应用数学和力学, 第 24 卷 第 5 期(2003 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 05_0441_09

局部凸 H_空间内的约束多目标对策*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 在没有线性结构的非紧局部凸 H_空间内引入和研究了一类新的约束多目标对策• 由应用对上半连续零调值映象的Fan_Glicksbery 型不动点定理和极大定理, 在非紧局部凸 H_空间内对约束多目标对策的加权Nash_平衡和 Pareto 平衡证明了几个平衡存在定理• 这些定理改进, 统一和推广了最近文献内多目标对策的相应结果•

关 键 词: 约束多目标对策; 极大定理; 不动点; 加权 Nash_平衡; Pareto 平衡; 局部凸 H_空间

中图分类号: O225; O177. 92 文献标识码: A

引 言

n_人对策平衡点概念首先由 Nash[1, 2] 引入, 他在某些假设下建立了平衡点的存在性• 自此以后 n_人对策的Nash 平均问题已经在各种假设和不同的方向上由许多作者广泛研究• 具有有限或无限个局中人的约束对策是 n_人对策的重要推广并被很多作者广泛研究•

最近在对策论中的很多注意力集中在对具有矢量支付的对策问题的研究上, 见[3~ 15]和其中的参考文献• 原因之一是多准则对策模型能更好地应用于真实世界情形• 多准则模型的研究能在 Szidarovszky 等[3], Zeleny[4], Bergstresser 和 Yu[5] 等人的工作中找到• Pareto 平衡存在性是基本问题之一• 为了保证多目标对策的 Pareto 平衡的存在性, 某些充分条件已由几个作者给出, 例如见 Wang[9, 10], 丁协平[11~ 13], Yuan 和 Tarafdar[14], Yu 和 Yuan[15]•

在本文中我们在非紧局部凸 H_空间内引入了一类新的具有无限多个局中人和具有约束对应的多目标对策• 由使用 Wu[16] 的对具有非空零调值的上半连续集值映像的 Fan_Glicksberg 型不动点定理和归于 Tian 和 Zhou[17] 的极大定理, 对具有无限多个局中人的约束多目标对策在没有线性结构的非紧 Hausdorff 局部凸 H_空间内建立了加权平衡和 Pareto 平衡的几个存在性定理• 这些定理改进, 统一和推广了最近文献中多目标对策的 Pareto 平衡的相应存在性结果•

1 预 备 知 识

令 X 和 Y 是非空集• 2^Y 和 $\mathscr{F}(X)$ 分别表 Y 的一切子集的簇和 X 的一切非空有限子集的

* 收稿日期: 2001_07_06; 修订日期: 2003_03_07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059); 四川省教育厅重点科研资助项目([2000] 25)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 四川自贡人, 教授(E_mail: dingxip@ sicnu. edu. cn)•

簇• 一拓扑空间 X 被称为零调空间如果它的约化 Cech 同调群在理域上等于零• 特别任何可缩空间是零调的且因此拓扑矢量空间内任何凸或星型集是零调的• 下面概念由 Tian 和 Zhou[17]引入• 如果 X 和 Y 是拓扑空间和$A:X\to 2^Y$ 是集值映象, 称函数$f:X\times Y\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ 在点(x,y) 关于A 是转移上(或下) 连续的, 如果对具有 $y\in A(x)$ 的每一$(x,y)\in X\times Y, f(x,z)>f(x,y)$(或$f(x,z)<f(x,y)$) 对某$z\in A(x)$ 成立蕴含存在点 $z'\in Y$和(x,y) 的一邻域$N(x,y)$ 使得对任何满足 $y'\in A(x')$ 的$(x',y')\in N(x,y), f(x',z')>f(x',y')$(或$f(x',z')<f(x',y')$) 和 $z'\in A(x')$• 称f 在点(x,y) 关于 X 是转移上(或下) 连续的如果对每一$(x,y)\in X\times Y, f(x,z)>f(x,y)$(或$f(x,z)<f(x,y)$) 对某$z\in X$ 成立, 则存在$z'\in Y$和(x,y) 的一邻域$N(x,y)$ 使得对任何$(x',y')\in N(x,y), f(x',z')>f(x',y')$(或$f(x',z')<f(x',y')$) •

