文章编号:1000-0887(2003)04-0414-09

# 相对论 Birkhoff 系统的形式不变性与 Noether 守恒量*

罗绍凯[1,2,3]

(1.长沙大学 数学力学与数学物理研究所,长沙 410003;
2.湖南大学 应用物理系,长沙 410082;
3.江南大学 理学院,无锡 214063)

(林宗池推荐)

**摘要:** 研究相对论 Birkhoff 系统的形式不变性,寻求系统的守恒量. 在群的无限小变换下,给出相对论 Birkhoff 系统的形式不变性的定义和判剧. 基于相对论 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理在群的无限小变换下的变形形式,建立相对论 Birkhoff 系统的 Noether 对称性理论. 通过研究形式不变性与 Noether 对称性之间的关系,得到相对论 Birkhoff 系统的守恒量. 研究结果表明:在一定的条件下,相对论 Birkhoff 系统的形式不变性导致 Noether 对称性的守恒量.

**关 键 词:** 相对论; Birkhoff 系统; Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理; 形式不变性; Noether 对称性; 守恒量

**中图分类号:** O316;O320;O230 **文献标识码:** A

## 引 言

Birkhoff 动力学的研究始于 1927 年美国数学家 G.D.Birkhoff 的工作[1]. 1983 年,美国物理学家 R.M.Santilli 研究了 Birkhoff 方程的变换理论和 Galilei 相对性原理的推广等问题,并对 Birkhoff 方程的起源与其后的研究作了很好的总结,使 Birkhoff 方程显示了广阔的应用前景[2]. 1992 年以来,中国力学家梅凤翔对 Birkhoff 系统进行了全面研究,建立了 Birkhoff 系统动力学,构筑了理论体系框架[3~15]. Birkhoff 系统动力学比 Hamilton 系统动力学更为一般,Hamilton 系统动力学在近代物理学领域已得到广泛应用[16],Birkhoff 系统动力学在近代物理学领域也理应扮演重要角色. 1987 年以来,我们相继建立了相对论系统分析力学[17~29]和转动相对论系统分析力学[25~31]. 近年来,我们进一步建立了相对论 Birkhoff 系统动力学[32~34]和转动相对论 Birkhoff 系统动力学[35~37].

动力学系统对称性与守恒量的研究,不仅具有数学价值,而且还表现出深刻的物理意义. 1918 年,德国数学家 A.E.Noether 研究了 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性质,揭示了

* 收稿日期: 2002-02-28; 修订日期: 2003-01-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972010);河南省自然科学基金资助项目(984053100, 998040080);湖南省教育厅科研基金资助项目(02C033)
作者简介: 罗绍凯(1957—),男,教授,河南商丘人,中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会常务副理事长,出版著作 9 部,发表论文 220 多篇(E-mail:mmmplsk@163.com).

物理系统的守恒量与其内在对称性之间的关系[38]. Noether 定理的提出,对于近代力学和理论物理学的发展给予很大推动作用. 近 30 年来,文献[3,14~16,26,33,39~52]把 Noether 理论的研究进一步深化,并引伸到诸多学科分支. 关于 Noether 定理的研究,多是基于 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性质. 1993 年以来,梅凤翔提出用 Pfaff 作用量或 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理在无限小变换下的不变性质建立 Noether 理论[3,15,16],开辟了 Noether 对称性研究的新途径.

本文研究相对论 Birkhoff 系统在无限小变换下的形式不变性,寻求系统的守恒量. 提出了相对论 Birkhoff 系统的基本形式的 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理,给出了无限小群变换下相对论 Birkhoff 方程形式不变性的定义和判据. 基于相对论 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理在无限小群变换下的变形形式,建立了相对论 Birkhoff 系统的 Noether 理论. 研究形式不变性与 Noether 对称性之间的关系,得到相对论 Birkhoff 系统的守恒量.

