要我们给出下列命题.

命题 2.2　假设 $\Omega \subset R^n$ 有界, 则由 $W^k_{2,0}(\Omega)$ 到 $L_2(\Omega)$ 的嵌入映射是紧连续的, 其中 $k > 0$.

证明 在嵌入定理中令 $p = 2$, 则映射

$$i: W_{2,0}^{k}(\Omega) \to \begin{cases} L_q(\Omega) & (2k < n, q < \dfrac{np}{n-2k}), \\ C_m(\Omega) & (0 \leqslant m < k - \dfrac{n}{2}), \end{cases} \tag{8}$$

是紧连续的•

于是当 $n < 2k$ 时, 由 $W_{2,0}^{k}(\Omega)$ 到 $C(\Omega)$ 的嵌入映射是紧连续的• 对每个 $f \in C(\Omega)$, 由公式

$$\sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 \mathrm{d}x} \leqslant \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \sqrt{\int_\Omega \mathrm{d}x}$$

可知 $C(\Omega)$ 到 $L_2(\Omega)$ 的嵌入是连续的, 故由 $W_{2,0}^{k}(\Omega)$ 到 $L_2(\Omega)$ 的嵌入映射是紧连续的•

当 $n > 2k$, 因为 $2 < 2n/(n-2k)$ 恒成立, 故 $W_{2,0}^{k}(\Omega)$ 到 $L_2(\Omega)$ 的嵌入映射是紧连续的•

当 $n = 2k$, 由注 2.1, 结论显然成立• 证毕• □

3 在二阶椭圆型方程上的应用

考虑二阶椭圆型算子

$$L_0 \boldsymbol{u} = a_{ij} \boldsymbol{u}_{x_i x_j} + a_i \boldsymbol{u}_{x_i} - a \boldsymbol{u} \tag{9}$$

(约定在式子中需对下标进行求和), 定义域为 n 维有界区域 $\Omega \subset R^n$ 上的函数, 其二阶(分布)导数平方可积•

下面我们考虑 $W_{2,0}^{2}(\Omega)$ 上的算子 L_0 的性态, $W_{2,0}^{2}(\Omega)$ 表示 $C_2(\Omega)$ 中所有在边界 $\partial\Omega$ 上值为 0 的函数的集合按内积

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \cdot g \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum D^2 f D^2 g dx$$

(最后的求和号表示对所有的二阶导数进行求和) 所确定的拓扑结构下的闭包• 假设 a_i 和 a 是有界可测函数, $\boldsymbol{a}_{ij}$ 是对称可测函数矩阵, 且对所有 n 维向量 ξ 和所有 Ω 上的 x, 存在某个正数 γ, 使得

$$\gamma^2 |\xi|^2 \leqslant a_{ij} \zeta_i \zeta_j,$$

此外函数 a_{ij} 还需充分正则以保证对 $W_{2,0}^{2}(\Omega)$ 上的 $\boldsymbol{u}$, 成立下列恒等式[见 3, Chapter 4]

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}(a_{ij} \boldsymbol{u}_{x_i})_{x_j} \mathrm{d}x = -\int_\Omega a_{ij} \boldsymbol{u}_{x_i} \boldsymbol{u}_{x_j} \mathrm{d}x \tag{10}$$

为确保恒等式(10)成立, 我们对 a_{ij} 加上更强的限制, 要求每个 a_{ij} 有界且有有界的一阶导数•

在上述假设下, L_0 可以看成为将 $W_{2,0}^{2}(\Omega)$ 映入 $L_2(\Omega)$ 的线性算子•

再设这些空间上的范数分别记为 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_0$•

下列的假设条件是后面所需的•

A1. Ω 的边界分段光滑且处处有非负的平均曲率,

A2. a_{ij} 的分布导数是有界可测函数•

定义

$$S = \sup | a_i - (a_{ij})_{x_j} |,$$

其中上确界是在 Ω 上并按各个下标而取的• 再假设 Ω 上 a 的下确界为

$$a_0 = \inf a \cdot$$

Elcrat[4] 在下列条件下研究了(9)式,即

A3. 假设 $S < \sqrt{\lambda}\gamma^2$,

其中 $\lambda = \inf \dfrac{\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 dx}{\int_\Omega \boldsymbol{u}^2 dx}$, 下确界是在 $W_2^1(\Omega)$ 上取的(此处 λ 就是 Ω 上满足齐次边界条件的拉普拉斯算子 $-\Delta$ 的最小特征值)•

