应用数学和力学,第 24 卷 第 4 期(2003 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2003)04-0423-11

# Liénard 系统无穷边值问题解的存在性*

肖海滨

(宁波大学 理学院 数学系,浙江 宁波 315211)

(李继彬推荐)

**摘要:** 讨论 Liénard 系统无穷边值问题单调解和非单调解的存在性. 利用平面动力系统理论,通过对称变换或拟对称变换比较系统所定义的向量场并构造系统的不变区域,以此证明系统连结轨道的存在性,获得边值问题解存在的一系列充分条件. 特别地,当源函数为双稳函数时,系统存在无穷多单调解.

**关 键 词:** 反应扩散方程; Liénard 系统; 行波解; 连结轨道

**中图分类号:** O175　　**文献标识码:** A

## 引　言

本文讨论 Liénard 系统无穷边值问题

$$\begin{cases} u'' - f(u)u' + g(u) = 0, \\ u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性,其中 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 和 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 具有一阶连续导数.

系统(1)解的存在性问题与某些抛物型反应扩散方程行波解的研究有关. 例如,描述虫口增长与核反应堆中子流等现象的著名的数学模型 Fisher-Kolmogorov 方程[1~3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(1-u) \qquad x\in\mathbf{R}, t>0, \tag{2}$$

其中 $k$ 和 $a$ 是正常数,以及生物化学中常见的数学模型[3~5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h(u)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + g(u), \tag{3}$$

等,考虑(2)和(3)形如 $u(x-ct) = u(\xi)(\xi = x-ct)$ 的行波解. 将 $u = u(\xi)$ 代入(2)和(3),分别得到

$$k^2u'' + cu' + a(1-u)u = 0 \tag{4}$$

和

$$u'' + (c + h'(u)) + g(u) = 0. \tag{5}$$

考虑满足条件 $\lim\limits_{\xi\to-\infty} u(\xi) = 0$ 和 $\lim\limits_{\xi\to+\infty} u(\xi) = 1$ 的解(这里只考虑扭波情形),这就导致(1)的特殊例子

$$\begin{cases} k^2u'' + cu' + a(1-u)u = 0, \\ u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = 1 \end{cases}$$

---

* 收稿日期: 2002-01-21; 修订日期: 2003-01-17

作者简介: * 肖海滨(1973—),男,江西南康人,硕士(E-mail:hbxiaokm@sohu.com).

和

$$\begin{cases} u'' + (c + h'(u))u' + g(u) = 0, \\ u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = 1. \end{cases}$$

根据平面动力系统理论,(1)的解存在的一个必要条件是 $g(0) = g(1) = 0$. 最近,L. Malaguti 和 C.Marcelli[6]考虑过下列无穷边值问题

$$\begin{cases} u'' - f(u,u') + g(u) = 0, \\ u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = 1 \end{cases} \tag{6}$$

的单调解的存在性,其中 $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 和 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数,$g(0) = g(1) = 0, g(u) > 0$, $u \in (0,1)$. 作者们假设:

$$D^+g(0) < +\infty,\ f(u,0) = 0 \qquad u \in (0,1),$$

$$f(u,v) \geqslant 2v\sqrt{\sup_{u\in(0,1]}\frac{g(u)}{u}} \qquad u \in (0,1), v \geqslant 0.$$

在这组条件下,认为(6)必存在一个单调不减解. 这个结果是值得商榷的. 根据 Aronson, Weiberger[4]中的定理4.1,存在 $c^*$ 满足

$$2\sqrt{g'(0)} \leqslant c^* \leqslant 2\sqrt{\sup_{u\in(0,1]}\frac{g(u)}{u}},$$

当 $c \geqslant c^*$ 时,无穷边值问题

$$\begin{cases} u'' - cu' + g(u) = 0, \\ u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

存在唯一严格单调解,其中 $g \in C^1[0,1], g(0) = g(1) = 0, g(u) > 0, u \in (0,1)$. 显然,当 $c$ 充分大时,(7)满足文[6]中给出的上述3个条件. 但文[6]在证明上述结果的过程中需要构造的解序列 $u_n(t)$ 满足条件 $u_n(0) = 1 - 1/n, u_n' = 0$. 注意到 $u(0) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - 1/n)$,即 $u(t)$ 在有限点 $t = 0$ 达到1. 这与 $u(+\infty) = 1$ 发生矛盾.

文[6]仅仅假设 $f$ 和 $g$ 是变元的连续函数,不能保证 Cauchy 问题的存在唯一性. 我们认为 $f$ 和 $g$ 的光滑性适当加强是必要的.

下面我们研究(1)的解的存在性. 首先将 $u'' - f(u)u' + g(u) = 0$ 化为与之等价的一阶微分方程组

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = f(u)v - g(u). \end{cases} \tag{8}$$

我们恒假设 $f, g \in C^1, g(0) = g(1) = 0$,即(8)至少存在两个奇点(0,0)和(1,0).

## 1 单调解的存在性

记 $\Omega = \{(u,v) \mid 0 < u < 1, v > 0\}$, 显然, (1)的单调解和(8)的相轨线之间有以下关系.

