

文章编号: 1000_0887(2003) 02_0205_10

动脉中血液脉动流的一种分析方法^{*}

柳兆荣, 徐刚, 陈泳, 滕忠照, 覃开蓉

(复旦大学生物力学实验室, 上海 200433)

(戴世强推荐)

摘要: 动脉中的血液流动被分解为平衡状态(相当于平均压定常流状态)和叠加在平衡状态上的周期脉动流, 利用 Fung 的血管应变能密度函数分析血管壁在平衡状态下的应力-应变关系, 确定相对于平衡状态血管作微小变形所对应的周向弹性模量和轴向弹性模量, 并建立在脉动压力作用下相应的管壁运动方程, 与线性化 Navier-Stokes 方程联立, 求得血液流动速度和血管壁位移的分析表达式, 详细讨论血管壁周向和轴向弹性性质差异对脉搏波、血液脉动流特性以及血管壁运动的影响

关键词: 血液脉动流; 脉搏波; 应变能密度函数; 零应力状态

中图分类号: O351.2 **文献标识码:** A

引言

动脉中血液的周期性脉动流将导致弹性动脉管壁的径向和轴向运动, 反之, 动脉管壁的弹性运动又将影响动脉中的血液流动。对动脉中血液脉动流这样的流-固耦合问题, Womersley^[1] 通过联立求解线性化 Navier-Stokes 方程和薄壁弹性管方程, 成功地求得血液流动速度和血管壁位移的分析表达式, 从而为分析动脉系统的结构与功能之间的定量关系奠定了基础, 成为定量描述血液循环系统的重要工具。

Fung 指出, 与无生命材料不同的是有生命血管存在残余应力与残余应变, 血管的零应力状态不是圆柱管, 而是具有一定张开角的扇形体^[2], 而且表征血管零应力状态的张开角沿血管轴向和周向的变化正体现了在一定载荷下血管壁生长的非均匀性^[3], 分析血管的变形必须从血管的零应力状态出发^[4]。那么, 如何在 Womersley 理论中考虑有生命血管的这种特性, 以及考虑这种特性将会给 Womersley 理论的结果带来什么影响呢?

为了回答这个问题, 本文作如下处理。首先, 将动脉中的血液流动分解为平衡状态(即平均压所对应的定常流状态)和叠加在平衡状态上的周期性脉动流。虽然血管壁从零应力状态到在体平衡状态的变形必须考虑为非线性的有限变形, 但是叠加在平衡状态上的周期性振荡相对于该平衡状态的变形可认为是小变形, 依然服从线弹性的 Hooke 定律。其次, 从血管的零应力状态出发分析血管壁的应变(即 Green 应变), 并利用 Fung 提出的血管壁应变能密度函

* 收稿日期: 2000_05_26; 修订日期: 2002_09_24;

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19732003); 国家自然科学基金青年基金资助项目(19702002)

作者简介: 柳兆荣(1937—), 男, 福建泉州人, 教授, 博士生导师, 长期从事生物力学的研究和教学工作。

数^[4], 导得平衡状态血管的应力_应变关系以及在平均压作用下血管的变形特性。接着, 将所得平衡状态血管的应力_应变关系应用到相对于平衡状态作微小振荡的线性变形上, 从而定义出相应的弹性模量。由于在一定载荷下有生命血管的周向和轴向生长可能是不同的, 因而可定义出相应的周向和轴向弹性模量。最后, 将所得的血管壁在平衡状态下的周向和轴向弹性模量应用到血管壁运动方程, 并与线性化 Navier-Stokes 方程联立, 求得相应的流速和血管壁脉动位移的分析表达式。

文章以 Chuong 和 Fung^[5] 给出的兔胸主动脉的实验数据和材料常数为例进行数值计算, 详细讨论了血管壁的周向和轴向弹性性质的差异对动脉中血液脉动流特性以及血管壁运动的影响, 并与 Womersley 理论相应结果进行比较。结果表明, 平衡状态血管壁周向和轴向弹性性质的差异对脉搏波、血流速度以及血管壁脉动位移将产生一定的影响。由于 Womersley 理论不考虑平衡状态血管壁周向和轴向弹性性质的差异, 因而对脉搏波波速比和每波长传输值的计算结果偏低, 对血流速度以及血管壁脉动位移的计算结果也有一定影响。