## 1　相对论 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理

研究 $N$ 个粒子构成的系统,在时刻 $t$ 第 $i$ 个粒子的速度为 $\dot{r}_i$,极限速度为 $c$,经典质量为 $m_{oi}$,其相对论质量为

$$m_i = m_{oi}\Big/\sqrt{1-\dot{r}_i^2/c^2} \qquad (i = 1,\cdots,N). \tag{1}$$

构造相对论系统的 Birkhoff 函数 $B^*$ 和 Birkhoff 函数组 $R_\nu^*$ $(\nu = 1,\cdots,2n)$,即

$$B^* = B^*(m_i(t,a^\mu),t,a^\mu),\ R_\nu^* = R_\nu^*(m_i(t,a^\mu),t,a^\mu) \qquad (\nu,\mu = 1,\cdots,2n). \tag{2}$$

那么基本形式的相对论 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理为

$$\delta\{R_\nu^*(m_i(t,a^\mu),t,a^\mu)\dot{a}^\nu - B^*(m_i(t,a^\mu),t,a^\mu)\} = 0 \qquad (\nu,\mu = 1,\cdots,2n). \tag{3}$$

原理(3)在相对论力学和经典力学中都是一个新型的微分变分原理.

令

$$\begin{cases} \widetilde{B^*} = \widetilde{B^*}(t,a^\mu) = B^*(m_i(t,a^\mu),t,a^\mu), \\ \widetilde{R_\nu^*} = \widetilde{R_\nu^*}(t,a^\mu) = R_\nu^*(m_i(t,a^\mu),t,a^\mu), \end{cases} \tag{4}$$

有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{B^*}}{\partial a^\mu} = \dfrac{\partial B^*}{\partial m_i}\dfrac{\partial m_i}{\partial a^\mu} + \dfrac{\partial B^*}{\partial a^\mu}, \\ \dfrac{\partial \widetilde{R_\nu^*}}{\partial a^\mu} = \dfrac{\partial R_\nu^*}{\partial m_i}\dfrac{\partial m_i}{\partial a^\mu} + \dfrac{\partial R_\nu^*}{\partial a^\mu}, \\ \dfrac{\partial \widetilde{R_\nu^*}}{\partial t} = \dfrac{\partial R_\nu^*}{\partial m_i}\dfrac{\partial m_i}{\partial t} + \dfrac{\partial R_\nu^*}{\partial t}, \end{cases} \tag{5}$$

那么相对论 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理可以写为

$$\left\{\left(\frac{\partial \widetilde{R_\nu^*}}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \widetilde{R_\mu^*}}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial \widetilde{B^*}}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \widetilde{R_\mu^*}}{\partial t}\right\}\delta a^\mu = 0,\ \delta t = 0,\ \mathrm{d}\delta a^\mu = \delta \mathrm{d} a^\mu \qquad (\nu,\mu = 1,\cdots,2n), \tag{6}$$

其中重复角码表示求和.

对于原理(3)，注意到积分区间 $[t_1, t_2]$ 的任意性，可以得到基本形式的相对论 Pfaff-Birkhoff 原理

$$\begin{cases}\delta A^* = 0,\ A^* = \int_{t_1}^{t_2}(\widetilde{R_\nu^*}\dot{a}^\nu - B^*)\mathrm{d}t,\\ \delta t = 0,\ \mathrm{d}\delta a^\mu = \delta \mathrm{d}a^\mu,\ \delta a^\mu|_{t_1} = \delta a^\mu|_{t_2} = 0,\end{cases} \tag{7}$$

其中 $A^*$ 称为相对论系统的 Pfaff 作用量.

