

文章编号:1000-0887(2003)04-0378-07

# 三角形弹性夹杂对裂纹的影响

焦贵德<sup>1</sup>, 王银邦<sup>2</sup>

(1. 兰州大学 力学系, 兰州 730000; 2. 中国海洋大学 工程学院, 山东青岛 266071)

(本刊编委王银邦来稿)

**摘要:** 研究了三角形弹性夹杂和裂纹之间的相互影响问题。应用 Chau 和 Wang 导出的面力边值问题的边界积分方程为基本方程, 用夹杂和基体交界面上的面力和位移的连续性条件为补充方程, 从而得到了一组能够解决夹杂和裂纹相互影响问题的方程, 最后的方程组用一种新的边界单元法求解。计算了各种不同的夹杂和基体的材料常数以及夹杂和基体之间不同距离情况下裂纹尖端的应力强度因子。文中结果对研究新型复合材料有一定的应用价值。

**关键词:** 裂纹; 基体; 三角形夹杂; 边界单元法; 应力强度因子

**中图分类号:** O346.1 **文献标识码:** A

## 引 言

随着颗粒和纤维增强复合材料的发展, 夹杂和裂纹之间的相互影响问题成为一重要的研究领域, 同时它也是研究材料缺陷对工程结构元件的强度和断裂影响的模型。文[1~6]对圆形夹杂与裂纹的相互影响问题进行了研究; 文[7~12]对线形夹杂与裂纹的相互影响问题做过讨论; 文[13, 14]对椭圆形夹杂与裂纹的相互影响问题进行了研究。但是随着新型复合材料的发展, 增强材料的截面形状日益复杂。与圆形截面的纤维相比, 异形截面的纤维的力学性能、纤维与基体间的复合性能等都有较大改善; 结构型吸波材料中纤维的截面形状常为异形, 这使其在提高材料力学性能的同时, 又使它具有一定的吸波性能, 实现隐身与承载双功能, 如美国空军 B-2 型隐身轰炸机上使用的碳纤维为特殊截面<sup>[15, 16]</sup>。对于特殊截面夹杂与裂纹的相互影响的研究, 文献中还未见到。

本文应用文[17, 18]中的面力边值问题的边界积分方程为基本方程, 再利用基体和夹杂交界面应力和位移的连续性作补充方程, 从而得到了一组能够处理任何形状的夹杂和裂纹相互影响问题的方程。应用文[18]中的数值离散方法, 求解了无限平面含三角形夹杂和裂纹在单向拉伸状态下的相互影响问题, 给出了裂纹尖端的应力强度因子。

## 1 基本公式

一无限平面含一弹性三角形夹杂和一裂纹在无穷远处受拉应力  $\sigma$ , 其几何分布如图 1。基体和夹杂的弹性常数分别为  $G_1, \kappa_1$  和  $G_2, \kappa_2$ , 其中  $G_i$  是剪切模量,  $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$  (平面应变),

· 收稿日期: 2001-11-27; 修订日期: 2003-01-10

作者简介: 焦贵德(1971—), 男, 甘肃秦安人, 硕士(E-mail: gdjiao\_mail@sohu.com)。

$\kappa_i = (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i)$  (平面应力),  $\nu_i (i = 1, 2)$  为泊松比. 本文只讨论裂纹面不受面力的情形.

对于基体, 可视为无限带孔平面, 其孔边受面力  $q^1(t)$ , 其边界积分方程为:

$$\int_{S_1 + \Gamma} \left\{ \frac{H(t)}{t - t_0} - \frac{\overline{H(\bar{t})}}{\bar{t} - \bar{t}_0} e^{-2i\alpha(t)} + e^{-2i\alpha(t_0)} \left[ \frac{H(t) - q(t)}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{t - t_0}{(\bar{t} - \bar{t}_0)^2} \overline{H(\bar{t})} e^{-2i\alpha(t)} \right] \right\} dt = \pi i [f(t_0) - g_1(t_0)]$$

