

文章编号: 1000-0887(2003) 01-0083-06

基于 Lanczos 方法的结构动力学灵敏度分析^{*}

李 书, 王 波, 胡继忠

(北京航空航天大学 飞机设计研究所, 北京 100083)

(沈惠申推荐)

摘要: 利用数学理论得到结构动力学重特征值的灵敏度表达式, 从而解决了奇异性问题。然后, 为降低计算工作量, 基于 Lanczos 方法得到降阶的结构系统, 从而得到降阶的灵敏度分析近似解。用一个算例证明的方法正确性

关键词: 结构动力学; 灵敏度分析; 有限元方法; 特征值; 特征向量

中图分类号: TU311. 3; V214. 33 文献标识码: A

引 言

由于灵敏度分析在结构动力学, 优化设计和控制系统设计等方面有重要的地位, 并且可能还是其中一项耗费时间的工作, 计算灵敏度吸引了众多人的研究, 并且在过去几十年里取得了许多成果, Adelman 和 Haftka^[1] 曾经对灵敏度问题作了很好的总结, 也指出了应用中应注意的问题。近年来, 关于灵敏度问题的研究更加深入。

灵敏度是特征值和特征向量关于设计参数的导数。众所周知, 在重特征值出现的点, 特征值是不可微函数。当出现多个重特征值时, 问题将变得更加复杂, 而且这种情形在实际问题中是不可避免的, 比如结构对称的情况。1976 年, Nelson^[2] 提出了一个计算特征向量导数的有效的方法, 尽管 Nelson 方法是有效的, 但它不适合有重特征值的情况。一些研究人员^[3-5] 试图拓展推广 Nelson 方法以达到计算重特征值情形下的特征向量导数的目的。不幸的是后来的文章^[6-7] 几乎总能指出前面文章中的不足之处。

本文将数学成果^[8] 应用于灵敏度的分析, 虽然可以解决重特征值情形下灵敏度奇异性问题, 但是在分析复杂结构系统时, 计算量很大。为解决模型的规模、计算精度和耗时的矛盾, 文章[9] 利用 Lanczos 矢量对复杂结构动力系统进行降阶, 显然复杂结构系统的模态被截断, 原来系统的某些性能将失去, 这无疑带来截断误差。但对大多数工程动力学和屈曲问题而言, 这种影响并不十分严重。利用 Lanczos 方法对原结构系统进行降阶具有计算量较小、精度较高的特点, 成为求解大型特征值问题的有效方法。本文将 Lanczos 降阶方法与灵敏度数学表达式结合, 进行灵敏度分析, 既解决了重特征值情形下灵敏度的奇异性问题, 又达到了减少计算量的目的。

* 收稿日期: 2001_01_13; 修订日期: 2002_08_10

作者简介: 李书(1965—), 男, 江苏镇江人, 副教授, 博士(E-mail: lsbuaa@public.fhnet.cn.net)。

1 重特征值灵敏度分析

为了获得重特征值情形下关于任意参数的灵敏度, 基于文献[10]中的隐函数定理推出如下一个推论, 因为从物理的角度考虑不允许设计参数为零, 那样无任何意义, 在实际中就是按下面推论做的。

推论 如果实值函数

$$f_i(\xi_1, \dots, \xi_u, \eta_1, \dots, \eta_v) \quad (i = 1, \dots, u) \text{ 在 } R^{u+v} \text{ 的一点 } Z = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_u, \eta_1^*, \dots, \eta_v^* \right\} \text{ 的某个邻域内是 } u + v \text{ 个实变量的实解析函数, 并且有}$$

$$f_i(\xi_1, \dots, \xi_u, \eta_1, \dots, \eta_v) = 0 \quad (i = 1, \dots, u),$$

和

$$\det \left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_u)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_u)} \right] \bigg|_{\substack{\xi_i = 0 \quad (i = 1, \dots, u) \\ \eta_j = \eta_j^* \quad (j = 1, \dots, v)}} \neq 0,$$

则方程

$$f_i(\xi_1, \dots, \xi_u, \eta_1, \dots, \eta_v) = 0 \quad (i = 1, \dots, u),$$

有唯一解

$$\xi_i = q_i(\eta_1, \dots, \eta_v) \quad (i = 1, \dots, u),$$

并且当 $\eta_j = \eta_j^*$, ($j = 1, \dots, v$) 时, $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_u = 0$, $\xi_i = g_i(\eta_1, \dots, \eta_v)$ ($i = 1, \dots, u$) 在 R^v 的一个点 $p = (\eta_1, \dots, \eta_v)$ 的某个邻域内解析。