对于原理(6)，注意到积分区间 $[t_1, t_2]$ 的任意性，可以得到相对论 Pfaff-Birkhoff 原理的变形形式.

$$\begin{cases}\delta A^* = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\dfrac{\partial \widetilde{R_\nu^*}}{\partial a^\mu} - \dfrac{\partial \widetilde{R_\mu^*}}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \dfrac{\partial \widetilde{B^*}}{\partial a^\mu} - \dfrac{\partial \widetilde{R_\mu^*}}{\partial t}\right\}\delta a^\mu \mathrm{d}t = 0,\\ \delta t = 0,\ \mathrm{d}\delta a^\mu = \delta\mathrm{d}a^\mu,\ \delta a^\mu|_{t_1} = \delta a^\mu|_{t_2} = 0 \qquad (\nu,\mu = 1,\cdots,2n).\end{cases} \tag{8}$$

## 2 相对论 Birkhoff 系统的形式不变性

对于理想完整的或自由的相对论系统，在原理(6)中 $\delta a^\mu(\mu = 1,\cdots,2n)$ 是彼此独立的，因此得到

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t} = 0 \qquad (\nu,\mu = 1,\cdots,2n). \tag{9}$$

方程(9)称为相对论系统的 Birkhoff 方程即相对论 Birkhoff 方程. 在一般情况下，假设系统非奇异，即

$$\det(\tilde{\omega}_{\mu\nu}^*) \neq 0,\ \tilde{\omega}_{\mu\nu}^* = \left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right). \tag{10}$$

如果 $\tilde{R}_\mu^*$ 和 $\tilde{B}^*$ 都不显含时间 $t$，则系统(9)是自治的；如果 $\tilde{R}_\mu^*$ 不显含时间 $t$，则系统(9)是半自治的.

引入无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, a^\mu),\ a^{\mu *} = a^\mu + \varepsilon\xi_\mu(t, a^\mu), \tag{11}$$

其中 $\varepsilon$ 是一个无限小的参数，$\xi_0$、$\xi_\mu$ 称为无限小生成元. 在无限小变换(11)下，有

$$\begin{cases}\tilde{B}^* = \tilde{B}^*(t^*, a^{\mu *}) = \tilde{B}^*(t, a^\mu) + \varepsilon\left(\dfrac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}\xi_0 + \dfrac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\xi_\mu\right) + O(\varepsilon^2),\\ \tilde{R}_\mu^* = \tilde{R}_\mu^*(t^*, a^{\mu *}) = \tilde{R}_\mu^*(t, a^\mu) + \varepsilon\left(\dfrac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\xi_0 + \dfrac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\xi_\mu\right) + O(\varepsilon^2).\end{cases} \tag{12}$$

**定义** 在无限小变换(11)下，如果相对论系统的 Birkhoff 方程保持形式不变，即

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t} = 0 \qquad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{13}$$

那么，这种不变性称为相对论 Birkhoff 系统的形式不变性.

**定理 1** 如果存在一个常数 $k$ 和一个函数 $G_0 = G_0(t, a^\mu)$ 使得无限小生成元 $\xi_0$ 和 $\xi_\mu$ 满足如下条件

$$\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\xi_\mu = k\left(\tilde{B}^* - \frac{\partial G_0}{\partial t}\right),\ \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\mu}\xi_\mu = k\left(\tilde{R}_\mu^* - \frac{\partial G_0}{\partial a^\mu}\right), \tag{14}$$

那么，相对论 Birkhoff 系统(9)在无限小变换(11)下具有形式不变性.

事实上，把方程(14)代入方程(12)，而且略去 $\varepsilon$ 的二阶和高阶项，可得

$$\tilde{B}^* = \tilde{B}^* + \varepsilon k\left(\tilde{B}^* - \frac{\partial G_0}{\partial t}\right),\ \tilde{R}_\mu^* = \tilde{R}_\mu^* + \varepsilon k\left(\tilde{R}_\mu^* - \frac{\partial G_0}{\partial t}\right).$$

把上述等式代入方程(13),有

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t} = (1+\varepsilon k)\left[\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\right] = 0.$$

因此,相对论 Birkhoff 系统(9)在无限小变换(11)下具有形式不变性.

## 3 相对论 Birkhoff 系统的 Noether 对称性

最近,我们基于 Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性建立了相对论 Birkhoff 系统的 Noether 理论[33]. 下面基于相对论 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理在无限小变换下的变形形式,研究相对论 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量.