引理 1.1[17, p.296] 令X 和Y是两个拓扑空间• 令$A:X\to 2^Y$是具有非空紧值和闭图的集值映象和令$f:X\times Y\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ 在点(x,y) 关于A 是转移上连续的• 则由下式定义的集值映象 $M:X\to 2^Y$:

$$M(x)=\left\{y\in A(x):f(x,y)=\sup_{z\in A(x)}f(x,z)\right\}\qquad(\forall x\in X)$$

是非空紧值的且有闭图• 如果再设A 是上半连续的, 则 M 也是上半连续的•

由 Bardaro 和 Ceppitelli[18, 19] 引入的下列概念 是由 Horvath[20, 21] 的较早工作启发而来•

称对$(X,\{\Gamma_A\})$ 是H_空间如果X 是一拓扑空间和$\{\Gamma_A\}$是由$A\in\mathscr{F}(X)$ 标号的X 的可缩子集的簇使得每当$A\subset A'$ 时, $\Gamma_A\subset\Gamma_{A'}$• 显然每一拓扑矢量空间和它的凸子集全是$H$_空间其中对每一$A\in\mathscr{F}(X)$, $\Gamma_A=\mathrm{co}(A)$ 和$\mathrm{co}(A)$ 是A 的凸包• 称H_空间$(X,\{\Gamma_A\})$ 的子集 B 是

(i) H_凸的如果对每一$A\in\mathscr{F}(B)$, $\Gamma_A\subset B$,

(ii) 弱H_凸的如果对每一$A\in\mathscr{F}(B)$, $\Gamma_A\cap B$ 是可缩的,

(iii) H_紧的如果对每一$N\in\mathscr{F}(X)$, 存在 X 的一紧弱H_凸子集E 使得$N\cup B\subset E$•

Wu[16] 引入了下面的概念, 一H_空间$(X,\{\Gamma_A\})$ 被说成是局部凸H_空间如果X 是具有一致结构的 $\mathscr{U}$的一致空间和存在 $\mathscr{U}$的基 $\beta=\{V_j:j\in J\}$ 使得对任何$V_j\in\beta$和$x\in X$, 集 $V_j(x)=\{y\in X:(x,y)\in V_j\}$ 是H_凸的• 显然局部凸拓扑矢量空间的每一非空凸子集 X 必是一局部凸H_空间其中对每一$A\in\mathscr{F}(X)$, $\Gamma_A=\mathrm{co}(A)$•

下面结果是 Wu[16] 的引理 2•

引理 1.2 令$(X,\{\Gamma_A\})$ 是局部凸H_空间, D 是X 的H_紧子集和$F:X\to 2^D$ 是具有非空闭零调值的上半连续集值映象• 则 F 有不动点, 即存在 $x_0\in D$ 使得$x_0\in F(x_0)$•

设I 是一有限或无限指标集和对每一$i\in I$, X^i 是拓扑空间• 我们将使用下面记号:

$$X=\prod_{i\in I}X^i\quad 和\quad X^{\hat{i}}=\prod_{j\in I,j\neq i}X^j•$$

对每一$x=\prod_{i\in I}x^i\in X$, x^i 表它的第i 个坐标和$x^{\hat{i}}$ 表x 在$X^{\hat{i}}$ 上的投影• 记$x=(x^i,x^{\hat{i}})$•