定理(Elcrat[4]) 假设 A1~ A3, 且 a_0 在区间$(\sqrt{\lambda}S - \lambda\gamma^2, \infty)$ 内, 则存在一个常数 $C(a_0)$ 使得对所有 $\boldsymbol{u} \in W_{2,0}^2(\Omega)$, 有

$$\| \boldsymbol{u} \|_2 \leqslant C(a_0) \| L_0 \boldsymbol{u} \|_0, \tag{11}$$

其中常数 $C(a_0)$ 是 a_0 的连续函数•

Elcrat[4] 的结果可以应用于方程

$$L\boldsymbol{u} - h(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{u}) \tag{12}$$

的解的存在性问题上, 其中 $L\boldsymbol{u} = a_{ij}\boldsymbol{u}_{x_i x_j} + a_i \boldsymbol{u}_{x_i}$, a_{ij}, a_i 如前所述, h 和 f 是连续函数•

为便于后面的讨论, 我们记

$$P\boldsymbol{u} = a_{ij}\boldsymbol{u}_{x_i x_j},$$

$$a_0(\boldsymbol{w}) = \inf_{x \in \Omega} h(\boldsymbol{w}), \quad a_1(\boldsymbol{w}) = \sup_{x \in \Omega} h(\boldsymbol{w}), \quad A = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} a_i^2,$$

$$B_{ijl} = (a_{ij}a_{kl} - a_{ik}a_{jl})_{x_k}, \; B = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 1 \leqslant i,j,l \leqslant n}} |B_{ijl}| \cdot$$

而且显然, 由 a_{ij}, a_i 的假设, A, B 和 S 是常数•

我们首先通过下面的引理验证强制条件(L)•

引理 3.1 不等式

$$\| \boldsymbol{u} \|_2 \leqslant M(\| \boldsymbol{u} \|_0 + \| L\boldsymbol{u} \|_0) \tag{13}$$

成立, 且有

$$M = 3\left(1 + \frac{1 + 4nA}{\gamma^2} + \frac{S^2 + n^4 B^2}{\gamma^4}\right) \cdot \tag{14}$$

证明 对 Elcrat[4] 的结论

$$\int_\Omega (L_0 \boldsymbol{u})^2 dx \geqslant 2\varepsilon\gamma^2(1 - \alpha)\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 dx + \left(a_0 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{S^2}{4\gamma^2\alpha}\right) 2\varepsilon \int_\Omega \boldsymbol{u}^2 dx,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 和 $\alpha > 0$, 我们令 $a_0 = 0$, $\alpha = 1/2$, $\varepsilon = 1$, 则有

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 dx \leqslant \frac{1}{\gamma^2}\int_\Omega (L\boldsymbol{u})^2 dx + \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{S^2}{\gamma^4}\right)\int_\Omega \boldsymbol{u}^2 dx \cdot \tag{15}$$

下面将 Elcrat[4] 的另一结论

$$\frac{\gamma^2}{2}\int_\Omega \sum |D^2 \boldsymbol{u}|^2 dx \leqslant \int_\Omega (P\boldsymbol{u})^2 dx + \frac{n^4 B^2}{2\gamma^2}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 dx,$$

及不等式

$$\int_\Omega (P\boldsymbol{u})^2 dx = \int_\Omega (L\boldsymbol{u} - a_i u_{x_i})^2 dx \leqslant 2\int_\Omega (L\boldsymbol{u})^2 + 2\int_\Omega (a_i u_{x_i})^2 dx,$$

和 $\int_\Omega (a_i u_{x_i})^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\sum a_i u_{x_i}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant n\int_\Omega \sum (a_i u_{x_i})^2 \mathrm{d}x \leqslant nA\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x.$

合并起来,得到不等式

$$\int_\Omega \sum |D^2 \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{\gamma^2}\int_\Omega (L\boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x + \left(\frac{4nA}{\gamma^2} + \frac{nB^2}{\gamma^4}\right)\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x.$$

由于 $\|L\boldsymbol{u}\|_0 = \sqrt{\int_\Omega (L\boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x}$, $\|\boldsymbol{u}\|_0 = \sqrt{\int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x}$ 和 $\|\boldsymbol{u}\|_2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle}$, 我们有

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \int_\Omega \sum |D^2\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\frac{4}{\gamma^2}\int_\Omega (L\boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x + \left(\frac{4nA}{\gamma^2} + \frac{n^4B^2}{\gamma^4} + 1\right)\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x,$$