等时变分 $\delta a^\mu$ 与非等时变分 $\Delta a^\mu$ 之间满足

$$\Delta a^\mu = \delta a^\mu + \dot{a}^\mu \Delta t, \tag{15}$$

在无限小变换(11)下,有

$$\delta a^\mu = \Delta a^\mu - \dot{a}^\mu \Delta t = \varepsilon(\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0). \tag{16}$$

把等式(16)代入原理(6),得

$$\varepsilon\left[\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\right](\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) = 0. \tag{17}$$

注意到

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \dfrac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu \dot{a}^\mu = 0, \\ \dfrac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu \xi_0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{B}^* \xi_0) - \tilde{B}^* \dot{\xi}_0 - \dfrac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}\xi_0, \\ \left(\dfrac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu + \dfrac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\right)\xi_\mu = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{R}_\mu^* \xi_\mu) - \tilde{R}_\mu^* \dot{\xi}_\mu, \end{cases} \tag{18}$$

那么方程(17)可以写为

$$\varepsilon\left[\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu + \left(\frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}\right)\xi_0 + \tilde{R}_\mu^* \dot{\xi}_\mu - \tilde{B}^* \dot{\xi}_0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{R}_\mu^* \xi_\mu - \tilde{B}^* \xi_0)\right] = 0. \tag{19}$$

引入规范函数 $G = G(t, a^\mu)$,并在式(19)中相加、并相减 $\varepsilon\dot{G}$,得到原理(6)不变性条件的变换

$$\varepsilon\left[\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu + \tilde{R}_\mu^* \dot{\xi}_\mu + \left(\frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}\right)\xi_0 + \tilde{B}^* \dot{\xi}_0 + \dot{G} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{R}_\mu^* \xi_\mu - \tilde{B}^* \xi_0 + G)\right] = 0. \tag{20}$$

式(20)是相对论 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理(6)在无限小变换(11)下的变形形式.

由不变性条件(20)立即得到相对论 Birkhoff 系统的 Noether 定理.

**定理 2** 对于相对论 Birkhoff 系统(9),如果无限小生成元 $\xi_0$、$\xi_\mu$ 和规范函数 $G$ 满足

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu + \left(\frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial t}\right)\xi_0 + \tilde{R}_\mu^* \dot{\xi}_\mu - \tilde{B}^* \dot{\xi}_0 + \dot{G} = 0, \tag{21}$$

那么,系统存在如下守恒量

$$\Phi = \tilde{R}_\mu^* \xi_\mu - \tilde{B}^* \xi_0 + G = \mathrm{const}. \tag{22}$$

条件(21)称为相对论 Birkhoff 系统(9)的 Noether 等式. 对于自治和半自治系统,Noether 等式(21)变为简单形式,定理 2 仍然适用. 对于给定的 $\tilde{B}^*$ 和 $\tilde{R}_\nu^*$,可由(21) 式找到无限小变换的生成元 $\xi_0$、$\xi_\mu$ 和规范函数 $G$,然后由(22)式得到系统的守恒量.

## 4 相对论 Birkhoff 系统的形式不变性与 Noether 对称性

**定理 3** 对于相对论 Birkhoff 系统(9),如果生成元 $\xi_0$、$\xi_\mu$ 满足条件(14),而且可以找到满足等式(21) 的规范函数 $G$,那么,系统(9)的形式不变性导致 Noether 对称性,并存在形如(22)的守恒量;否则,系统(9)的形式不变性不导致 Noether 对称性.

**定理 4** 对于相对论 Birkhoff 系统(9),如果生成元 $\xi_0$、$\xi_\mu$ 和规范函数 $G$ 满足 Noether 等式(21),而且 $\xi_0$、$\xi_\mu$ 和规范函数 $G$ 在 $G = G_0 = G_0(t, a^\mu)$ 的条件下满足条件(14),那么系统(9)的 Noether 对称性对应于形式不变性;否则,系统(9)的 Noether 对称性不对应于形式不变性.