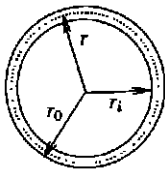
1 基本方程

动脉中血液的周期性脉动, 将导致弹性动脉管壁的周期性振荡, 动脉管壁的弹性运动又反过来影响动脉中的血液流动。因此, 动脉中血液脉动流问题是一个轴对称的流_固耦合问题。现采用柱坐标系, 以 x 和 r 分别表示平衡状态轴向和径向坐标, u 和 v 分别表示血液流动的轴向和径向速度分量, p 为压力, η 和 ρ 分别为血液的粘度和密度, t 表示时间。利用 Womersley 理论^[1] 的相同假定, 血液流动满足线性化 Navier-Stokes 方程

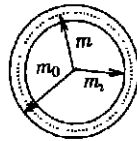
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right). \end{cases} \quad (1)$$

动脉中血液的周期性运动将导致动脉管壁的周期性振荡。若以 ξ 和 ζ 分别表示动脉管壁相对于平衡状态(相当于平均压所对应的定常状态)的径向和轴向位移, 则在平衡状态动脉管壁($r = r_m$)上, 位移 ξ 和 ζ 与流速 u 和 v 之间满足耦合条件

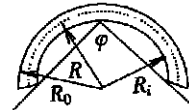
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u \Big|_{r=r_m}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = v \Big|_{r=r_m}. \quad (2)$$



(a) 载荷状态



(b) 无载荷状态



(c) 零应力状态

图1 动脉管壁的3种状态

为了得弹性动脉壁位移 ξ 和 ζ 所满足的方程, 让我们考察有生命动脉壁的3种受力状态: 载荷状态、无载荷状态和零应力状态。当将载荷状态的血管(见图1(a), 以 r 表示其径向坐标)在垂直轴向方向剪开, 即成无载荷状态的血管环(图1(b), 以 m 表示其径向坐标); 当进一步将血管环沿径向剪开, 即成零应力状态的张开角为 φ 的扇形圆弧(见图1(c), 以 R 表示其径

向坐标)• 与无生命材料不同的是血管的无载荷状态不是零应力状态^[2]• 因此分析血管壁的应变必须从零应力状态出发^[4]• 换言之, 必须考察相对于零应力状态动脉管壁在平衡状态的变形及其对动脉管壁脉动位移的可能影响•

为了确定血管在平衡状态下的弹性性质, 以便于建立管壁在平衡状态附近的脉动方程, 首先必须从零应力状态出发, 分析血管壁在平衡状态下的非线性应力_应变关系• 为此, 采用 Fung 提出的血管壁应变能密度函数^[4,8]:

$$\rho_0 W = 0.5e^Q + \frac{H_0}{2}[(1 + 2e_\theta)(1 + 2e_x)(1 + 2e_r) - 1], \quad (3)$$

其中

$$Q = a_1 e_\theta^2 + a_2 e_x^2 + a_3 e_r^2 + 2a_4 e_\theta e_x + 2a_5 e_x e_r + 2a_6 e_r e_\theta, \quad (4)$$

ρ_0 为血管壁的质量密度(一般认为 $\rho_0 = \rho$), $c, a_1 \sim a_6$ 为材料常数, H_0 是 Lagrange 因子(其数值由边界条件确定), e_θ, e_x 和 e_r 分别为血管壁周向、轴向和径向的 Green 应变, 且有

$$e_i = 0.5(\lambda_i^2 - 1) \quad (i = r, \theta, x), \quad (5)$$

式中 $\lambda_\theta, \lambda_x, \lambda_r$ 分别为血管壁相对于其零应力状态的周向、轴向和径向主伸长比• 由图 1 的几何关系, 不难得平衡状态动脉管相对于其零应力状态的周向伸长比为

$$\lambda_{\theta m} = \frac{\pi r_m}{(\pi - \varphi) R} \quad (6)$$

平衡状态下的血管同时存在着较大的轴向伸长比, 设为 λ_{xm} • 由于血管壁是不可压缩材料, 则平衡状态下血管的径向伸长比可表为

$$\lambda_{r m} = \frac{1}{\lambda_{\theta m} \lambda_{x m}}, \quad (7)$$

从而可得到血管壁周向、轴向和径向的 Cauchy 应力表达式分别为

$$\begin{cases} \sigma_\theta = c(1 + 2e_\theta)(a_1 e_\theta + a_4 e_x + a_6 e_r) \exp Q + H_0 \\ \sigma_x = c(1 + 2e_x)(a_4 e_\theta + a_2 e_x + a_5 e_r) \exp Q + H_0 \\ \sigma_r = c(1 + 2e_r)(a_6 e_\theta + a_5 e_x + a_3 e_r) \exp Q + H_0 \end{cases} \quad (8)$$

为了导得血管平衡状态下内压力 p_m 与内半径 r_m 之间的关系, 现将表达式(8)代入平衡方程

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (9)$$

利用相应的边界条件

$$\begin{cases} \sigma_r = -p_m & \text{当 } r = r_m \\ \sigma_r = 0 & \text{当 } r = r_m + h \end{cases} \quad (10)$$