再由(15)可得

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2 \leqslant \left(5 + \frac{4nA}{\gamma^2} + \frac{n^4B^2}{\gamma^4}\right)\frac{1}{\gamma^2}\int_\Omega (L\boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x +$$
$$\left[\left(1 + \frac{4nA}{\gamma^2} + \frac{n^4B^2}{\gamma^4}\right)\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{S^2}{\gamma^4}\right) + 1\right]\int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x \leqslant$$
$$9\left(1 + \frac{4nA}{\gamma^2} + \frac{n^4B^2}{\gamma^4}\right)\left(1 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{S^2}{\gamma^4}\right)\left(\int_\Omega (L\boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x\right) \leqslant$$
$$\left[3\left(1 + \frac{1 + 4nA}{\gamma^2} + \frac{S^2 + n^4B^2}{\gamma^4}\right)\right]^2 (\|L\boldsymbol{u}\|_0 + \|\boldsymbol{u}\|_0)^2.$$

于是 $\|\boldsymbol{u}\|_2 \leqslant M(\|\boldsymbol{u}\|_0 + \|L\boldsymbol{u}\|_0)$,

其中 $M = 3\left(1 + \frac{1 + 4nA}{\gamma^2} + \frac{S^2 + n^4B^2}{\gamma^4}\right).$ □

至于关系式

$$\|\cdot\|_0 \leqslant \|\cdot\|_2,$$

成立是显然的.

引理 3.2 假设 A1~A3, 且对所有 $\boldsymbol{w} \in L_2(\Omega)$ 有 $a_0(\boldsymbol{w}) > \sqrt{\lambda}S - \lambda\gamma^2$, 则

$$\lambda\gamma^2 > S^2/4\gamma^2,$$

而且不等式

$$\|\boldsymbol{u}\|_0 \leqslant C_0(\boldsymbol{w})\,\|(L - h(\boldsymbol{w}))\boldsymbol{u}\|_0$$

成立, 其中 $C_0(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{a_0(\boldsymbol{w}) + \lambda\gamma^2 - \sqrt{\lambda}S} + \frac{1}{\lambda\gamma^2 - S^2/4\gamma^2}.$

证明 Elcrat[4] 给出了有关 $\int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x$ 和 $\int_\Omega (L_0\boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x$ 的一些不等式, 即

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x \leqslant \left(a_0(\boldsymbol{w}) - \frac{S^2}{4\gamma^2}\right)^{-2}\int_\Omega (L_0\boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x,\quad a_0(\boldsymbol{w}) > \frac{S^2}{4\gamma^2}$$

和

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x \leqslant (\lambda\gamma^2 + a_0(\boldsymbol{w}) - \sqrt{\lambda}S)^{-2}\int_\Omega (L_0\boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x,\quad \sqrt{\lambda}S - \lambda\gamma^2 < a_0(\boldsymbol{w}) < \lambda\gamma^2.$$

因为条件 A3 蕴含了

$$\lambda\gamma^2 > S^2/4\gamma^2,$$

令 $\delta = \lambda\gamma^2 - S^2/4\gamma^2$, 则 δ 是个正数, 当 $a_0(\boldsymbol{w}) \geqslant \lambda\gamma^2$ 时, 我们有

$$a_0(\boldsymbol{w}) - S^2/4\gamma^2 \geqslant \lambda\gamma^2 - S^2/4\gamma^2 = \delta > 0,$$

所以不等式

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\delta^2}\int_\Omega (L_0 \boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x$$

成立•

合并两个不等式,我们有

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}^2 \mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{1}{(a_0(\boldsymbol{w}) + \lambda\gamma^2 - \sqrt{\lambda}S)^2} + \frac{1}{\delta^2}\right]\int_\Omega (L_0 \boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\left[\frac{1}{(a_0(\boldsymbol{w}) + \lambda\gamma^2 - \sqrt{\lambda}S)} + \frac{1}{\delta}\right]^2 \int_\Omega (L_0 \boldsymbol{u})^2 \mathrm{d}x,$$

此即所证结论•

以下是二阶椭圆型方程(12)的解的存在性的结论•

定理 3.3 假设 A1~ A3,且满足下列条件

(A) $h: L_2(\Omega) \to B(L_2(\Omega))$ 连续,

(B) 对所有 $\boldsymbol{w} \in L_2(\Omega)$ 有 $h(\boldsymbol{w}) > \sqrt{\lambda}S - \lambda\gamma^2$,