关于推论的严格的数学证明过程和文献[11]中定理证明完全一致。上述推论可以认为在灵敏度分析和设计参数之间建立起物理意义上的关系。这个推论理论上是重要的, 能够用于推导关于物理参数的灵敏度的表达式, 需要强调的是, 在这里不是为了重复上述定理和推论的证明过程, 而是为了根据上述推论, 提出能够给出灵敏度表达式的方法及其应用。

对于结构动力学的特征方程

$$\mathbf{K}\Phi = \Omega^2 \mathbf{M}\Phi \quad (1)$$

其中 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 为频率矩阵 Φ 为模态矩阵和。

令 $\lambda = \omega_i^2$, 即 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 不失一般性, 设 λ_1 为 r 重根,

$$\Phi^T \mathbf{K}(p) \Phi = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$\Phi^T \mathbf{M}(p) \Phi = \mathbf{I}, \quad \lambda \notin \lambda(\Lambda_2),$$

$$\text{其中 } \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix}, \quad \Phi = [\Phi_1, \Phi_2],$$

$$\Phi_1 = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r), \quad \Phi_2 = (\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_m).$$

$\Phi_1 = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)$ 定义为由 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ 张成的子空间, 令

$$\mathbf{D}_i \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{K}(p)}{\partial p_j} \right]_{p=p^*} - \lambda \left[\frac{\partial \mathbf{M}(p)}{\partial p_j} \right]_{p=p^*}, \quad (2)$$

基于文[12]中定义 2.3 及本文推论, 重特征值 λ_1 灵敏度的表达式可以写为

$$\lambda_1' \equiv \rho(\Phi_1^T \mathbf{D}_j \Phi_1), \quad (3)$$

上式被定义为重特征值 λ_i 关于参数 p_j 的灵敏度,

$$\Phi_1' = \Phi_2 (\lambda_i I - \Lambda_2)^{-1} \Phi_2^T D_j \Phi_1, \quad (4)$$

被定义为对应于重特征值 λ_i 的特征向量子空间 Φ_1 的灵敏度。

这一关于重特征值灵敏度的问题归结为计算方程 (3) 和 (4), 即在子空间 Φ_1 中给出了一个灵敏度数值计算的显式格式, 该方法数学上是在重特征值对应的特征向量张成的子空间上实现灵敏度的计算, 从根本上解决了重特征值情形灵敏度计算的奇异性问题。

由 $\lambda_i = \omega_i^2$, 很容易得到下式

$$\omega_i' = \frac{\lambda_i'}{2\omega_i} \quad (5)$$

式 (5) 即是频率的灵敏度。

2 基于 Lanczos 方法灵敏度计算格式

2.1 基于 Lanczos 向量的降阶方法

上一节给出了求灵敏度的表达式, 具有一般性, 当结构系统很复杂时, 计算工作量很大。本文利用 Lanczos 向量实现系统的降阶。对于结构动力学的特征方程 (1), 一般而言, 矩阵 M 是对称正定阵, 根据 Cholesky 方法存在如下分解形式

$$M = LL^T \quad (6)$$

其中 L 为非奇异下三角阵。

从而结构动力学特征方程 (1) 可改写为

$$K\Phi = \Lambda LL^T \Phi, \quad (7)$$

或

$$L^{-1}KL^{-T}(L^T \Phi) = \Lambda(L^T \Phi), \quad (8)$$

记 $A = L^{-1}KL^{-T}$, 有

$$A(L^T \Phi) = \Lambda(L^T \Phi),$$

令 $X = L^T \Phi$

$$AX = \Lambda X \quad (9)$$

根据 Lanczos 方法, 从任意单位向量 v_1 出发, 由下式定义的正交 Lanczos 向量

$$v_{i+1} = \beta_i v_{i+1} = Av_i - \alpha_i v_i - \beta_{i-1} v_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

可构造出 v_2, \dots, v_m , 使得 $V = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ 为正交阵, T 为对称三对角阵, 三角矩阵 T 和 Lanczos 向量矩阵 V 有如下关系

$$T = V^T A V,$$

并且

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \dots & 0 \\ & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \beta_{m-1} \\ & & & & \alpha_m \end{bmatrix},$$