**例** 已知相对论系统的运动方程为

$$\ddot{q} = \frac{F_0}{m}\left(1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}\right)^{3/2}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dot{q}^2/c^2}}, \tag{23}$$

其中 $F_0$、$m_0$ 和 $c$ 均为常数,试研究系统的形式不变性与 Noether 对称守恒量之间的关系.

令 $a^1 = q, a^2 = \dot{q}$,可以得到[35]

$$\begin{cases} \tilde{B}^* = \dfrac{m_0}{F_0}c^2\left(1 - \dfrac{(a^2)^2}{c^2}\right)^{-1/2} - a^1, \\ \tilde{R}_1^* = 0, \ \tilde{R}_2^* = \dfrac{m_0}{F_0}\left(\dfrac{1}{F_0}c^2 - a^1\right)\left(1 - \dfrac{(a^2)^2}{c^2}\right)^{-1}. \end{cases} \tag{24}$$

判据(14)给出

$$\begin{cases} -\xi_1 + \dfrac{m_0}{F_0}\left(1 - \dfrac{(a^2)^2}{c^2}\right)^{-3/2} a^2 \xi_2 = k\left(\tilde{B}^* - \dfrac{\partial G_0}{\partial t}\right), \\ 0 = k\left(-\dfrac{\partial G_0}{\partial a^1}\right), \\ -\dfrac{m_0}{F_0}\left(1 - \dfrac{(a^2)^2}{c^2}\right)^{-1}\xi_1 + \dfrac{2m_0}{F_0 c^2}\left(\dfrac{c^2}{F_0} - a^1\right)\left(1 - \dfrac{(a^2)^2}{c^2}\right)^{-2} a^2 \xi_2 = \\ \qquad k(\tilde{R}_2^* - \partial G_0/\partial a^2). \end{cases} \tag{25}$$

该方程组有如下解

$$k = 0, \ \xi_0 = 1, \ \xi_1 = \xi_2 = 0, \tag{26}$$

$$k = 0, \ \xi_0 = -1, \ \xi_1 = \xi_2 = 0. \tag{27}$$

式(26)和式(27)对应于相对论 Birkhoff 系统的形式不变性.

把式(26)和式(27)分别代入 Noether 等式(21),可以得到规范函数

$$G = 0. \tag{28}$$

因此,相应的形式不变性导致 Noether 对称性. 把式(26)、(27)和(28)代入式(22),可得守恒量

$$\Phi_1 = a^1 - \frac{m}{F_0}c^2 = \mathrm{const}, \tag{29}$$

$$\Phi_2 = \frac{m}{F_0}c^2 - a^1 = \mathrm{const}. \tag{30}$$

式(26)和(27)是线性相关的,因此式(29)和(30)也是线性相关的.

把式(24)代入 Noether 等式(21),得

$$\xi_0 = 1,\ \xi_1 = \xi_2 = 0,\ G = 0, \tag{31}$$

$$\xi_0 = -1,\ \xi_1 = \xi_2 = 0,\ G = 0, \tag{32}$$

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = a^2,\ \xi_2 = \frac{F_0}{m}\left(1 - \frac{(a^2)^2}{c^2}\right),\ G = 0, \tag{33}$$

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = -a^2,\ \xi_2 = -\frac{F_0}{m}\left(1 - \frac{(a^2)^2}{c^2}\right),\ G = 0. \tag{34}$$

方程(31)和(32)存在对应于 Noether 对称性的形式不变性. 方程(33)和(34)不满足条件(14),不存在对应于 Noether 对称性的形式不变性.