**命题 1** (1)有单调解的充分必要条件是(8)在 $\Omega$ 中有从(0,0)到(1,0)的连结轨道.

因此,我们只须研究(8)是否在相平面的区域 $\Omega$ 中存在从(0,0)到(1,0)的连结轨道,就可确定(1)是否存在单调解. 在(0,0)、(1,0)处,(8)的线性化系统的系数矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & f(0) \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(1) & f(1) \end{pmatrix}.$$

两矩阵对应的特征值分别为

$$k_{2,1} = \frac{f(0) \pm \sqrt{f^2(0) - 4g'(0)}}{2}, \quad \mu_{2,1} = \frac{f(1) \pm \sqrt{f^2(1) - 4g'(1)}}{2}. \tag{9}$$

因此,我们有以下结论:

1. 当 $g'(0) > 0, f^2(0) \geqslant 4g'(0)$ 时,$(0,0)$ 为结点,且当 $f(0) > 0$ 时是不稳定的,当 $f(0) < 0$ 时是稳定的;当 $f^2(0) < 4g'(0)$,$f(0) \neq 0$ 时,$(0,0)$ 是焦点;当 $g'(0) < 0$ 时,$(0,0)$ 是鞍点.

2. 当 $g'(1) > 0, f^2(1) \geqslant 4g'(0)$ 时,$(1,0)$ 为结点,且当 $f(1) > 0$ 时是不稳定的,当 $f(1) < 0$ 时是稳定的;当 $f^2(1) < 4g'(1)$,$f(1) \neq 0$ 时,$(1,0)$ 是焦点;当 $g'(1) < 0$ 时,$(1,0)$ 是鞍点.

根据以上分析,方程组(8)在相平面的区域 $\Omega$ 中有从$(0,0)$到$(1,0)$的连结轨道,只可能在以下4种情形出现.

1) $(0,0)$为不稳定结点,$(1,0)$为鞍点; 2) $(0,0)$为不稳定结点,$(1,0)$为稳定结点; 3) $(0,0)$,$(1,0)$均为鞍点; 4) $(0,0)$为鞍点,$(1,0)$均为稳定结点.

通过变换 $\bar{u} = 1 - u, \bar{v} = -v$,情形4)可以化为情形1),所以,我们只须考虑情形1)、2)、3).

**定理2** 设

(ⅰ) $g(u) > 0, u \in (0,1)$ 和 $g'(0) > 0$, $g'(1) < 0$;

(ⅱ) $f(u) \geqslant 2\sqrt{\sup\limits_{u \in (0,1]} \dfrac{g(u)}{u}} \qquad u \in [0,1]$, (10)

则(1)存在唯一的严格单调解.

**证** 在定理条件下,$(0,0)$是不稳定结点,$(1,0)$是鞍点. 在$(0,0)$处除两条轨线当 $t \to -\infty$ 切于直线 $v = k_2 u$ 进入原点$(0,0)$外,其余轨线当 $t \to -\infty$ 时切于直线 $v = k_1 u$ 进入原点$(0,0)$,这里的 $k_1$、$k_2$ 以及下面的 $\mu_1$ 由(9)确定. 在$(1,0)$处,其在上半平面的稳定流形 $\Gamma$ 当 $t \to +\infty$ 切于直线 $v = \mu_1(u-1)$ 进入奇点$(1,0)$. 因此,若能证明 $\Gamma$ 同时为$(0,0)$的不稳定流形,则 $\Gamma$ 即为从$(0,0)$到$(1,0)$的连结轨道.

为此,我们在 $\Omega$ 中构造一个负向不变区域 $\Omega_0$,它由3条直线围成,即 $v = 0$、$u = 1$ 和 $v = k_0 u (k_0 > 0)$,如图1所示. 在直线段 $v = 0 (0 < u < 1)$,$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = 0$,$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -g(u) < 0$;在直线段 $u = 1 (v > 0)$,$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = v > 0$,$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(1)v > 0$. 令 $m_0 = \min\limits_{u \in [0,1]} f(u) > 0$,$\alpha = \sup\limits_{u \in [0,1]} g(u)/u > 0$,由 $m_0 \geqslant 2\sqrt{\alpha}$ 知,不等式 $k^2 - m_0 k + \alpha \leqslant 0$ 有正根 $k_0$,从而有 $m_0 - \alpha/k_0 \geqslant k_0$. 因此,在直线段 $v = k_0 u (0 < u < 1)$,$\mathrm{d}v/\mathrm{d}u = f(u) - g(u)/k_0 u \geqslant m_0 - \alpha/k_0 \geqslant k_0$,即在上述3条直线段上,(8)所定义的向量场有图1所示的方向,$\Omega_0$ 确为(8)的一个负向不变区域.

现考虑$(1,0)$上半平面的稳定流形 $\Gamma$,由于 $\Gamma$ 正向在 $\Omega_0$ 中. 这样 $\Gamma$ 的 $\alpha$ 极限点也应在 $\Omega_0$ 中,但 $\Omega_0$ 中不存在除$(0,0)$以外的 $\alpha$ 极限点,即 $\Gamma$ 的 $\alpha$ 极限点只能为$(0,0)$,这样 $\Gamma$ 即为$(0,0)$到$(1,0)$的连结轨道. 这就证明了连结轨道的存在性.

连结轨道的唯一性由双曲鞍点$(1,0)$在上半平面内稳定流形的唯一性即得. 证毕.

由定理2的证明过程知,在其它条件不变的前提下,$g'(0) = 0$ 时结论也成立,即有下面的定理.