可得压力 p_m 与内半径 r_m 之间的关系为

$$p_m = \int_{r_m}^{r_m+h} [(1 + 2e_\theta)(a_1 e_\theta + a_4 e_x + a_6 e_r) - (1 + 2e_r)(a_6 e_\theta + a_5 e_x + a_3 e_r)] c \exp Q \frac{dr}{r} \quad (11)$$

再由血管壁的不可压缩条件得内半径 r_m 与血管壁厚度 h 的关系

$$h = \sqrt{\frac{\pi - \varphi}{\pi \lambda_{x m}} (R_e^2 - R_i^2) + r_m^2} - r_m \quad (12)$$

便可由平衡状态条件下的压力 p_m 求得所对应的血管内半径 r_m 和厚度 h •

接着,考虑到相对于平衡状态,血管壁的变形是微小的,所对应的应力_应变关系可认为是线性的。因此可利用平衡状态的应力_应变关系定义出适合于平衡状态邻近微小振荡的周向和轴向线性模量分别为

$$E_{\theta m} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial(\lambda_m - 1)} = \lambda_m \frac{\partial \alpha_0}{\partial e_{\theta}}, \quad E_{x m} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial(\lambda_m - 1)} = \lambda_m \frac{\partial \alpha_x}{\partial e_x} \quad (13)$$

将关系式(8)中的应力表达式代入上式,即可求得血管壁在平衡状态附近作线性变形所对应的周向和轴向的线弹性模量分别为

$$\begin{cases} E_{\theta m} = 2c\lambda_m \left[(a_1 e_{\theta} + a_4 e_x + a_6 e_r) + 0.5a_1(1 + 2e_{\theta}) + \right. \\ \quad \left. (1 + 2e_{\theta})(a_1 e_{\theta} + a_4 e_x + a_6 e_r)^2 \right] \exp Q, \\ E_{x m} = 2c\lambda_m \left[(a_4 e_{\theta} + a_2 e_x + a_5 e_r) + 0.5a_2(1 + 2e_x) + \right. \\ \quad \left. (1 + 2e_x)(a_4 e_{\theta} + a_2 e_x + a_5 e_r)^2 \right] \exp Q. \end{cases} \quad (14)$$

这样,当同时考虑血管内流动血液的压力 p 、血管壁上的周向和轴向脉动应力以及血液的粘性摩擦力的作用,并考虑血管周围结缔组织对血管壁轴向和径向运动的惯性影响以及对血管的轴向弹性约束,最后可得动脉管壁径向和轴向位移所满足的方程为

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{p}{H} - \frac{E_{\theta m} h}{(1 - \sigma^2)H} \left(\frac{\sigma}{r_m} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\xi}{r_m^2} \right), \quad (15)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{E_{x m} h}{(1 - \sigma^2)H} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{r_m} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \frac{\eta}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_m} - \frac{K}{H} \zeta, \quad (16)$$

$$\text{式中} \quad K = \rho_0 H \omega_0^2, \quad (17)$$

σ 表示泊松比, H 表示计及血管周围结缔组织惯性效应的血管壁等效厚度, ω_0 表示计及血管周围结缔组织弹性效应的血管微元固有频率。

显然,若令血管在平衡状态下周向和轴向弹性模量相同,即 $E_{\theta m} = E_{x m} = E$,则上述动脉管壁脉动位移所满足的方程将化为类似于 Womersley 理论所对应的动脉管壁运动方程。血管壁运动方程(15)和(16)是考虑到有生命血管的特殊性质,即血管存在残余应变,血管的平衡状态相对于零应力状态的非线性变形,以及对应于平衡状态微小变形的周向和轴向弹性模量可能不同等因素得到的,因而是 Womersley 理论的拓广。

2 方程的解

为了求解上述的血液运动方程(1)和管壁运动方程(15)和(16),首先考虑到动脉管中血液流动和管壁脉动是周期性的,由方程(1)和(15)、(16)描述的动脉管中各脉动参量的谐波分量将以脉动波速 c 沿血管轴向传播,而且在传播过程中以衰减因子 β 衰减。因而当引进复波速^[6]

$$c^* = \left(\frac{1}{c} - \frac{j\beta}{\omega} \right)^{-1}, \quad (18)$$

各参量的谐波分量可表为

$$p = A e^{j\omega(t-x/c^*)}, \quad u = u_1(r) e^{j\omega(t-x/c^*)}, \quad v = v_1(r) e^{j\omega(t-x/c^*)}, \quad (19)$$

$$\zeta = \zeta_1 e^{j\omega(t-x/c^*)}, \quad \xi = \xi_1 e^{j\omega(t-x/c^*)}, \quad (20)$$