对称

其中 α_i 和 β_i 是 Lanczos 标量参数, 由下面方程确定

$$\alpha_i = v_i^T A v_i \quad (11)$$

和

$$\beta_i = (\mathbf{v}_{i+1}^T \mathbf{v}_{i+1}) / \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i \quad (12)$$

对于对称三对角阵 T , 求出其特征值矩阵 Λ' 和相应的正交特征向量矩阵 Y , 有

$$\begin{cases} TY = \Lambda' Y, \\ Y^T Y = I. \end{cases} \quad (13)$$

由 T 的特征值矩阵 Λ' 和相应的正交特征向量矩阵 Y , 根据[12] 可得

$$\Lambda \approx \Lambda', \quad (14)$$

$$X \approx VY, \quad (15)$$

则广义特征值问题的归一化特征向量

$$\Phi = L^{-T} X \approx L^{-T} VY.$$

2.2 基于 Lanczos 方法的灵敏度计算

将(14)、(15)式分别代入(3)、(4)两式, 得

$$D_j \equiv \left[\frac{\partial \mathbf{K}(p)}{\partial p_j} \right]_{p=p^*} - \lambda_1 \left[\frac{\partial \mathbf{M}(p)}{\partial p_j} \right]_{p=p^*}, \quad (16)$$

重特征值 λ_1 灵敏度的表达式可以写为

$$\dot{\lambda}_1 \equiv \rho(\Phi_1^T D_j \Phi_1) = \rho(Y^T V^T L D_j L^{-T} VY), \quad (17)$$

特征向量关于参数 p_j 的灵敏度, 为

$$\dot{\Phi}_1 = L^{-T} VY_2 (\lambda_1 I - \Lambda_2)^{-1} Y_2^T V^T L D_j L^{-T} VY_1. \quad (18)$$

2.3 Lanczos 矢量的正交化

为了提高 Lanczos 矢量的计算精度, 采用重正交化技术, 按照 Schmidt 正交化方法

$$\mathbf{v}_{i+1}^{(s+1)} = \mathbf{v}_{i+1}^{(s)} - \sum_{j=1}^i \mathcal{E}_{ij}^{(s)} \mathbf{v}_j, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

$$\mathcal{E}_{ij}^{(s)} = \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_{i+1}^{(s)} \quad (20)$$

3 算 例

文献[5]中的算例是灵敏度分析的一个典型重特征值情形算例。为模拟多自由度系统, 以一个四单元悬臂梁模型作为算例, 见图 1。其中长度为 L , 惯性矩分别为 I_z, I_y , 面积为 A , 并且 $L = I_z = I_y = 1, A = 420$, 利用 Lanczos 降阶方法计算关于 I_z 的灵敏度, 与文献[14] 的结果的比较见图 2。

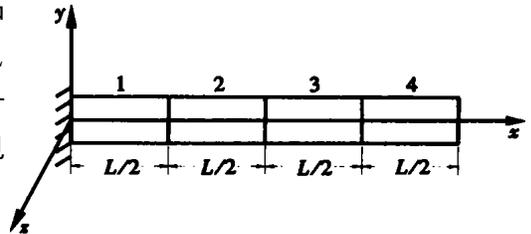


图 1

4 总结与讨论

本文的方法给出了计算灵敏度的公式, 所给出的表达式避免了由于重特征值的出现造成灵敏度奇异带来的困难, 并且该方法不需要迭代。对于工程问题, 借助 Lanczos 向量对系统进行降阶是获得较精确的结果和提高的计算效率一条有效途径, 虽然 Lanczos 降阶变换不是相似变换, 可能改变原有的特征谱, 但从许多文献如[9]中可以看到 Lanczos 方法求解大型特征值问题精度很高, 即使是改变原有的特征谱也是很有限制的, 而文献[14]建议在特征值十分靠近时, 按重特征值计算灵敏度更好, 因此用 Lanczos 降阶方