**定理3** 假设

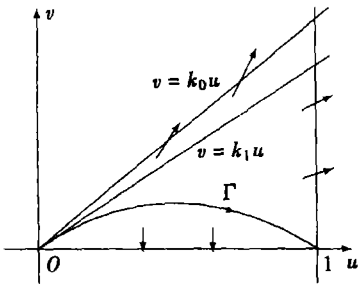


图 1 三角形负向不变区域

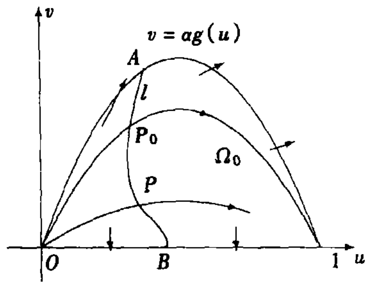


图 2 弓形负向不变区域

(ⅰ) $g(u) > 0, u \in (0,1), g'(1) < 0$;

(ⅱ) $f(u) \geqslant 2\sqrt{\sup\limits_{u\in(0,1]}\dfrac{g(u)}{u}}, u \in [0,1]$,

则(1)存在唯一的严格单调解.

**推论 4** 假设

(ⅰ) $g''(u) < 0, u \in [0,1]$;

(ⅱ) $f(u) \geqslant 2\sqrt{g'(0)}, u \in [0,1]$,

则(1)存在唯一的严格单调解.

**注 1** 在定理 2 的假设下,可以证明当 $t \to -\infty$ 时,$\Gamma$ 进入(0,0)的切线方向斜率为 $k_1$. 事实上,假设其切线的斜率为 $\bar{k}$,则有 $\bar{k} \leqslant k_0 \leqslant (m_0 + \sqrt{m_0^2 - 4\alpha})/2 \leqslant k_2$. 故只要 $m_0 < f(0)$ 或 $g'(0) < \alpha = \sup\limits_{u\in(0,1]}(g(u)/u)$,就可以保证 $\bar{k} < k_2$. 因此,$\Gamma$ 随 $t \to -\infty$ 时不可能沿直线 $v = k_2 u$ 进入(0,0),而只能沿直线 $v = k_1 u$ 进入(0,0).

我们也可以利用 Gilbary[5,7]的方法来构造一个不变区域以处理结鞍情形(包括 $g'(0) = 0$). 令 $z = v - \alpha g(u)$,其中 $\alpha > 0$,则有

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_{z=0} = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \alpha g'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{z=0} =$$

$$\alpha f(u)g(u) - \alpha^2 g'(u)g(u) - g(u) = (\alpha f(u) - \alpha^2 g'(u) - 1)g(u),$$

若存在 $\alpha > 0$ 使得 $(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)_{z=0} \geqslant 0$,对任意的 $u \in [0,1]$,$\alpha f(u) - \alpha^2 g'(u) - 1 \geqslant 0$,则可以确定一条连结轨道.

事实上,在曲线 $v = \alpha g(u)$ 上,(8)的轨线方向指向该曲线之外,从而曲线 $v = \alpha g(u)(0 < u < 1)$ 与 $v = 0$ 围成一个负向不变区域 $\Omega_0$,如图 2 所示. 现在曲线段 $v = \alpha g(u)(0 < u < 1)$ 上任取一点 $A$,在直线段 $v = 0(0 < u < 1)$ 上任取一点 $B$,用 $l$ 表示连结点 $A$ 和点 $B$ 的曲线段,$P$ 为 $l$ 上任一点,用 $f(P,t)$ 表示当 $t = 0$ 时过点 $P$ 的轨线. 于是,$\lim\limits_{t\to-\infty} f(P,t) = (0,0)$,而当 $t \to +\infty$ 时,$f(P,t)$ 要么趋于(1,0),要么离开 $\Omega_0$. 因此,根据解对初值的连续依赖性,必存在 $l$ 上的某点 $P_0$ 使得 $\lim\limits_{t\to-\infty} f(P_0,t) = (0,0)$,$\lim\limits_{t\to+\infty} f(P_0,t) = (0,1)$,即 $f(P_0,t)$ 为(0,0)到(1,0)的连结轨道,而该轨道即为鞍点(1,0)上半平面的整条稳定流形 $\Gamma$. 综合以上分析,我们有下面的定理.

**定理 5** 假设

(ⅰ) $g(u) > 0, u \in (0,1)$;

(ⅱ) 存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\alpha f(u) - \alpha^2 g'(u) - 1 \geqslant 0 \qquad u \in (0,1), \tag{11}$$

则(1)存在严格单调解,又若 $g'(1) < 0$,则严格单调解是唯一.

**注 2** 设 $g$ 是[0,1]上的凸函数,则条件(10)意味着条件(11)为真. 事实上,记 $\alpha = \sqrt{1/g'(0)}$,由条件(10)得

$$f(u) \geqslant 2\sqrt{\sup_{u\in(0,1]}\frac{g(u)}{u}} = 2\sqrt{g'(0)} = \frac{1}{\alpha} + \alpha g'(0) \geqslant \frac{1}{\alpha} + \alpha g'(u) \qquad (u \in (0,1)),$$

即对任意的 $u \in (0,1)$, $\alpha f(u) - \alpha^2 g'(u) - 1 \geqslant 0$.

将 $\alpha$ 改为[0,1]上某个连续可微的正函数 $\phi(u)$,对定理 5 中的条件(10)进行推广,可得到下面的定理.