$$(t_0 = x_{01} + ix_{02} \in S_1 + \Gamma); \quad (1)$$

位移单值型条件为:

$$\int_{\Gamma} H(t) dt = 0, \quad (2)$$

$$\int_{S_1} p^1(t) e^{-i\alpha(t)} dt = 0; \quad (3)$$

其中

$$H(t) = \frac{1}{\kappa_1 + 1} [q^1(t) + 2G_1 p^1(t) e^{-2i\alpha(t)}] \quad (t = y_1 + iy_2 \in S_1), \quad (4a)$$

$$H(t) = \frac{w(t) e^{-2i\alpha(t)}}{\kappa_1 + 1} \quad (t = y_1 + iy_2 \in \Gamma), \quad (4b)$$

$$w(t) = 2G_1 \frac{\partial}{\partial s(y)} \{ [u_1(y^+) - u_1(y^-)] + i[u_2(y^+) - u_2(y^-)] \}$$

$$(t \in \Gamma), \quad (5)$$

$$q(t) = q^1(t) \quad (t \in S_1; y = (y_1, y_2) \in S_1), \quad (6a)$$

$$q(t) = 0 \quad (t \in \Gamma; y = (y_1, y_2) \in \Gamma), \quad (6b)$$

$$e^{-i\alpha(t_0)} = -n_2(x_0) - in_1(x_0) \quad (x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in S_1 + \Gamma), \quad (7a)$$

$$e^{-i\alpha(t)} = -n_2(x) - in_1(x) \quad (x = (x_1, x_2) \in S_1 + \Gamma), \quad (7b)$$

$$f(t_0) = \sigma_n(x_0) + i\sigma_{ns}(x_0) \quad (t_0 \in S_1), \quad (8a)$$

$$f(t_0) = 0 \quad (t_0 \in \Gamma), \quad (8b)$$

$$g_1(t_0) = \sigma[1 + e^{-2i\alpha(t_0)}]. \quad (9)$$

对于夹杂, 可视为有限三角形平面, 其边界受面力  $q^2(t)$ , 其边界积分方程为

$$\int_{S_2} \left\{ \frac{H(t)}{t - t_0} - \frac{\overline{H(\bar{t})}}{\bar{t} - \bar{t}_0} e^{-2i\alpha(t)} + e^{-2i\alpha(t_0)} \left[ \frac{H(t) - q^2(t)}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{t - t_0}{(\bar{t} - \bar{t}_0)^2} \overline{H(\bar{t})} e^{-2i\alpha(t)} \right] \right\} dt = \pi i f(t_0) \quad (t_0 = x_{01} + ix_{02} \in S_2), \quad (10)$$

其中

$$H(t) = \frac{1}{\kappa_2 + 1} [q^2(t) + 2G_2 p^2(t) e^{-2i\alpha(t)}] \quad (t = y_1 + iy_2 \in S_2), \quad (11)$$

$$f(t_0) = \sigma_n(x_0) + i\sigma_{ns}(x_0) \quad (t_0 \in S_2), \quad (12)$$

$$e^{-i\alpha(t_0)} = -n_2(x_0) - in_1(x_0) \quad (x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in S_2), \quad (13a)$$

$$e^{-i\alpha(t)} = -n_2(x) - in_1(x) \quad (x = (x_1, x_2) \in S_2), \quad (13b)$$

在交界面上应力和位移的连续性可表达为:

$$q^1(t) = q^2(t), \quad (14)$$

$$p^1(t) = -p^2(t), \quad (15)$$

其中

$$q^1(t) = \sigma_n(\gamma) + i\sigma_{\tau n}(\gamma) \quad (t \in S_1; \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in S_1), \quad (16)$$

$$q^2(t) = \sigma_n(\gamma) + i\sigma_{\tau n}(\gamma) \quad (t \in S_2; \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in S_2), \quad (17)$$

$$p^1(t) = \frac{\partial}{\partial s(\gamma)} [u_1(\gamma) + iu_2(\gamma)] \quad (t \in S_1), \quad (18)$$

$$p^2(t) = \frac{\partial}{\partial s(\gamma)} [u_1(\gamma) + iu_2(\gamma)] \quad (t \in S_2); \quad (19)$$