式中 ω 为谐波圆频率, $j = \sqrt{-1}$, A 、 u_1 、 v_1 、 ξ_1 和 ζ_1 均为复数以体现上述各有关谐波分量的幅值和相位的变化。

接着, 将谐波关系式(19)代入血液运动方程(1), 可得

$$u = \left[C_1 \frac{J_0(j^{3/2} \alpha r)}{J_0(j^{3/2} \alpha)} + \frac{A}{\rho c^*} \right] e^{j\omega(t-x/c^*)}, \quad (21)$$

$$v = \frac{j\omega r_m}{2c^*} \left[C_1 \frac{2J_1(j^{3/2} \alpha r)}{j^{3/2} \alpha J_0(j^{3/2} \alpha)} + \frac{A_Y}{\rho c^*} \right] e^{j\omega(t-x/c^*)}, \quad (22)$$

式中 J_0, J_1 分别表示零阶和一阶 Bessel 函数, $\alpha = r_m \sqrt{\rho\omega/\eta}$ 为 Womersley 数, $y = r/r_m$ 为无量纲径向坐标, C_1 为待定系数。

为了确定上述速度表达式中的待定系数 C_1 和复波速 c^* , 现将所得速度表达式(21)和(22)代入血管壁耦合条件(2)和壁管运动方程(15)和(16), 可得

$$C_1 + \frac{1}{\rho c^*} A - j\omega \xi_1 = 0, \quad (23)$$

$$\frac{j\omega r_m F_{10}}{2c^*} C_1 + \frac{j\omega r_m}{2\rho c^{*2}} A - j\omega \xi_1 = 0, \quad (24)$$

$$A + \left(\mathcal{H}\omega^2 - \frac{B_0 h}{r_m^2} \right) \xi_1 + \frac{j\omega B_0 h \sigma}{r_m c^*} \zeta_1 = 0, \quad (25)$$

$$\frac{j^3 \rho \omega r_m F_{10}}{2} C_1 - \frac{j\omega B_x h \sigma}{r_m c^*} \xi_1 + \left(\mathcal{H}\omega^2 - \frac{B_x h \omega^2}{c^{*2}} - K \right) \zeta_1 = 0, \quad (26)$$

式中

$$F_{10} = \frac{2J_1(j^{3/2} \alpha)}{j^{3/2} \alpha J_0(j^{3/2} \alpha)}, \quad B_0 = \frac{E_{0m}}{1 - \sigma^2}, \quad B_x = \frac{E_{xm}}{1 - \sigma^2}. \quad (27)$$

这是一组关于 A, C_1, ξ_1 和 ζ_1 的齐次代数方程组, 对于任何一组有物理意义的解, A, C_1, ξ_1, ζ_1 不能同时为零, 因此方程组(23)~(26)的系数行列式满足

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\rho c^*} & 0 & -j\omega \\ \frac{j\omega r_m F_{10}}{2c^*} & \frac{j\omega r_m}{2\rho c^{*2}} & -j\omega & 0 \\ 0 & 1 & \mathcal{H}\omega^2 - \frac{B_0 h}{r_m^2} & \frac{j\omega B_0 h \sigma}{r_m c^*} \\ \frac{j^3 \rho \omega r_m F_{10}}{2} & 0 & \frac{j\omega B_x h \sigma}{r_m c^*} & \mathcal{H}\omega^2 - \frac{B_x h \omega^2}{c^{*2}} - K \end{vmatrix} = 0. \quad (28)$$

展开这个行列式并经适当整理, 可得到关于复波速 c^* 的方程

$$\left(\frac{B_0 h}{\rho_m c^{*2}} \right)^2 (1 - F_{10})(1 - \sigma^2) - \frac{B_0 h}{\rho_m c^{*2}} \left[\left(\frac{D}{2} - \mathcal{D} - \sigma \right) F_{10} + 2 + \frac{D}{\rho_m} (1 - F_{10}) \Omega \right] + D \left[\frac{\Omega}{\rho_m} + F_{10} \right] = 0, \quad (29)$$

进而得复波速表达式为

$$\frac{c_0^2}{c^{*2}} = G \pm \sqrt{G^2 - (1 - \sigma^2)J}, \quad (30)$$

式中

$$G = \frac{\left(\frac{D}{2} - \mathcal{D} - \sigma \right) F_{10} + 2 + D(1 - F_{10})K^*}{4(1 - F_{10})}, \quad (31)$$

$$J = \frac{2K^* + F_{10}}{4(1 - F_{10})} D \quad (32)$$

$$D = \frac{E_{0m}}{E_{xm}}, \quad \Omega = H - \frac{K}{\omega^2}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{E_{0m}h}{2\rho_m}}, \quad K^* = \frac{\Omega}{\rho_m} \quad (33)$$