**定理 6** 假设

(ⅰ) $g(u) > 0, u \in (0,1)$;

(ⅱ) 存在 $\phi(u) \in C^1, \phi(u) > 0, u \in [0,1]$ 使得

$$\phi(u)f(u) - \phi^2(u)g'(u) - \phi'(u)\phi(u)g(u) - 1 \geqslant 0 \qquad (u \in (0,1)),$$

则(1)存在严格单调解,又若 $g'(0) < 0$,则该单调解是唯一的.

下面的定理保证(8)有无穷多从(0,0)到(1,0)的连结轨道.

**定理 7** 假设

(ⅰ) $g'(0) > 0, g'(1) > 0, g(u_0) = 0, g'(u_0) < 0, 0 < u_0 < 1$;

(ⅱ) $f(0) > 2\sqrt{g'(0)}, f(1) < -2\sqrt{g'(1)}$,存在 $\alpha > 0, \beta < 0$ 使得

$$\alpha^2 g'(u) - \alpha f(u) + 1 < 0 \qquad u \in [0, u_0), \tag{12}$$

$$\beta^2 g'(u) - \beta f(u) + 1 < 0 \qquad u \in (u_0, 1], \tag{13}$$

则(1)必存在无穷多个严格单调解.

**证** 在定理条件下,(0, 0)是不稳定简单结点,(1, 0)是稳定简单结点,$(u_0, 0)$ 为简单鞍点.

首先,我们证明,鞍点 $(u_0,0)$ 位于上半平面的稳定流形 $\Gamma_1$ 随 $t \to -\infty$ 必进入(0,0),不稳定流形 $\Gamma_2$ 随 $t \to +\infty$ 必进入(1,0). 事实上,令 $z = v - \alpha g(u)$, $u \in [0, u_0]$,于是由条件(12)知

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_{z=0} = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \alpha g'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{z=0} =$$
$$(\alpha f(u) - \alpha^2 g'(u) - 1)g(u) \geqslant 0,$$

即在曲线 $v = \alpha g(u)(0 < u < u_0)$ 上,(8)的轨线方向指向该曲线之外,而在 $v = 0$ 上轨线方向向下. 故该两曲线围成的区域 $\Omega_1$ 为负向不变区域. 如图 3 所示. 类似图 2 所示的事实,在 $\Omega_1$ 中有从(0,0)到 $(u_0,0)$ 的连结轨道,而该轨道即为 $\Gamma_1$. 同理可证,在条件(13)下,由 $v = 0$ 和 $v = \beta g(u)(u_0 < u < 1)$ 两曲线可围成一个正向不变区域 $\Omega_2$,而 $\Gamma_2$ 为 $\Omega_2$ 中从 $(u_0,0)$ 到(1,0)的连结轨道.

其次,我们指出,当 $t \to -\infty$ 时,$\Gamma_1$ 切于直线 $v = k_1 u$ 进入(0,0);当 $t \to +\infty$ 时,$\Gamma_2$ 切于直线 $v = \mu_2(u-1)$ 进入(1,0). 事实上,由 $\alpha^2 g'(0) - \alpha f(0) + 1 < 0$ 可知,$k_1 < \alpha < k_2$, 所以,当 $t \to -\infty$ 时,$\Gamma_1$ 进入原点(0,0)的切线斜率 $k$ 满足关系

$$k \leqslant \alpha g'(0) \leqslant f(0) - \frac{1}{\alpha} < f(0) - \frac{2g'(0)}{f(0) - \sqrt{f^2(0) - 4g'(0)}} = k_2,$$

从而 $k$ 必等于 $k_1$. 同理可证关于 $\Gamma_2$ 的结论.

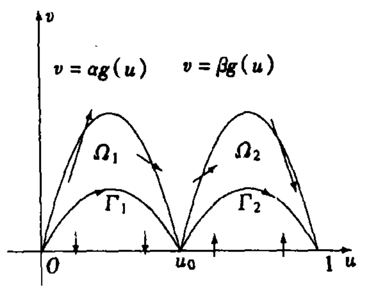


图 3　双弓形负向与正向不变区域

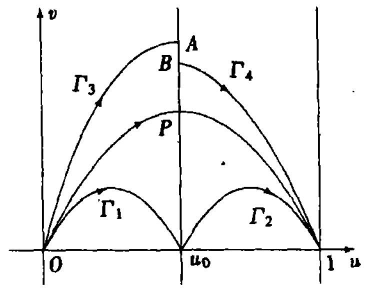


图 4　无穷多轨道的存在性

第三,我们证明,当 $t \to -\infty$ 时,切于直线 $v = k_2 u$ 负向进入(0,0) 的轨线 $\Gamma_3$ 与直线 $u = u_0$ 必相交于一点 $A(u_0, v_A)$;当 $t \to +\infty$ 时,切于直线 $v = \mu_1(u-1)$ 正向进入(1,0) 的轨线 $\Gamma_4$ 同样必与直线 $u = u_0$ 相交于一点 $B(u_0, v_B)$. 事实上,设 $\Gamma_3$ 可表示为 $v_1(u)$,若 $\Gamma_3$ 不与直线 $u = u_0$ 相交,由于 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = v > 0$,则必存在直线 $u = u_1 (0 < u_1 \leqslant u_0)$ 使得 $\Gamma_3$ 当 $u \to u_1$ 时,可充分接近直线 $u = u_1$,但不和它相交.