在本文中我们将研究具有有限或无限个局中人和多准则的约束多目标对策 $\Gamma=(X^i,A^i,F^i)_{i\in I}$• 对每一局中人 $i\in I$, x^i是他的策略集; $A^i:X^{\hat{i}}\to 2^{X^i}$ 是他的约束对应, 即当其他所有局中人$j\in I, j\neq i$ 已经选定他们的策略$x^j\in X^j$ 时, 限制第i 个局中人的策略仅能在X^i 的子集 $A^i(X^{\hat{i}})$ 上选取, 和 $F^i=(f^i_1,f^i_2,\dots,f^i_{k_i}):X\to R^{k_i}$ 是他的支付函数(或者说损失函数或多准则),

其中 k_i 是正整数• 在这样约束多目标对策中, 其他局中人在下列方面影响局的中人 $j\in I$:

(a) 由限制 j 的可行策略到 $A^j(x^{\hat{j}})$ 间接影响 j ;

(b) 由影响 j 的支付函数 F^j 而直接影响 j •

如果一策略 $x=\prod_{i\in I}x^i\in X$ 被执行, 每一局中人 i, 都试图极小化他或她的支付函数 $F^i(x)=(f^i_1(x),f^i_2(x),\cdots,f^i_{k_i}(x))$, 这构成不能测量的结果• 每一个局中人 i 在结果空间 R^{k_i} 上有一选择 $\succeq_i$• 对每一局中人 $i\in I$, 他的选择 $\succeq_i$ 被给出如下

$$z^1\succeq_i z^2 \text{ 当且仅当 } z^1_j\geqslant z^2_j\quad(\forall j=1,2,\cdots,k_i),$$

其中 $z^1=(z^1_1,z^1_2,\cdots,z^1_{k_i})$ 和 $z^2=(z^2_1,z^2_2,\cdots,z^2_{k_i})$ 是 R^{k_i} 内的任意元• 局中人的选择关系在 X 上诱导出对每一局中人 i 定义的选择, 即由下列方式选取 $x=\prod_{i\in I}x^i$ 和 $y=\prod_{i\in I}y^i$:

每当 $F^i(x)\succeq_i F^i(y)$ 时, $x\succeq_i y$ •

在约束多目标对策中每一个局中人 $i\in I$ 都试图按照他或她的选择来极小化他或她的支付•

如果 $I=N$ 是一有限集和对每一 $i\in N$ 和对一切 $x^{\hat{i}}\in X^{\hat{i}}$, $A_i(x^{\hat{i}})=X^i$ 则约束多目标对策的模型退化为多准则对策模型 $\Gamma=(X^i,F^i)_{i\in I}$• 这一模型已被 Wang[9, 10], Ding[11], Yu 和 Tarafdar[14] 和 Yu 和 Yuan[15] 研究• 如果对每一 $i\in I$, $F^i(x)=f^i(x)$, 即 $k_i=1$, 这由可测量结果组成, 则约束多目标对策的模型退化为约束对策(或亚对策) 模型• 这一模型已分别被 Aubin[22, pp282~283], Aubin 和 Ekeland[23, pp350~351], Ding[24, 25], Tian[26], Yuan, Isac, Tan 和 Yu[27] 等人研究•

对于具有矢量支付函数(或多准则) 对策, 如所周知对每一局中人 $i\in I$ 一般不存在一策略 $\hat{x}\in X$ 级小化(或等价地说极大化) 一切 f^i_j, 例如见参考文献[7]• 因此我们需要给出约束多目标对策解的某些概念• 全文中对每一给定正整数 m, 我们将用 R^m_+ 表 R^m 的非负 Orthant, 即

$$R^m_+=\left\{u=(u^1,u^2,\cdots,u^m)\in R^m: u^j\geqslant 0,\ \forall j=1,2,\cdots,m\right\},$$

于是 R^m 的非负 Orthant R^m_+ 有非空内部其拓扑由欧氏度量籍助于矢量收敛导出• 即有

$$\text{int }R^+_m=\left\{u=(u^1,u^2,\cdots,u^m)\in R^m: u^j>0,\ \forall j=1,2,\cdots,m\right\}•$$