由关系式(23)~(26)消去待定系数 ξ_1 和 ζ_1 , 从而得

$$N = \frac{C_1}{A/\rho c^*} = \frac{2\sigma - 1}{F_{10} - 2\sigma} + \frac{1 - \sigma^2}{F_{10} - 2\sigma} \cdot \frac{c^*{}^2}{c_0^2} \quad (34)$$

将此关系式代入速度表达式(21)和(22), 可进一步得到动脉中血液脉动流的速度表达式为

$$u = \frac{A}{\rho c^*} \left[1 + N \frac{J_0(j^{3/2}\alpha y)}{J_0(j^{3/2}\alpha)} \right] e^{j\omega(t - x/c^*)} \quad (35)$$

$$v = \frac{jA\omega r_m}{2\rho c^*{}^2} \left[y + N \frac{2J_1(j^{3/2}\alpha y)}{j^{3/2}\alpha J_0(j^{3/2}\alpha)} \right] e^{j\omega(t - x/c^*)} \quad (36)$$

考虑到动脉中可能存在反射波, 通常压力可表为正、反向传播的压力谐波之和

$$p = A_1 e^{j\omega(t - x/c^*)} + A_2 e^{j\omega(t + x/c^*)} \quad (37)$$

即得血流速度用考虑反射波存在时的压力和压力梯度表示为

$$u = \frac{1}{j\rho\omega} \left[1 + N \frac{J_0(j^{3/2}\alpha y)}{J_0(j^{3/2}\alpha)} \right] \left[-\frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (38)$$

$$v = \frac{j\omega r_m}{2\rho c^*{}^2} \left[y + N \frac{2J_1(j^{3/2}\alpha y)}{j^{3/2}\alpha J_0(j^{3/2}\alpha)} \right] p \quad (39)$$

注意到血管壁运动的耦合条件(2), 可进一步得血管壁径向和轴向的脉动位移 ξ 和 ζ 与压力 p 和压力梯度 $\partial p/\partial x$ 之间的关系式分别为

$$\xi = \frac{r_m(1 + NF_{10})}{2\rho c^*{}^2} p, \quad \zeta = \frac{1 + N}{\rho\omega^2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (40)$$

正如前面已指出的, 动脉壁受到周围结缔组织的约束, 表现为对血管壁的径向和轴向运动有附加的惯性效应以及对血管壁存在轴向弹性约束。Womersley^[1]为反映这两种效应的综合作用, 引进血管壁约束参数 K^* 为

$$K^* = \frac{\Omega}{\rho_m} = \frac{H}{r_m} \left[1 - \frac{\omega_b^2}{\omega^2} \right] \quad (41)$$

通常 K^* 在 $1 \sim -\infty$ 之间取值。当 $K^* \rightarrow -\infty$ 表示血管壁受周围结缔组织轴向极限强约束, 这时, 复波速(30)简化为

$$\frac{c_0}{c^*} = \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{1 - F_{10}}} \quad (42)$$

而且如关系式(34)所表达的参数 N 将简化为

$$N = -1 \quad (43)$$

这样血液脉动流的速度谐波分量简化为

$$u = \frac{1}{j\rho\omega} \left[1 - \frac{J_0(j^{3/2}\alpha y)}{J_0(j^{3/2}\alpha)} \right] \left[-\frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (44)$$

$$v = \frac{j\omega r_m}{2\rho c^*{}^2} \left[y - \frac{2J_1(j^{3/2}\alpha y)}{j^{3/2}\alpha J_0(j^{3/2}\alpha)} \right] p \quad (45)$$

以及动脉管壁的径向和轴向脉动位移可简化为

$$\xi = \frac{r_m(1 - \sigma^2)}{2\rho_0^2} p, \quad \zeta = 0 \quad (46)$$

3 数值结果与讨论

为了具体了解上述分析模型对 Womersley 理论结果的影响情况,下面首先以 Chuong 和 Fung^[5] 给出的兔胸主动脉实验数据为例,分析血管平衡状态的特性。他们给出的血管零应力状态参数和包含在应变能密度函数中的材料常数分别为,内半径 $R_i = 3.92 \text{ mm}$, 外半径 $R_0 = 4.51 \text{ mm}$, 张开角 $\varphi = 108.6^\circ$, 材料常数 $c = 22.4 \text{ kPa}$, $a_1 = 1.0672$, $a_2 = 0.4775$, $a_3 = 0.0499$, $a_4 = 0.0903$, $a_5 = 0.0585$, $a_6 = 0.0042$ 。