法方法计算灵敏度是合理的。

1) 图 2 结果表明 Lanczos 降阶方法是计算灵敏度的有效方法, 即节省了计算工作量, 提高了效率, 又能够满足一定的精度要求。

2) 对于广义特征值问题

$$K\Phi = \lambda M\Phi,$$

也可以通过刚度矩阵 K 进行 Cholesky 分解, 见[9],

$$K = LL^T,$$

其中 L 为非奇异下三角阵

$$x_i = L^T \Phi,$$

$$Ax_i = \lambda x_i,$$

$$A = L^{-1}KL^{-T}.$$

从而得到灵敏度的计算格式。

尽管提出的方法是针对结构动力学问题的, 该方法当然还可以应用到一般的特征值问题, 有实际意义。

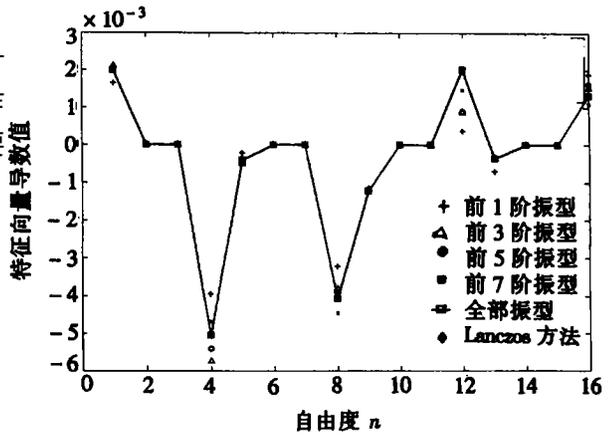


图 2 特征向量导数计算结果比较

[参 考 文 献]

[1] Adelman H M, Haftka R T. Sensitivity analysis of discrete structural systems[J]. AIAA Journal, 1986, 24(5): 823—832.

[2] Nelson R B. Simplified calculation of eigenvector derivatives[J]. AIAA Journal, 1976, 14(9): 1201—1205.

[3] Ojalvo I U. Efficient computation of modal sensitivities for system with repeated frequencies[J]. AIAA Journal, 1988, 26(3): 361—366.

[4] Mills_Curran W C. Calculation of eigenvector derivatives for structures with repeated eigenvalues [J]. AIAA Journal, 1988, 26(7): 867—871.

[5] Daily R L. Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues[J]. AIAA Journal, 1989, 27(4): 486—491.

[6] Mills_Curran W C. Comment on ‘Eigenvector derivatives for structures with repeated eigenvalues’ [J]. AIAA Journal, 1990, 28(5): 18—46.

[7] ZHANG De_weng, WEI Fu_shang. Computation of eigenvector derivatives with repeated eigenvalues using a complete modal space[J]. AIAA Journal, 1995, 33(9): 1749—1753.

[8] SUN Ji_guang. A note on local behavior of multiple eigenvalues[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1989, 10(10): 533—541.

[9] Ojalvo I U. Vibration modes of large structures by an automatic matrix_reduction method[J]. AIAA Journal, 1970, 8(7): 1234—1239.

[10] SUN Ji_guang. Sensitivity analysis of multiple eigenvalues I[J]. Journal of Computational Mathematics, 1988, 6(1): 28—38.

[11] 庄亚栋. 多元函数[M](上册). 北京: 人民教育出版社, 1982.

[12] Ojalvo I U. Proper use of Lanczos vectors for large eigenvalue problems[J]. Computers & Structures, 1985, 20(1—3): 115—120.

- [13] Fox R L, Kapoor M P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors[J]. AIAA Journal, 1968, 6 (12): 2426—2429.
- [14] 李书, 张晓谷. 结构动力学中具有重特征值的灵敏度分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2000, 26 (5): 577—580.
- [15] 孙继广. 重特征值敏度的数值计算[J]. 计算数学, 1992, 14(1): 10—19.

Sensitivity Analysis Based on Lanczos Algorithm in Structural Dynamics

LI Shu, WANG Bo, HU Ji zhong

(Institute of Aircraft Design, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The sensitivity calculating formulas in structural dynamics was developed by utilizing the mathematical theorem and new definitions of sensitivities. So the singularity problem of sensitivity with repeated eigenvalues is solved completely. To improve the computational efficient, the reduction system is obtained based on Lanczos vectors. After incorporating the mathematical theory with the Lanczos algorithm, the approximate sensitivity solution can be obtained. A numerical example is presented to illustrate the performance of the method.

Key words: structural dynamics; sensitivity analysis; finite element method; eigenvalues; eigenvectors