若 $u_1 < u_0$,取 $v = v_0 > \max\limits_{u \in [0, u_0]} v_2(u)$,其中 $v_2(u)$ 是 $\Gamma_1$ 的函数表示,此时 $\Gamma_3$ 必和直线 $v = v_0$ 相交于一点$(u_2, v_0)$,其中 $0 < u_2 < u_1$. 考虑到 $v_{\min} = \min\limits_{u \in [u_2, u_1]} v_1(u) > 0$(因为 $\Gamma_3$ 必在 $\Gamma_1$ 之上),从而由 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/v$ 得

$$\Delta t = \int_{u_2}^{u_1} \frac{\mathrm{d}u}{v} \leqslant \int_{u_2}^{u_1} \frac{\mathrm{d}u}{v_{\min}} = \frac{u_1 - u_2}{v_{\min}},$$

即 $\Gamma_3$ 从点$(u_2, v_0)$起再经过不多于$(u_1 - u_2)/v_{\min}$ 的时间必与直线 $u = u_1$ 相交,矛盾. 从而 $u_1$ 必等于 $u_0$. 由此得出 $\liminf\limits_{u \to u_0} v_1(u) > 0$ 成立,否则与鞍点$(u_0, 0)$附近的拓扑结构矛盾. 重复地用上述方法可证 $\Gamma_3$ 必与直线 $u = u_0$ 相交. 与原假设矛盾. 类似地可证 $\Gamma_4$ 必与直线 $u = u_0$ 相交. 如图 4 所示.

最后,我们取 $v^* = \min\{v_A, v_B\} > 0$,由图 4 显然可见,对任意的 $p \in \{(u_0, v) \mid 0 < v \leqslant v^*\}$,有 $\lim\limits_{t \to -\infty} f(P, t) = (0,0)$,且 $\lim\limits_{t \to +\infty} f(P, t) = (1,0)$. 证毕.

**注 3**　我们可将定理 7 中的 $\alpha$ 和 $\beta$ 分别换成相应区间上的连续可微的正函数 $\phi(u)$ 和负函数 $\psi(u)$,以得更一般的结论.

**注 4**　由于 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 的存在,定理 7 隐含边值问题

$$\begin{cases} u'' - f(u)u' + g(u) = 0, \\ u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = u_0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u'' - f(u)u' + g(u) = 0, \\ u(-\infty) = u_0,\ u(+\infty) = 1, \end{cases}$$

分别存在唯一的严格单调解.

**注 5**　当 $f(u) \equiv c$ 时,且 $g(u)$ 满足定理 7 的条件时,边值问题(1)(即(7))不存在单调解.

**例**　考虑无穷边值问题

$$\begin{cases} u'' - (2\sqrt{2\pi} + \epsilon)\cos(\pi u)u' + \sin(2\pi u) = 0, \\ u(-\infty) = 0,\ u(+\infty) = 1, \end{cases} \tag{14}$$

其中 $f(u) = (2\sqrt{2\pi} + \epsilon)\cos(\pi u), g(u) = \sin(2\pi u), \epsilon > 0$. 显然, $g$ 满足定理 7 的条件(ⅰ). $u_0 = 1/2, g'(u) = 2\pi\cos(2\pi u), f(0) > 2\sqrt{2\pi} = 2\sqrt{g'(0)}, f(1) < -2\sqrt{2\pi} = -2\sqrt{g'(1)}$. 取

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{g'(0)}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}},\ \beta = -\sqrt{\frac{1}{g'(1)}} = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}},$$

则当 $\epsilon$ 充分大时,

$$f(u) = (2\sqrt{2\pi} + \epsilon)\cos(\pi u) > \sqrt{2\pi}(1 + \cos(2\pi u)) = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha\pi\cos(2\pi u) = \frac{1}{\alpha} + \alpha g'(u) \qquad u \in [0, u_0),$$

$$f(u) = (2\sqrt{2\pi} + \epsilon)\cos(\pi u) < -\sqrt{2\pi}(1 + \cos(2\pi u)) = \frac{1}{\beta} + 2\beta\pi\cos(2\pi u) = \frac{1}{\beta} + \beta g'(u) \qquad u \in (u_0, 1].$$

于是定理 7 条件全部满足,因此,(14)存在无穷多严格单调解.

以下设 $g'(0) < 0, g'(1) < 0$,即(0,0)和(1,0)均为鞍点,并设 $g$ 在(0,1)内还存在唯一一个零点 $u_0$,即(8)还存在一个非鞍点奇点($u_0$,0).