$q^1(t)$  表示夹杂作用在基体上的面力;  $q^2(t)$  表示基体作用在夹杂上的面力;  $p^1(t)$  表示  $S_1$  上的位移密度函数;  $p^2(t)$  表示  $S_2$  上的位移密度函数;  $S_1$  和  $S_2$  分别表示分离基体和夹杂后基体和夹杂的界面边界,  $S_1$  以顺时针方向为正方向,  $S_2$  的正方向与  $S_1$  的正方向相反;  $\Gamma$  表示裂纹边界.  $\alpha(t)$  表示在边界  $S_1 + \Gamma$ 、 $S_2$  上  $t$  点的切线与全局坐标  $Ox_1$  轴的夹角,  $O$  为坐标原点;  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) 为笛卡尔坐标中位移分量;  $\sigma_n$  和  $\sigma_{\tau n}$  表示边界上的法向应力和切向应力; 上标 '+' 和 '-' 表示裂纹的上下表面;  $A$ 、 $B$  分别表示裂纹的左端点和右端点.

联立(1)、(2)、(3)、(10)并用连续性条件(14)、(15),应用文[18]中的数值离散方法,可求得裂尖单元上的  $H(t)$ ,用下式可直接求得裂纹尖端的应力强度因子<sup>[18]</sup>:

$$\begin{cases} K_I(A) - iK_{II}(A) = -\sqrt{2\pi |t_2^* - t_1^*|} \cdot iH_1^* & \text{对 } t_1^* = A, \\ K_I(B) - iK_{II}(B) = \sqrt{2\pi |t_2^* - t_1^*|} \cdot iH_2^* & \text{对 } t_2^* = B; \end{cases} \quad (20)$$

$$(i = \sqrt{-1}),$$

其中  $H_1^*$  和  $H_2^*$  由裂尖单元上的插值函数  $H(t)$  给出<sup>[18]</sup>.

## 2 数值结果

在图 1 中(a)、(b)两种情形下,取材料常数  $\kappa_1 = \kappa_2 = 2.0$ ,这里给出了裂纹尖端  $A$  在 4 种不同的硬度指数 ( $G_2/G_1 = 1/10\ 000, 10\ 000, 1/3, 3$ , 它们分别表示孔洞、刚性夹杂、相对较软夹杂和相对较硬夹杂 4 种不同情形) 和 3 种不同的夹杂尺寸 ( $a = 2c, 4c, 6c$ ) 下的应力强度因子.

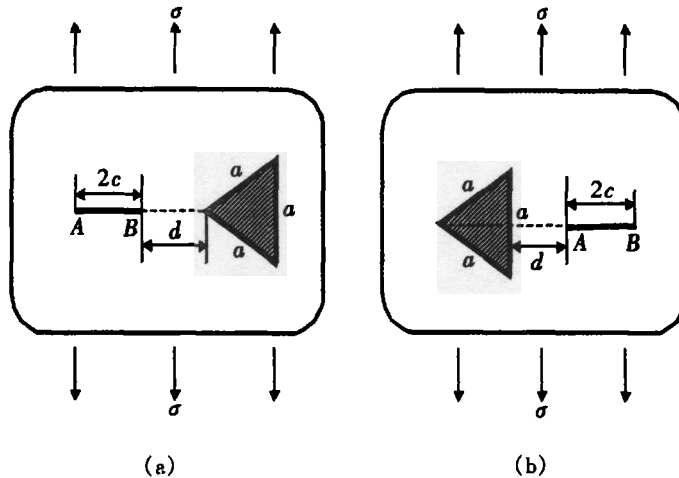


图 1 一无限平面含一三角形夹杂和一水平裂纹在无穷远处受单向拉伸

图 2 ~ 3 绘出了图 1 中 (a) 情形下裂纹尖端  $A$  的应力强度因子随裂纹与夹杂之间的距离的变化情况. 图 4 ~ 5 绘出了图 1 中 (b) 情形下裂纹尖端  $A$  的应力强度因子随裂纹与夹杂之间的距离