对于兔,平衡状态的主动脉长度一般为 $l_m = 250 \text{ mm}$, 轴向伸长比为 $\lambda_m = 1.6$, 取平均血压为 $p_m = 13.5 \text{ kPa}$, 对应的平衡状态血管轴心($y = 0$)处血流速度取为 $u_m = 45 \text{ cm/s}$ 。数值求解方程(11),可求得对应的血管平衡状态的内半径 $r_m = 2.58 \text{ mm}$, 厚度 $h = 0.23 \text{ mm}$, 血管中壁的周向伸长比 $\lambda_{\theta m} = 1.61$; 而从关系式(14)求得的平衡状态血管壁周向和轴向弹性模量 $E_{\theta m}$ 和 E_{xm} 、周向和轴向弹性模量比 D , 进而求得 Moens_Korteweg 波速 c_0 以及利用 Womersley 理论(相当于 $D = 1$, 即 $E_{\theta m} = E_{\theta x} = E$) 进行计算时的相应数值见表1所列。计算中取 $\sigma = 0.5$, $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 及 $\eta = 0.004 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ 。

表 1 本文分析模型与 Womersley 理论所采用的血管平衡状态参量的比较

	$E_{\theta m}/\text{kPa}$	E_{xm}/kPa	$D(= E_{\theta m}/E_{xm})$	$c_0/(\text{m/s})$
本文分析模型	936.5	302.1	3.1	6.34
Womersley 理论	936.5	936.5	1.0	6.34

从表1的计算结果可见,对于平衡状态血管壁,本文分析模型所得周向弹性性质和轴向弹性性质有一定差异,周向弹性模量为轴向弹性模量的3倍左右。表中 Moens_Korteweg 波速 c_0 是利用血管壁周向弹性模量计算得到的(关系式(33)),所以本文分析模型 c_0 值与 Womersley 理论的相应值相同。

下面讨论本文分析模型对脉搏波以及血流速度和血管壁位移的影响,并比较与 Womersley 理论相应结果的差异。

脉搏波传输特性

由关系式(30)知波速比 c_0/c^* 是复数,可表示为如下形式

$$\frac{c_0}{c^*} = X - jY, \quad (47)$$

由此得脉搏波波速比和每波长传输分别为^[1,6]

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{X}, \quad e^{-2\pi(Y/X)}. \quad (48)$$

为确定起见,在下面的讨论中,将血管壁的轴向约束参数取为 $K^* = -0.5$ 。对于前面给出的平衡状态(即 $r_m = 2.58 \text{ mm}$, $h = 0.23 \text{ mm}$ 和 $E_{\theta m} = 936.5 \text{ kPa}$), 利用关系式(48)可算得波速比 c/c_0 和每波长传输 $e^{-2\pi(Y/X)}$ 随 α 数的变化(见图2(a)、(b))。为了便于比较,图中同时给出相应的 Womersley 理论所得的结果。正如图中结果所表明的,本文分析模型($D \neq 1$)得到的

波速比和每波长传输值将大于 Womersley 理论 ($D = 1$) 得到的相应值。对通常 $\alpha = 5.2$ 的情形, 两种分析模型得到的波速比差异约为 5%, 而每波长传输值差异约为 15%。可见, Womersley 有关各向同性血管壁模型在动脉管的分析中可能低估了脉搏波的波速比和每波长传输值。

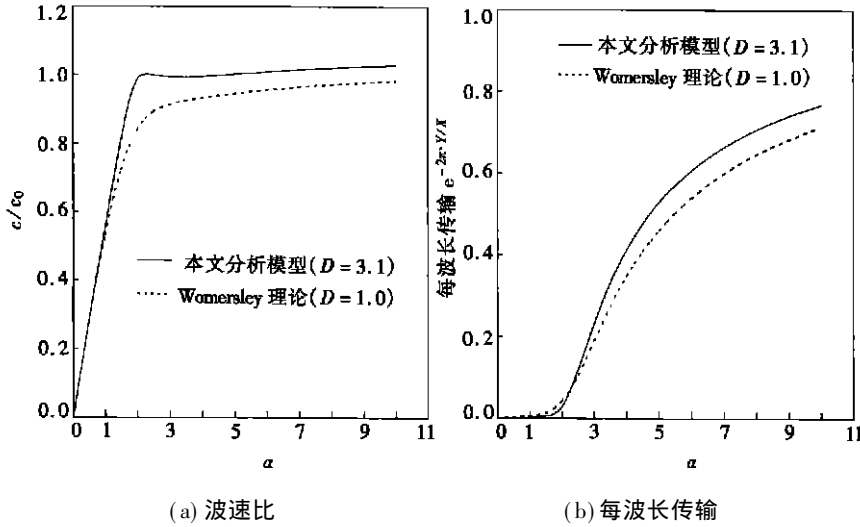


图2 本文分析模型所得脉搏波特性与 Womersley 理论相应结果的比较 ($K^* = -0.5$)