记(0,0)上半平面的不稳定流形为 $\Gamma_1$,(1,0)上半平面的稳定流形为 $\Gamma_2$. $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 分别与直线 $u = u_0$ 相交于点 $A$ 与点 $B$, 若点 $A$ 与点 $B$ 重合, 则 $\Gamma_1(\Gamma_2)$ 即为(0, 0)到(1, 0)的连结轨道. 以下我们利用 Авдонин Н И[8,9]引入的向量场比较方法来研究鞍点间分界线的相对位置. 为此,对(8)作变量替换

$$\begin{cases} \bar{u} = \dfrac{u_0}{u_0 - 1}u - \dfrac{u_0}{u_0 - 1}, \\ \bar{v} = \dfrac{1}{\phi(\bar{u})}v, \end{cases} \tag{15}$$

其中 $\phi(u)$ 为连续可微函数,并满足条件 $\phi(u_0) = 1, \phi(u) > 0, u \in [0, u_0]$. 显然,在变换(15)下,系统(8)的奇点及其类型并不改变,且(8)化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{u}}{dt} = \alpha\phi(\bar{u})\bar{v}, \\ \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{1}{\phi(\bar{u})}\left[f\left(\dfrac{\bar{u}}{\alpha} + 1\right)\phi(\bar{u})\bar{v} - g\left(\dfrac{\bar{u}}{\alpha} + 1\right)\right] - \alpha\bar{v}^2\phi'(\bar{u}), \end{cases} \tag{16}$$

其中 $\alpha = u_0/(u_0 - 1)$. $\Gamma_2$ 变为(16)鞍点(0,0)的一条分界线 $\Gamma_2'$. 若存在满足上述条件的 $\phi(u)$ 使得 $\Gamma_2'$ 和 $\Gamma_1$ 完全重合,则点 $A$ 和点 $B$ 重合. 记

$$\Delta(u, \phi, v) = f\left(\frac{u}{\alpha} + 1\right)\phi(u)v - g\left(\frac{u}{\alpha} + 1\right) - \alpha v^2\phi'(u)\phi(u) - \alpha\phi^2(u)[f(u)v - g(u)].$$

其中 $v_0(u)$ 为 $\Gamma_1$ 在$[0, u_0]$上的函数表示. 若$(\Delta(u, \phi, v))_{v = v_0(u)} \equiv 0$, 则 $\Gamma_2'$ 与 $\Gamma_1$ 完全重合. 根据以上分析,我们得到:

**定理 8** 假设

(ⅰ) $g'(0) < 0, g'(1) < 0$;

(ⅱ) 存在连续可微函数 $\phi(u)$ 满足 $\phi(u_0) = 1, \phi(u) > 0, u \in [0, u_0]$ 使得

$$(\Delta(u, \phi, v))_{v = v_0(u)} \equiv 0, \tag{17}$$

则(1)存在唯一严格单调解.

## 2 非单调解的存在性

本节考虑 $g$ 只有两个零点,即 $g(0)=g(1)=0, g(u)>0, u\in(0,1)$. 显然,下面的命题成立.

**命题 9** (1)存在非单调解的充分必要条件是(8)存在(0,0)到(1,0)的连结轨道,且该轨道至少穿过 $u$ 轴一次.

考虑到变换 $\bar u=1-u, \bar v=-v$,我们只考虑下列两种情况下,(1)非单调解的存在性.

1. (0,0)为焦点,(1,0)为鞍点,即当 $g'(0)>0, g'(1)<0, 0<f^2(0)<4g'(0)$ 时;

2. (0,0)为不稳定结点,(1,0)为鞍点,即当 $g'(0)>0, f(0)>2\sqrt{g'(0)}, g'(1)<0$ 时.

**定理 10** 假设

(ⅰ) $g'(0)>0, g'(1)<0, f^2(0)<4g'(0), g(u)>0, u\in(0,1)$;

(ⅱ) 存在 $\epsilon_0>0, \delta_0>0$,使得 $f(u)>\epsilon_0, u\in(-\infty,1]$,且 $\limsup\limits_{u\to-\infty} g(u)<-\delta_0$,

则(1)仅存在唯一的非单调解.

**证** 首先,当 $t\to-\infty$ 时,鞍点(1,0)上半平面的稳定流形 $\Gamma_1$ 必依次与 $v$ 正半轴和 $u$ 负半轴相交于点 $A(0,v_A)$ 和点 $(u_B,0)$. 事实上,$\Gamma_1$ 不首先与线段 $v=0(0<u<1)$ 相交,也不能直接进入(0,0)(因为(0,0)是焦点). 取 $v=v_0>\max\limits_{u\in(0,1)}(g(u)/f(u))>0$,若 $\Gamma_1$ 不与直线 $v=v_0$ 相交,由于 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=v>0$,则 $\Gamma_1$ 必与 $v$ 正半轴相交;若不与直线 $v=v_0$ 相交于点 $(u_0,v_0)$,则有 $v_{\min}=\inf\limits_{u\in(0,u_0)} v_0(u)>0$,其中 $v_0(u)$ 是 $\Gamma_1$ 的函数表示. 故由 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=v$ 得

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{v}\leqslant\frac{\mathrm{d}u}{v_{\min}}\Rightarrow\Delta \mathrm{t}\leqslant\int_0^{u_0}\frac{\mathrm{d}u}{v_{\min}}=\frac{u_0}{v_{\min}},$$

即从点 $(u_0,v_0)$ 起,后退不超过时间 $u_0/v_{\min}$,$\Gamma_1$ 就得与 $v$ 正半轴相交. 下证 $\Gamma_1$ 还得与 $u$ 负半轴相交. 用反证,若不交,由

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{f(u)}{v}\left[v-\frac{g(u)}{f(u)}\right]>0\qquad(u<0)$$

知,$v_0(u)$ 在 $u<0$ 时单调递增且有下界故有 $\lim\limits_{u\to-\infty} v_0(u)=a\geqslant0$. 我们断言 $\alpha\neq0$,否则在 $u$ 负半轴充分远处,由 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=0, \mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-g(u)>\alpha_0>0$($\alpha_0$ 是存在的)知,(8)的轨线方向向上,由该处出发的轨线必与 $\Gamma_1$ 相交,这与 Cauchy 问题解的存在唯一性矛盾. 从而

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=f(u)\left[v-\frac{g(u)}{f(u)}\right]>\epsilon_0 a>0\Rightarrow \mathrm{d}t<\frac{\mathrm{d}v}{\epsilon_0 a},$$

进而得 $$\Delta t<\int_0^{v_A}\frac{\mathrm{d}v}{\epsilon_0 a}=\frac{v_A}{\epsilon_0 a},$$

即从点 $A$ 起,后退不超过时间 $v_A/(\epsilon_0 a)$,$\Gamma_1$ 就得与 $u$ 负半轴相交,矛盾.