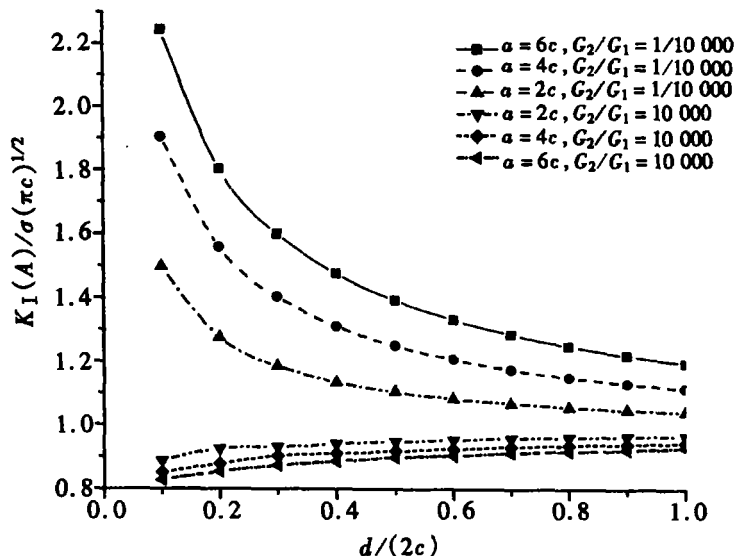


图2 裂纹尖端 A 的标准化应力强度因子  $K_I(A)/\sigma(\pi c)^{1/2}$   
随裂纹与夹杂之间距离的变化

(图 1(a)中,  $G_2/G_1 = 1/10000$ ;  $G_2/G_1 = 10000$ )

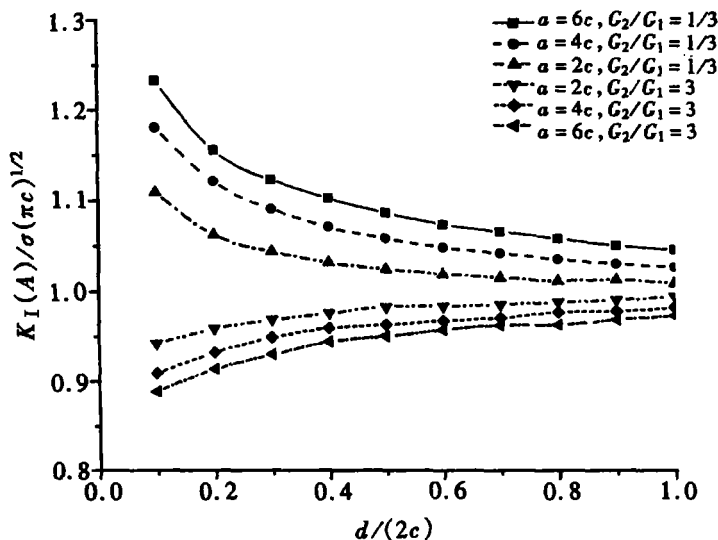


图3 裂纹尖端 A 的标准化应力强度因子  $K_I(A)/\sigma(\pi c)^{1/2}$   
随裂纹与夹杂之间距离的变化

(图 1(a)中,  $G_2/G_1 = 1/3$ ;  $G_2/G_1 = 3$ )