表2 本文分析模型所得血管轴 ($y = 0$) 处血流速度 $u(0, t)$, 血管壁径向位移 ξ 和轴向位移 ζ 与 Womersley 理论相应结果的比较 ($\alpha = 5.2, K^* = -0.5$)

		本文分析模型 ($D \neq 1$)	Womersley 理论 ($D = 1$)	本文模型与 Womersley 理论的结果差异 (%)
$u(0, t)$	Δu_m	18.2	18.1	1.2
	相位差 $\phi/(\circ)$	- 7.29	- 8.06	9.5
ξ	$\Delta r_m/(\%)$	6.68	7.57	11.8
	相位差 $\phi/(\circ)$	+ 7.76	- 2.40	223.3
ζ	$\Delta l_m/(\%)$	0.22	0.27	18.5
	相位差 $\phi/(\circ)$	- 18.27	- 70.06	73.9

注: 表中相位差是相对于压力 p 的相位差, “+” 表示相位超前, “-” 表示相位滞后, Δ 表示幅值, 差异值均取绝对值。

血流速度和血管壁位移

为了讨论本文分析模型对血液流速的影响, 下面不妨仅考虑血管轴 ($y = 0$) 处的血流速度, 由关系式 (38) 和 (39) 知

$$u(0, t) = \frac{1}{j\omega} \left[1 + \frac{N}{J_0(j^{3/2}\alpha)} \right] \left[-\frac{\partial p}{\partial x} \right], \tag{49}$$

$$v(0, t) = 0 \tag{50}$$

利用关系式 (49) 可算得血管轴 ($y = 0$) 上的轴向流速谐波 $u(0, t)$ 在一个心动周期中的变化情况。在计算中取心动周期 $T = 0.4 \text{ s}$ ($\omega = 5\pi \text{ s}^{-1}$), 脉动压力 $p = 3.5e^{j5\pi t} \text{ kPa}$ 以及脉动压力梯度幅值 1.2 kPa/m 。正如图 3 和表 2 所显示的, 本文分析模型 ($D \neq 1$) 所得血管轴 ($y = 0$) 处血流速度 $u(0, t)$ 幅值与 Womersley 理论 ($D = 1$) 的相应结果差异很小, 但是相位改变较明

显, 相对于压力谐波的相位滞后减小了 9.5%。

当将相应结果代入关系式(40), 可算得血管壁径向和轴向脉动位移 ξ 和 ζ , 表 2 和图 4(a)、(b) 给出了所算结果。为了便于比较, 表 2 和图 4 中同时给出用 Womersley 理论(即 $D = 1$) 所算得的相应结果。正如结果所表明的, 本文分析模型所预示的血管壁径向和轴向脉动位移幅值将较明显地小于 Womersley 理论所预示的相应结果。与 Womersley 理论结果相比, 本文分析模型预示的血管壁径向位移幅值减小 11.8%, 而超前于压力谐波的相位却增大 2 倍以上, 预示的血管壁轴向位移幅值减小 18.5%, 而滞后于压力谐波的相位减小 73.9%。

上面对本文分析模型计算结果与 Womersley 理论所得相应结果进行比较, 可见, 平衡状态血管壁周向和轴向弹性性质的差异对脉搏波、血流速度以及血管壁脉动位移将产生一定的影响。由于

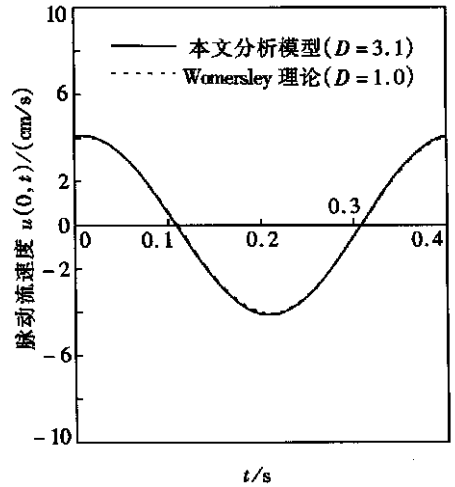


图 3 本文分析模型所得血管轴 ($y = 0$) 处血流速度 $u(0, t)$ 与 Womersley 理论相应结果的比较 ($\alpha = 5.2, K^* = -0.5$)