我们分别用 T^m_+ 和 $\text{int}\,T^m_+$ 表示 R^m_+ 的单形和它的相对内部, 即

$$T^m_+=\left\{u=(u^1,u^2,\cdots,u^m)\in R^m_+: \sum_{j=1}^m u^j=1\right\},$$

$$\text{int}T^m_+=\left\{u=(u^1,u^2,\cdots,u^m)\in \text{int }R^m_+: \sum_{j=1}^m u^j=1\right\}•$$

现在我们有下面定义

定义 1.1 局中人 i 的一策略 $\hat{x}^i\in X^i$ 称为关于 $\hat{x}\in X$ 的 Pareto 有效策略(或弱 Pareto 有效策略) 如果 $\hat{x}^i\in A(\hat{x}^{\hat{i}})$ 且不存在策略 $x^i\in A(\hat{x}^{\hat{i}})$ 使得

$$F^i(\hat{x})-F^i(x^i,\hat{x}^{\hat{i}})\in R^{k_i}_+\setminus\{0\}\,(\text{或 } F^i(\hat{x})-F^i(x^i,\hat{x}^{\hat{i}})\in \text{int}R^{k_i}_+)•$$

定义 1.2 一策略 $\hat{x}\in X$ 被称为约束多目标对策 $\Gamma=(X^i,A^i,F^i)_{i\in I}$ 的一 Pareto 平衡(或弱 Pareto 平衡) 如果对每一 $i\in I$, $\hat{x}^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})$ 是一关于 $\hat{x}$ 的 Pareto 有效策略(或弱 Pareto 有效策略)•

从上面定义易知每一 Pareto 平衡是一弱 Pareto 平衡但其逆一般不真• 我们也需要下面定义• 思想源于 Wang[9, 10]•

定义 1.3 一策略 $\hat{x}\in X$ 被说成是约束多目标对策 $\Gamma=(X^i,A^i,F^i)_{i\in I}$ 关于权矢量 $W=\prod_{i\in I}W^i$ 的加权 Nash_ 平衡如果对每一 $i\in I$, 我们有

1) $\hat{x}^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})$;
2) $W^i\in R_+^{k_i}\setminus\{0\}$;
3) $W^i\cdot F^i(\hat{x})\leqslant W^i\cdot F^i(x^i,\hat{x}^{\hat{i}})$, $\forall x^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})$, 其中 $\cdot$ 表示 R^{k_i} 中的内积.

注 1.1 特别如果对每一 $i\in I$, $W^i\in T_+^{k_i}$, 则称此策略 $\hat{x}\in X$ 是关于 W 的正规加权 nash_ 平衡. 从上述定义不难证明一个策略 $\hat{x}\in X$ 是对策 $\Gamma=(X^i,A^i,F^i)_{i\in I}$ 关于权矢量 $W=\prod_{i\in I}W^i$ 的加权Nash_ 平衡当且仅当 $\hat{x}\in X$ 是下面无限最优化问题的一最优解: 寻求 $\hat{x}\in X$ 使得对每一$i\in I$,

$$\begin{cases}\hat{x}^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}}),\\ W^i\cdot F^i(\hat{x})=\min\limits_{x^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})}W^i\cdot F^i(x^i,\hat{x}^{\hat{i}}).\end{cases}$$

2 加权 Nash 平衡的存在性

作为引理 1.1 和引理1.2 的应用, 对约束多目标对策, 我们有下面加权 Nash 平衡存在性定理.