的变化情况。比较图 2 与图 4、图 3 与图 5, 可以看出, 图 1 中(b) 情形三角形夹杂对裂纹尖端 A 的应力强度子影响较图 1 中(a) 情形强烈。从图 2 ~ 图 5 看出, 在图 1 中的两种情形下, 软夹杂对裂纹尖端 A 的应力强度子具有增大作用; 而硬夹杂对裂纹尖端 A 的应力强度子具有屏蔽作用; 大夹杂对裂纹尖端 A 的应力强度子的影响较小夹杂对裂纹尖端 A 的应力强度子的影响强烈。随着裂纹与夹杂之间的距离的增大, 夹杂对裂纹尖端 A 的应力强度子的影响逐渐减弱。

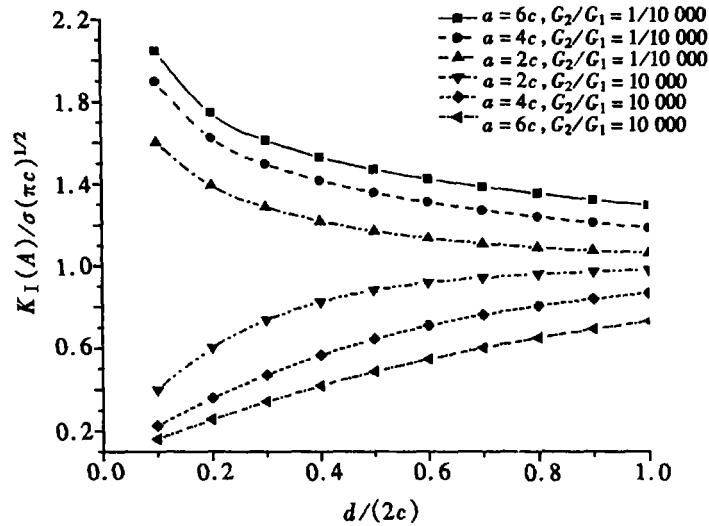


图4 裂纹尖端A的标准化应力强度因子 $K_I(A)/\sigma(\pi c)^{1/2}$ 随裂纹与夹杂之间距离的变化

(图1(b)中,  $G_2/G_1 = 1/10\ 000$ ;  $G_2/G_1 = 10\ 000$ )

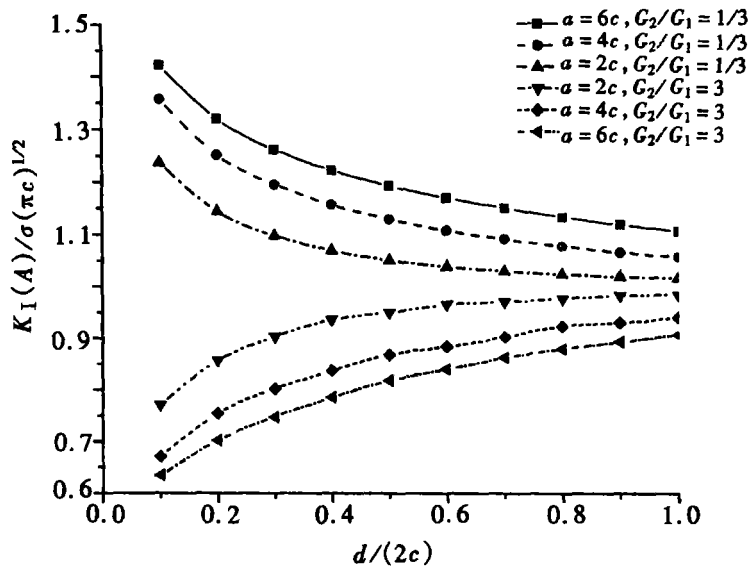


图5 裂纹尖端A的标准化应力强度因子 $K_I(A)/\sigma(\pi c)^{1/2}$ 随裂纹与夹杂之间距离的变化

(图1(b)中,  $G_2/G_1 = 1/3$ ;  $G_2/G_1 = 3$ )