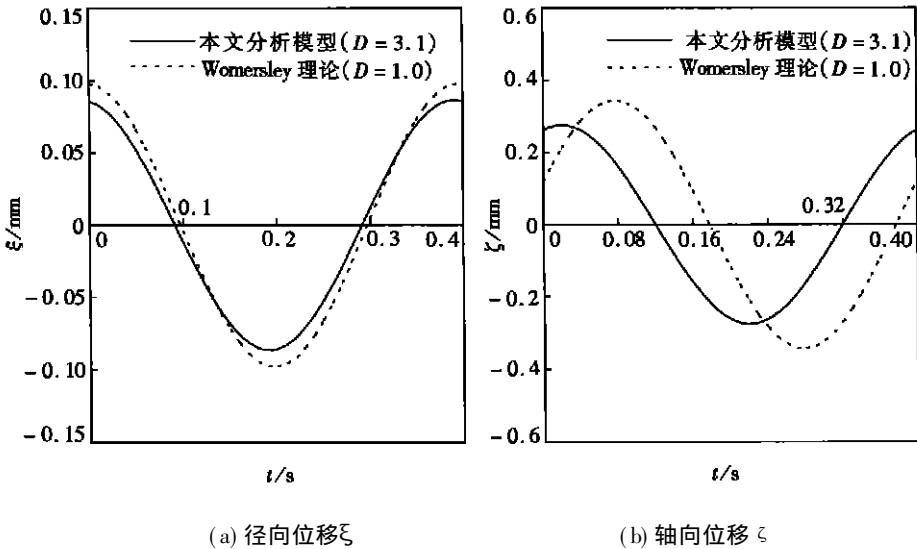


图 4 本文分析模型所得血管壁位移与 Womersley 理论相应结果的比较 ($\alpha = 5.2, K^* = -0.5$)

Womersley 理论不考虑平衡状态血管壁周向和轴向弹性性质的差异, 因而对脉搏波波速比和每波长传输值的计算结果偏低, 对血流速度以及血管壁脉动位移的计算结果也有一定影响。最后指出, 前面是对平均压为 $p_m = 13.5 \text{ kPa}$ 情况下进行讨论的。事实上, 由于血管在不同平均压作用下将对应不同的平衡状态, 也即具有相同零应力状态和材料常数的血管, 在不同平衡状态时所对应的血管内半径、厚度、周向弹性模量和轴向弹性模量等参数都将发生改变, 从而进一步对脉动压力作用下的脉搏波传播、血流速度以及血管壁位移等产生影响, 利用前面方法可进行同样的分析和讨论。

[参 考 文 献]

- [1] Womersley J R. An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries[R]. Wright Air Development Center of Ohio, Technical Report, TR 56_614, 1957.
- [2] Fung Y C. Biodynamics: Circulation [M]. New York: Springer_Verlag, 1984, 56—60.
- [3] Liu S Q, Fung Y C. Zero_stress state of arteries[J]. J Biomech Engng, 1988, **110**: 82—84.
- [4] 冯元桢. 生物力学——运动、流动、应力和生长[M]. 成都: 四川教育出版社, 1993, 674—681.
- [5] Chuong C J, Fung Y C. On residual stress in arteries[J]. J Biomech Engng, 1986, **108**: 189—192.
- [6] 柳兆荣, 李惜惜. 血液动力学原理和方法[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1997, 76—93.
- [7] 冯元桢. 生物力学——活组织的力学特性[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1986, 314—318.
- [8] 柳兆荣. 心血管流体力学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1986, 213—239.

An Analysis Model of Pulsatile Blood Flow in Arteries

LIU Zhao_rong, XU Gang, CHEN Yong,
TENG Zhong_zhao, QIN Kai_rong

(Biomechanics Laboratory, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China)

Abstract: Blood flow in artery was treated as the flow under equilibrium state (the steady flow under mean pressure) combined with the periodically small pulsatile flow. Using vascular strain energy function advanced by Fung, the vascular stress-strain relationship under equilibrium state was analyzed and the circumferential and axial elastic moduli were deduced that are expressed while the arterial strains around the equilibrium state are relatively small, so that the equations of vessel wall motion under the pulsatile pressure could be established here. Through solving both the vessel equations and the linear Navier-Stokes equations, the analytic expressions of the blood flow velocities and the vascular displacements were obtained. The influence of the difference between vascular circumferential and axial elasticities on pulsatile blood flow and vascular motion was discussed in details.

Key words: pulse wave; pulsatile blood flow; strain energy function; zero stress state