其次,我们作对称变换

$$\bar u=u,\ \bar v=-v, \tag{18}$$

将(8)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar u}{\mathrm{d}t}=-\bar v,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\bar v}{\mathrm{d}t}=f(\bar u)\bar v+g(\bar u).\end{cases} \tag{19}$$

易知变换(18)不改变系统(8)的奇点及其类型,且由(18)所确定的平面上的点映射,是将系统(8)位于上(下)半平面的每一条积分曲线,映为系统(19)位于下(上)半平面的对应的积分曲

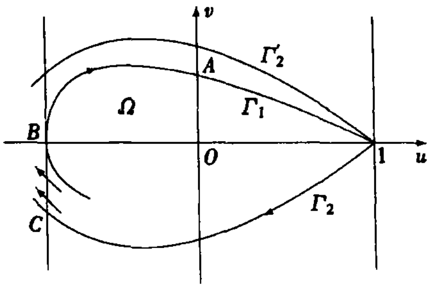


图5 焦点(0,0)的负向吸引域

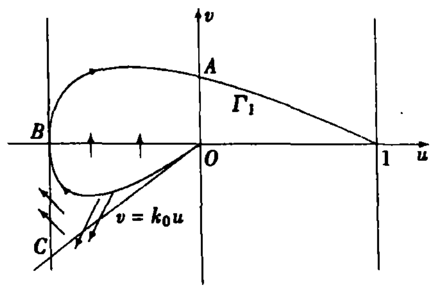


图6 三角形负向不变区域

线．特别地，将(8)鞍点(1,0)下半平面的不稳定流形 $\Gamma_2$ 映为系统(19)鞍点(1,0)的一条分界线 $\Gamma_2'$．$\Gamma_2'$ 的斜率为 $-(f(u)v+g(u))/v$，$\Gamma_1$ 的斜率为$(f(u)v-g(u))/v$，二者的斜率差为

$$\frac{f(u)v-g(u)}{v}-\left(-\frac{f(u)v+g(u)}{v}\right)=2f(u)>0\qquad u\leqslant 1,$$

由微分方程比较原理知，$\Gamma_2'$ 位于 $\Gamma_1$ 的上方，如图5所示．返回原系统(8)，从上面的讨论可见，$\Gamma_2$ 要么与 $u$ 负半轴没有交点，要么与 $u$ 负半轴相交，但交点必落在点 $B$ 的左方．

最后，过点 $B$ 作 $u$ 轴的垂线交 $\Gamma_2$ 于点 $C$，用 $\Omega$ 表示 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 和直线 $BC$ 围成的区域．于是，在线段 $BC$ 上(8)的轨线方向指向区域 $\Omega$ 之外，如图5所示．显然，$\{f(B,t)\mid t<0\}\subset\Omega$．根据 Bendixson 原理，(8)在 $\Omega$ 中没有闭轨道，因为

$$\frac{\partial}{\partial u}(v)+\frac{\partial}{\partial v}(f(u)v-g(u))=f(u)>0,$$

所以，$\Gamma_1$ 的 $\alpha$ 极限点只能为原点(0,0)，即 $\Gamma_1$ 为(0,0)到(1,0)的连结轨道．唯一性易见，证毕．

现在假设 $g'(0)>0$，$f(0)\geqslant 2\sqrt{g'(0)}$，$g'(1)<0$，即(0,0)为不稳定结点，(1,0)为鞍点．类似于定理10第一部分的证明，鞍点(1,0)上半平面的稳定流形 $\Gamma_1$ 当 $t\to+\infty$ 时，要么与 $v$ 正半轴相交，要么趋于(0,0)；下半平面的不稳定流形 $\Gamma_2$；当 $t\to+\infty$ 时，必与 $v$ 负半轴相交．记

$$\bar{\Omega}=\{(u,v)\mid 0\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant v\leqslant v_0(u)\}.$$

其中 $v_0(u)$ 是 $\Gamma_1$ 在区间[0,1]上的函数表示．再记

$$\Delta(u,\phi,v)=f(u)\phi^2(u)v-g(u)\phi^2(u)-f(u)\phi(u)v+\phi'(u)v^2+g(u).$$

**引理11** 假设

(ⅰ) $g'(0)>0,g'(1)<0$；

(ⅱ) $f(0)\geqslant 2\sqrt{g'(0)}$，并且存在 $\phi(u)\in C^1[0,1]$，$\phi(u)<0$，$u\in[0,1]$ 使得在 $\bar{\Omega}$ 中 $\Delta(u,\phi,v)\leqslant 0$，