## 5 讨　论

### 5.1 相对论 Hamilton 系统

如果 $R_\mu^*$ 不显含时间 $t$ ,令

$$\begin{cases} a^\mu = \begin{cases} q^\mu & (\mu = 1,\cdots,n), \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1,\cdots,2n), \end{cases} \\ R_\mu^* = \begin{cases} p_\mu & (\mu = 1,\cdots,n), \\ 0 & (\mu = n+1,\cdots,2n), \end{cases} \\ B^* = H^*. \end{cases} \tag{35}$$

则相对论系统的 Birkhoff 张量为

$$(\tilde{\omega}_{\mu\nu}^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & +\mathbf{1}_{n\times n} \\ -\mathbf{1}_{n\times n} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

那么本文原理给出相对论 D'Alembert-Lagrange 原理

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^s} - \frac{\partial L^*}{\partial q^s}\right)\delta q^s = 0 \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{37}$$

和相对论 Hamilton 原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L^*\,\mathrm{d}t = 0,\ \delta t = 0,\ \mathrm{d}\delta q^s = \delta \mathrm{d}q^s,\ \delta q^s|_{t_1} = \delta q^s|_{t_2} = 0. \tag{38}$$

而且方程(9)给出相对论 Hamilton 系统的正则方程

$$\dot{q}^s = \frac{\partial H^*}{\partial p_s},\ \dot{p}_s = -\frac{\partial H^*}{\partial q^s} \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{39}$$

其中

$$\begin{cases} H^*(t,q^s,p_s) = p_s\dot{q}^s - L^*,\ p_s = \dfrac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^s}, \\ L^*(t,q^s,\dot{q}^s) = T^* - V, \\ T^* = \sum\limits_{i=1}^{N} m_{oi}c^2\left(1 - \sqrt{1 - \dot{r}_i/c^2}\right) \qquad (s = 1,\cdots,n). \end{cases} \tag{40}$$

因此,本文定理给出相对论 Hamilton 系统形式不变性的判据、Noether 定理以及形式不变性与 Noether 对称性之间的关系.

### 5.2 经典 Birkhoff 系统

在 $\dot{r}_i \ll c$ 的经典近似下,

$$m_i = \frac{m_{oi}}{\sqrt{1 - \dot{r}_i^2/c^2}} \approx m_{oi} \qquad (i = 1,\cdots,N), \tag{41}$$

$$\begin{cases}\widetilde{B^{*}} = \widetilde{B^{*}}(m_i(t, a^{\mu}), t, a^{\mu}) \approx B(t, a^{\mu}), \\ \widetilde{R_{\nu}^{*}} = \widetilde{R_{\nu}^{*}}(m_i(t, a^{\mu}), t, a^{\mu}) \approx R_{\nu}(t, a^{\mu}).\end{cases} \tag{42}$$

本文原理给出经典力学的 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理和 Pfaff-Birkhoff 原理,而且方程(9)成为经典力学系统的 Birkhoff 方程. 因此,本文定理给出经典 Birkhoff 系统形式不变性的判据、Noether 定理以及形式不变性与 Noether 对称性之间的关系.

### 5.3 经典 Hamilton 系统

如果本文的原理和定理同时满足等式(35)和式(41),那么本文理论可用于经典 Hamilton 系统.

## [参 考 文 献]


[1] Birkhoff G D. *Dynamical System*[M]. New York: AMS College Publ, Providence, RI, 1927.

[2] Santilli R M. *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅱ [M]. New York: Springer-Verlag, 1983, 110—280.

[3] MEI Feng-xiang. Noether theory of Birkhoffian system[J]. *Science in China, Series A*, 1993, **36** (12): 1456—1547.

[4] MEI Feng-xiang. Stability of equilibrium for the autonomous Birkhoffian system [J]. *Chinese Science Bulletin*, 1993, **38**(10): 816—819.

[5] 吴惠彬, 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统的变换理论[J]. 科学通报, 1995, **40**(10): 885—888.

[6] MEI Feng-xiang, Lévesque E I. Generalized canonical realization and Birkhoff's realization of Chaplygin's nonholonomic system [J]. *Transactions of the CSME*, 1995, **19**(2): 59—73.

[7] MEI Feng-xiang. Poisson's theory of Birkhoffian system [J]. *Chinese Science Bulletin*, 1996, **41**(8): 641—645.

[8] 梅凤翔. 用独立变量表示的约束 Birkhoff 系统的运动稳定性[J]. 应用数学和力学, 1997, , **18**(1): 55—60.