### 3 结 论

对无限平面内正三角形夹杂与裂纹的相互影响进行了初步的研究,文中结果对研究新型复合材料有一定的应用价值。从两个算例的比较可以看出,三角形夹杂与裂纹的相互影响比规则截面的夹杂与裂纹的相互影响要复杂一些。这里需要说明的是,本文方法也适用于有限域、受任意载荷、以及裂纹面受面力的情况<sup>[18]</sup>。

## [参 考 文 献]

- [1] Tamate O. The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension[J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1968, 4(3): 257—265.
- [2] Atkinson C. The interaction between a crack and an inclusion[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1972, 10(2): 127—136.
- [3] Erdogan F, Gupta G D, Ratwani M. Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack[J]. *Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics*, 1974, 41(4): 1007—1013.
- [4] Lam K Y, Wen C. Enhancement/shielding effects of inclusion on arbitrarily oriented located cracks [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1993, 46(3): 443—454.
- [5] Cheeseman B A, Santare M H. The interaction of a curved crack with a circular elastic inclusion[J]. *International Journal of Fracture*, 2000, 103(3): 259—277.
- [6] Helsing J. Stress intensity factors for a crack in front of an inclusion[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1999, 64(2): 245—253.
- [7] Atkinson C. Some ribbon-like inclusion problems[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1973, 11(2): 243—266.
- [8] Liu X H, Erdogan F. The crack-inclusion interaction problem[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1986, 23(5): 821—832.
- [9] Patton E M, Santare M H. The effect of rigid elliptical inclusion on a straight crack[J]. *International Journal of Fracture*, 1990, 46(1): 71—79.
- [10] Hu K X, Chandra A. Interactions among cracks and rigid lines near a free surface[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, 30(14): 1919—1937.
- [11] 张明焕, 汤任基. 裂纹与弹性夹杂的相互影响[J]. *应用数学和力学*, 1995, 16(4): 289—300.
- [12] 陶 ■ 敏, 汤任基. 夹杂和裂纹的相互作用及端点相交的奇性态分析[J]. *应用数学和力学*, 2001, 22(5): 483—492.
- [13] Anlas G, Santare M H. A model for matrix cracks in short fiber composites[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, 30(12): 1701—1713.
- [14] Hwu C, Liang Y K, Yen W J. Interactions between inclusions and various types of cracks[J]. *International Journal Fracture*, 1995, 73(4): 301—323.
- [15] 王应德, 王娟, 冯春祥, 等. 吸波功能型非圆形截面碳化硅纤维制备与性能[A]. 见: 毛天祥 编. 复合材料的现状与发展[C]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2000, 57—61.
- [16] 沃丁柱. 复合材料大全[M]. 北京: 化学工业出版社, 2000, 1080—1130.
- [17] Chau K T, Wang Y B. A new boundary integral formulation for plane elastic problems involving cracks and holes[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 36(14): 2041—2074.
- [18] Wang Y B, Chau K T. A new boundary element method for plane elastic problems involving cracks and holes[J]. *International Journal of Fracture*, 1997, 87(1): 1—20.

## The Effect of an Elastic Triangular Inclusion on a Crack

JIAO Gui-de<sup>1</sup>, WANG Yin-bang<sup>2</sup>

(1. *Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China;*

2. *College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao, Shangdong 266071, P. R. China*)

**Abstract:** The interaction between an elastic triangular inclusion and a crack is investigated. The problem is formulated using the boundary integral equations for traction boundary value problems derived by Chau and Wang as basic equations. By using the continuity condition of traction and displacement on interface as supplement equations, a set of equations for solving the interaction problem between an inclusion and a crack are obtained, which are solved by using a new boundary element method. The results in terms of stress intensity factors (SIFs) are calculated for a variety of crack-inclusion arrangements and the elastic constants of the matrix and the inclusion. The results are valuable for studying new composite materials.

**Key words:** crack; matrix; triangular inclusion; boundary element method; stress intensity factors