(C) $f: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ 连续且满足

$$\|f(\boldsymbol{w})\|_0 = O(\tau(\|\boldsymbol{w}\|_0)^{-1}),$$

其中 $$\tau(r) = \sup_{\|w\|_0 \leqslant r} \frac{|a_1(\boldsymbol{w})| + \lambda\gamma^2 - \sqrt{\lambda}S}{\min\{a_0(\boldsymbol{w}), 0\} + \lambda\gamma^2 - \sqrt{\lambda}S},$$

则方程(12)至少有一个解•

证明 由条件(A),定理 1.1 的条件(h1)满足• (h2)也满足•

由(B)和条件 A1~ A3,再由[4]中的定理,我们得出下列方程

$$L\boldsymbol{u} - h(\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{w}) \tag{16}$$

关于每个 $\boldsymbol{w} \in L_2(\Omega)$ 的唯一可解性,此即 $L - h(\boldsymbol{w})$ 可逆•

由引理3.2我们进一步可得

$$\|\boldsymbol{u}\|_0 \leqslant C_0(\boldsymbol{w}) \|(L - h(\boldsymbol{w}))\boldsymbol{u}\|_0$$

并且 $$C_0(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{a_0(\boldsymbol{w}) + \lambda\gamma^2 - \sqrt{\lambda}S} + \frac{1}{\lambda\gamma^2 - S^2/4\gamma^2}• \tag{17}$$

于是(h3)满足•

设 $$\tau_1(r) = \sup_{\|w\|_0 \leqslant r} \frac{|a_1(\boldsymbol{w})| + \lambda\gamma^2 - \sqrt{\lambda}S}{\min\{a_0(\boldsymbol{w}), 0\} + \lambda\gamma^2 - \sqrt{\lambda}S}$$

和 $$\tau_2(r) = \sup_{\|w\|_0 \leqslant r} K(\boldsymbol{w}), K(\boldsymbol{w}) = M\left[C_0(\boldsymbol{w})\left(1 + \sup_{u \in L_2(\Omega)} \frac{\|h(\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}\|_0}{\|\boldsymbol{u}\|_0}\right) + 1\right],$$

则由(17)和条件(B)我们有

$$K(\boldsymbol{w}) \leqslant M[C_0(\boldsymbol{w})(1 + \sup_\Omega |h(\boldsymbol{w})|) + 1] \leqslant$$

$$M\left[\left(\frac{1}{a_0(\boldsymbol{w}) + \lambda\gamma^2 - \sqrt{\lambda}S} + \frac{1}{\lambda\gamma^2 - S^2/4\gamma^2}\right) \times \right.$$

$$\left.(1 + \max\left\{|\sqrt{\lambda}S - \lambda\gamma^2|, |a_1(w)|\right\}) + 1\right] \leqslant$$

$$M\left[\frac{2}{\min\{a_0(\boldsymbol{w}),0\}+\lambda\gamma^2-\sqrt{\lambda}S}\left(1+\max\left\{|\sqrt{\lambda}S-\lambda\gamma^2|,|a_1(w)|\right\}\right)+1\right]\leqslant$$

$$M\left[\frac{2}{\min\{a_0(\boldsymbol{w}),0\}+\lambda\gamma^2-\sqrt{\lambda}S}\times\right.$$
$$\left.\left(1+\max\left\{|\sqrt{\lambda}S-\lambda\gamma^2|,|a_1(w)|+\lambda\gamma^2-\sqrt{\lambda}S\right\}\right)+1\right]\leqslant$$

$$M\left[\frac{2}{\min\{a_0(\boldsymbol{w}),0\}+\lambda\gamma^2-\sqrt{\lambda}S}M_1(|a_1(w)|+\lambda\gamma^2-\sqrt{\lambda}S)+1\right]\leqslant$$

$$2MM_1M_2\frac{|a_1(\boldsymbol{w}|+\lambda\gamma^2-\sqrt{\lambda}S)}{\min\{a_0(\boldsymbol{w}),0\}+\lambda\gamma^2-\sqrt{\lambda}S},$$

其中 $M_1=1+\dfrac{1}{\lambda\gamma^2-\sqrt{\lambda}S}$, $M_2=2$• 于是

$$\tau_2(r)\leqslant 2MM_1M_2\tau_1(r),$$

此即

$$\tau_1(r)^{-1}=O(\tau_2(r)^{-1})\cdot$$

再由条件(C),可知条件(f)满足•

定理证毕• □

4 二阶椭圆型方程例子

本节给出形式为

$$a_{ij}u_{x_ix_j}+a_iu_{x_i}-h(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}=f(\boldsymbol{u})$$