[9] 梅凤翔. Birkhoff 系统动力学研究进展[J]. 力学进展, 1997, **27**(4): 436—446.

[10] GUO Ying-xiang, MEI Feng-xiang. Integrability for Pfaff constrained systems: A geometrial theory[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, **14**(1): 85—91.

[11] MEI Feng-xiang, ZHANG Yong-fa, SHANG Mei. Lie symmetries and conserved quantities of Birkhoffian system[J]. *Mechanics Research Communications*, 1999, **26**(1): 7—12.

[12] 陈向炜, 罗绍凯, 梅凤翔. 二阶自治 Birkhoff 系统的平衡点分岔[J]. 固体力学学报, 2000, **21**(3): 251—255.

[13] GUO Yong-xin, LUO Shao-kai, SHANG Mei, *et al*. Birkhoffian formulations of nonholonomic constrained systems[J]. *Reports on Mathematical Physics*, 2001, **47**(3): 313—322.

[14] 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 等. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1996.

[15] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[16] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.

[17] 罗绍凯. 相对论性分析力学理论[J]. 教材通讯, 1987, (5): 31—34.

[18] LUO Shao-kai. Relativistic variational principles and equations of motion of high-order nonlinear nonholonomic system [A]. In: WANG Zhao-lin Ed. *Proc ICDVC* [C]. Beijing: Peking University Press, 1990, 645—652.

[19] 罗绍凯. 相对论非线性非完整系统动力学理论[J]. 上海力学, 1991, **12**(1): 67—70.

[20] 罗绍凯. 广义事件空间中的相对论性 Hamilton 原理和 Lagrange 方程[J]. 大学物理, 1992, **11**

(10):14—16.

[21] 罗绍凯．变质量高阶非线性非完整系统的相对论性广义 Volterra 方程[J]. 数学物理学报,1992,**12**(增刊):27—29.

[22] 罗绍凯.变质量可控力学系统的相对论性变分原理与运动方程[J].应用数学和力学,1996,**17**(7):645—653.

[23] 李元成,方建会．相对论性万有 D'Alembert 原理的统一形式[J]. 大学物理,1991,**13**(6):27—29.

[24] 方建会,李元成．变质量系统相对论力学在速度空间中的变分原理[J]. 力学与实践,1994,**13**(5):19—20.

[25] 罗绍凯．转动相对论力学与转动相对论分析力学[J]. 北京理工大学学报,1996,**16**(S1):154—158.

[26] 罗绍凯.转动系统的相对论性分析力学理论[J].应用数学和力学,1998,**19**(1):43—53.

[27] 傅景礼,陈向炜,罗绍凯.转动系统相对论性动力学方程的代数结构与 Poisson 积分[J].应用数学和力学,1999,**20**(11):1175—1182.

[28] 傅景礼,陈向炜,罗绍凯.转动相对论系统的 Lie 对称性和守恒量[J].应用数学和力学,2000,**21**(5):495—500.

[29] 罗绍凯,郭永新,陈向炜,等．转动相对论系统动力学的积分理论[J]. 物理学报,2001,**50**(11):2053—2058.

[30] 乔永芬,李仁杰,孟军．非完整转动相对论系统的 Lindelof 方程[J]. 物理学报,2001,**50**(9):1637—1642.

[31] 方建会,赵嵩卿．相对论转动变质量系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 物理学报,2001,**50**(3):390—393.

[32] 傅景礼,王新民．相对论 Birkhoff 系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 物理学报,2000,**49**(6):1023—1029.

[33] 傅景礼,陈向炜,罗绍凯．相对论 Birkhoff 系统的 Noether 理论[J]. 固体力学学报,2001,**22**(3):263—267.

[34] 傅景礼,陈立群,罗绍凯,等．相对论 Birkhoff 系统动力学研究[J]. 物理学报,2001,**50**(12):2289—2295.