则 $\Gamma_1$ 必与 $v$ 正半轴相交．

**证** 对系统(8)作关于 $u$ 轴的拟对称变换

$$\bar{u}=u,\ \bar{v}=\frac{v}{\phi(\bar{u})},\tag{20}$$

使得(8)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t}=\phi(\bar{u})v,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{f(\bar{u})\phi(\bar{u})\bar{v}-g\bar{u}-\phi'(\bar{u})\bar{v}^2}{\phi(\bar{u})}.\end{cases}\tag{21}$$

变换(20)将 $\Gamma_2$ 变为系统(21)鞍点(1,0)的一条分界线 $\Gamma_2'$,现比较 $\Gamma_2'$ 和 $\Gamma_1$ 的斜率

$$k_{\Gamma_1}-k_{\Gamma_2'}=f(u)-\frac{g(u)}{v}-\frac{f(u)\phi(u)v-g(u)-\phi'(u)v^2}{\phi^2(u)v}=$$

$$\frac{\Delta(u,\phi,v)}{\phi^2(u)v}\leqslant 0.$$

由于 $\Gamma_2'$ 和 $\Gamma_1$ 均过(1,0),根据微分方程比较原理,$\Gamma_1$ 落在 $\Gamma_2'$ 的上方,由 $\Gamma_2'$ 与 $v$ 正半轴相交,得 $\Gamma_1$ 也必与 $v$ 正半轴相交. 证毕.

根据上述引理,可得下述定理.

**定理 12** 假设

(ⅰ) $g'(0)>0, g'(1)<0$;

(ⅱ) $\sup\limits_{u\in(-\infty,0)}\dfrac{g(u)}{u}<+\infty, f(u)\geqslant 2\sqrt{\sup\limits_{u\in(-\infty,0)}\dfrac{g(u)}{u}}, u\leqslant 0$;

(ⅲ) 存在 $\phi(u)\in C^1[0,1], \phi(u)<0, u\in[0,1]$ 使得 $\Delta(u,\phi,v)\leqslant 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 中成立,则(1)存在唯一的非单调解.

**证** 由引理 11,当 $t\to-\infty$ 时,$\Gamma_1$ 必与 $v$ 正半轴交于一点 $A$,类似于定理 10 第一部分的证明,当 $t\to-\infty$ 时,$\Gamma_1$ 还得与 $u$ 负半轴交于一点 $B$.

过点 $B$ 作垂线交直线 $v=k_0u$ 于一点 $C$,类似于定理 2 的证明知,由三条直线,$u$ 轴、直线 $BC$ 和 $v=k_0u(k_0>0)$ 所围成的区域为(8)的一个负向不变区域,其中 $k_0$ 为满足不等式 $k_0^2-m_0k_0+\beta\leqslant 0$ 的正数,$m_0=\min\limits_{u\in(-\infty,0)}f(u), \beta=\sup\limits_{u\in(-\infty,0)}(g(u)/u)$. 如图 6 所示. 因此,$\lim\limits_{t\to-\infty}f(B,t)=(0,0)$, 证毕.

**注 6** 具有单峰(谷)的扭波的存在性,可参考文献[3].

**致谢** 衷心感谢导师李继彬教授的精心指导和鼓励.

## [参 考 文 献]

[1] Aizik V, Vitaly V, Vladimir V. *Travelling Wave Solution of Parabolic System*[M]. New York: Springer-Verlag, 1994, 31—32.

[2] Chicone C. *Ordinary Differential Equation With Application*[M]. New York: Springer-Verlag, 1999, 274—278.

[3] Sánchez-Garduño F, Maini P K. Travelling wave phenomena in some degenerate reaction diffusion equation[J]. *J Differential Equations*, 1995, **117**: 281—319.

[4] Aronson D G, Weiberger H F. Multidimentional nonlinear diffusion arising in population genetics[J]. *Advance in Mathematics*, 1978, **33**: 33—76.

[5] Gilbarg D. The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer[J]. *Amer J Math*, 1951, **7**: 256—274.

[6] Malagati L, Marcelli C. Existence of bounded trajectories via upper and low solution[J]. *Discrete and Continuous Dynamical System*, 2000, **6**(3): 575—590.

[7] Gordon P. Pathes connecting elementary critical points of dynamical system[J]. *SIAM J Appl Math*, 1974, **26**(1): 35—102.

[8] Авдонин Н И. О взаиморасположении линии раздела[J]. *Дифф Урав*, 1968, **4**(12): 2231—2242.

[9] Авдонин Н И. Некоторые прпзнаки существования и отсутсутствия замкинутых траекторий одной системы дифференциальных уравнений[J]. *Дифф Урав*, 1968, **4**(4): 639—645.

# Existence of Bounded Solutions on the Real Line for Liénard System

XIAO Hai-bin

(*Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang* 315211, *P. R. China*)

**Abstract**: The existence of monotone and non-monotone solutions of boundary value problem on the real line for Liénard equation is studied. Applying the theory of planar dynamical systems and the comparison method of vector fields defined by Liénard system and the system given by symmetric transformation or quasi-symmetric transformation, the invariant regions of the system are constructed. The existence of connecting orbits can be proved. A lot of sufficient conditions to guarantee the existence of solutions of the boundary value problem are obtained. Especially, when the source function is bi-stable, the existence of infinitely many monotone solusion is obtained.

**Key words**: reaction-diffusion equation; Liénard system; travelling wave solutions; connecting orbits