的具体方程

$$\Delta u+\sum u_{x_i}-u\exp\left[\int_\Omega \boldsymbol{u}^2\mathrm{d}x\sin\boldsymbol{u}\right]+2u=\exp\left[-2\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\sin u\right],\tag{18}$$

其中有界区域 $\Omega\in R^4$ 为 $\prod_{i=1}^{4}[-\pi,\pi]$•

对于该方程易知 $\gamma=1$, $S=1$, 和 $\lambda=\inf\left[\left(\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}x\right)\Big\backslash\left(\int_\Omega\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}x\right)\right]=4$, 则 A1~ A3 满足•

因为 $h(\boldsymbol{u})=\exp\left[\int_\Omega\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}x\sin\boldsymbol{u}\right]-2$, 定理 3.3 的条件(A)和(B)显然满足•

应用条件(C)中的 $\tau(r)$ 的定义, 我们有

$$\tau(r)=\sup_{\|w\|_0\leqslant r}\frac{|\sup_\Omega h(\boldsymbol{w})|+2}{\min\{\inf_\Omega h(\boldsymbol{w}),0\}+2}=$$
$$\sup_{\|w\|_0\leqslant r}\left[\exp\left[\int_\Omega\boldsymbol{w}^2\mathrm{d}x\right]\left(\left|\exp\left[\int_\Omega\boldsymbol{w}^2\mathrm{d}x\right]-2\right|+2\right)\right],$$

当 $r<\sqrt{\ln 2}$, 则

$$\tau(r)=\sup_{\|w\|_0\leqslant r}\left[\exp\left[\int_\Omega\boldsymbol{w}^2\mathrm{d}x\right]\left(4-\exp\left[\int_\Omega\boldsymbol{w}^2\mathrm{d}x\right]\right)\right]=\exp[r^2](4-\exp[r^2])\leqslant 4,$$

而当 $r\geqslant\sqrt{\ln 2}$,

$$\tau(r)=\sup_{\|w\|_0\leqslant r}\exp\left[2\int_\Omega w^2\mathrm{d}x\right]=\exp[2r^2]\geqslant 4,$$

于是

$$\tau(r)=\begin{cases}\exp[r^2](4-\exp[r^2]) & (0\leqslant r<\sqrt{\ln 2}),\\ \exp[2r^2] & (r\geqslant\sqrt{\ln 2})\cdot\end{cases}$$

因为

$$\|f(w)\|_0=\exp\left[-2\|w\|_0^2\right]\|\sin w\|_0\leqslant$$
$$\exp\left[-2\|w\|_0^2\right]\sqrt{\int_\Omega\mathrm{d}x}=4\pi^2\exp\left[-2\|w\|_0^2\right],$$

且 $w\neq 0$,

故

$$\|f(w)\|_0=O(\tau(\|w\|_0)^{-1}),$$

即(C)条件满足•

于是方程(18)至少有一个解•

[参 考 文 献]

[1] Kannan R, Locker J. On a class of nonlinear boundary value problems[J]. J Differential Equations, 1977, **26**(1): 1—8.

[2] Bates P W. Hilbert space methods for nonlinear elliptic equations[J]. J Differential Equations, 1979, **32**(2): 250—257.

[3] Hellwig G. Partial Differential Equations[M]. New York: Blaisdell, 1964.

[4] Elcrat A R. Constructive Existence for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients[J]. SIAM J Math Analysis, 1974, **5**(4): 663—672.

[5] Alexiades V, Elcrat A R, Schaefer P W. Existence theorems for some nonlinear fourth order elliptic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1980, **4**(4): 805—813.

[6] Agmon S. Lectures on Elliptic Boundary Value Problems[M]. Princeton, New Jersey: D Van Nostrand Company, Inc, 1965.

Existence of Solutions for Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems

SHAO Rong, NIU xin, SHEN Zu_he

(1. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China;

2. Department of Mathematics, Fuyang Teacher's College, Fuyang, Anhui 236032, China)

Abstract: Hilbert space method is applied to a class of semilinear second order elliptic boundary value problems and the existence of solutions is obtained with some restrictions.

Key words: Hilbert space; coercivity condition; compact; imbedding mapping; elliptic equation