[35] 罗绍凯,傅景礼,陈向炜．转动系统相对论 Birkhoff 动力学的基本理论[J]. 物理学报,2001,**50**(3):383—389.

[36] LUO Shao-kai, CHEN Xiang-wei, FU Jing-li. Birkhoff's equations and geometrical theory of rotational relativistic system[J]. *Chinese Physics*, 2001, **10**(4):271—276.

[37] 罗绍凯,郭永新,陈向炜,等．转动相对论 Birkhoff 系统动力学的场方法[J]. 物理学报,2001,**50**(11):2049—2052.

[38] Noether A E. Invariance variations problems[J]. *Kgl Ges Wiss Nachr Göttingen Math-Phys*, 1918,(2):235—257.

[39] Candottie E, Palmieri C, Vitale B. On the inversion of Noether's theory in classical dynamical system [J]. *America Journal of Physics*, 1972, **40**(5):424—429.

[40] Djukić Dj S, Vujanović B. Noether's theory in classical nonconservative mechanics[J]. *Acta Mechanica*, 1975, **23**(1):17—27.

[41] Vujanović B. Conservation laws of dynamical system via D'Alembert principle[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1978, **13**(2):185—197.

[42] Vujanović B. A study of conservation laws of dynamical systems by means of the differential variational principles of Jourdain and Gauss [J]. *Acta Mechanica*, 1986, **65**(1):63—80.

[43] 李子平．约束系统的对称变换[J]. 物理学报,1981,**30**(12):1699—1705.

[44] 李子平．非完整非保守奇异系统正则形式的 Noether 定理及其逆定理[J]. 科学通报,1992,**37**(23):2204—2205.

[45] Bahar L Y, Kwatny H G. Extension of Noether's theory to constrained nonconservative dynamical systems[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1987, **22**(2): 125—138.

[46] 刘端．非完整非保守动力学系统的守恒律[J]．力学学报，1989，**21**(1):75—83.

[47] 刘端．非完整非保守动力学系统的 Noether 定理及其逆定理[J]．中国科学 A 辑，1991，**31**(4): 419—429.

[48] 罗绍凯．非完整非有势系统相对于非惯性系的广义 Noether 定理[J]．应用数学和力学，1991，**12**(9):863—870.

[49] LUO Shao-kai. Generalized Noether's theorem of variable mass higher-order nonholonomic mechanical system in noninertial reference frame [J]. *Chinese Science Bulletin*, 1991, **36**(22): 1930—1932.

[50] 罗绍凯．相对论力学的广义守恒律[J]．信阳师范学院学报，1991，**4**(4):57—64.

[51] LUO Shao-kai. On the invariant theory of nonholonomic system with constraints of non-Chetaev type [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1993, **6**(1): 47—57.

[52] 赵跃宇，梅凤翔．力学系统的对称性与守恒量[M]．北京：科学出版社，1999，1—72.

# Form Invariance and Noether Symmetrical Conserved Quantity of Relativistic Birkhoffian Systems

LUO Shao-kai[1,2,3]

(1. *Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Changsha University, Changsha* 410003, *P. R. China*;

2. *Department of Applied Physics, Hunan University, Changsha* 410082, *P. R. China*;

3. *Science College, Southern Yangtze University, Wuxi, Jiangsu* 214063, *P. R. China*)

**Abstract**: A form invariance of the relativistic Birkhoffian system is studied, and the conserved quantities of the system are obtained. Under the infinitesimal transformation of groups, the definition and criteria of the form invariance of the system were given. In view of the invariance of relativistic Pfaff-Birkhoff-D'Alembert principle under the infinitesimal transformation of groups, the theory of Noether symmetries of the relativistic Birkhoffian system were constructed. The relation between the form invariance and the Noether symmetry is studied, and the results show that the form invariance can also lead to the Noether symmetrical conserved quantity of the relativistic Birkhoffian system under certain conditions.

**Key words**: relativity; Birkhoffian system; Pfaff-Birkhoff-D'Alembert principle; form invariance; Noether symmetry; conserved quantity