定理 2.1 令 $(X^i,A^i,F^i)_{i\in I}$ 是多约束多目标对策, 其中$(X^i,\{\Gamma_{A_i}^i\})$ 是 Hausdorff 局部凸 H_空间. 对每一 $i\in I$, 令 D^i 是X^i 的H_紧子集, $A^i:X^{\hat{i}}\to 2^{D^i}$ 是具有非空闭值的上半连续约束对应和 $F^i=(f_1^i,f_2^i,\cdots,f_{k_i}^i):X\to R^{k_i}$ 是支付函数. 假设存在权矢量 $W=\prod_{i\in I}W^i$ 具有 $W^i\in R^{k_i}\setminus\{0\}$ 使得对每一 $i\in I$,

1) 由 $g^i(x)=-W^i\cdot F^i(x)$ 定义的函数 $g^i:X=X^i\times X^{\hat{i}}\to\mathbf{R}$ 在点$(x^i,x^{\hat{i}})$ 关于 A^i 是转移上连续的,

2) 下列条件之一被满足:

(a) 如果 I 是有限的, 对每一 $i\in I$, $x^{\hat{i}}\in X^{\hat{i}}$,

$$\left\{y^i\in A^i(x^{\hat{i}}):g^i(y^i,x^{\hat{i}})=\sup_{z^i\in A^i(x^{\hat{i}})}g^i(z^i,x^{\hat{i}})\right\}$$

是零调集;

(b) 如果 I 是无限的, 对第一 $x\in X$,

$$\prod_{i\in I}\left\{y^i\in A^i(x^{\hat{i}}):g^i(y^i,x^{\hat{i}})=\sup_{z^i\in A^i(x^{\hat{i}})}g^i(z^i,x^{\hat{i}})\right\},$$

是零调集.

则 Γ 至少有一个关于权矢量 W 的加权 Nash 平衡点 $\hat{x}\in D=\prod_{i\in I}D^i$.

证明 令 $X=\prod_{i\in I}X^i$ 具有乘积拓扑和对每一$i\in I$, 令 $\pi_i:X\to X^i$ 是X 到X^i 上的投影. 对每一$A\in\mathscr{F}(X)$, 令 $\Gamma_A=\prod_{i\in I}\Gamma_{A_i}^i$ 其中$A_i=\pi_i(A)$. 因每一X^i 是 Hausdorff 局部凸H_空间, 由[28, p. 138], $(X,\{\Gamma_A\})$ 也是一Hausdorff 局部凸H_空间和$D=\prod_{i\in I}D^i$ 是X 的一H_紧子集. 因为每一 D^i 是H_紧的, 存在 X^i 的一紧弱H_凸子集 E_i 使得 $D^i\subset E_i$ 且因此每一$A^i(x^{\hat{i}})\subset D^i\subset E^i$. 注意到每一 A^i 是具有非空闭值的上半连续集值映象, 从 Aubin 和 Ekeland[23] 的命题 3.1.7 推得 A^i 有非空紧值和闭图. 由条件 1) 和引理 1.1, 由下式定义的映象 $G^i:X^{\hat{i}}\to 2^{X^i}$

$$G^i(x^{\hat{i}}) = \left\{ y^i \in A^i(x^{\hat{i}}) : g^i(y^i, x^{\hat{i}}) = \sup_{z^i \in A^i(x^{\hat{i}})} g^i(z^i, x^{\hat{i}}) \right\}$$

是上半连续的具有非空紧值• 对每一 $x \in X$, 令 $A(x) = \prod_{i \in I} G^i(x^{\hat{i}})$• 如果 I 是有限的, 由 2) (a) 和 Kunneth 公式(见 Massey[29]), 每一 $A(x)$ 是零调集• 如果 I 是无限的, 由 2) (b), 每一 $A(x)$ 是零调集• 从 Ky Fan[30] 的引理 3 推得 $A: X \to 2^D$ 也是上半连续的具有非空紧零调值• 由引理 1.2, 存在 $\hat{x} \in D$ 使得 $\hat{x} \in A(\hat{x})$ 且因此我们有对每一 $i \in I$,

$$\hat{x}^i \in A^i(\hat{x}^{\hat{i}}) \text{ 和 } g^i(\hat{x}) = \sup_{z^i \in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})} g^i(z^i, \hat{x}^{\hat{i}})$$

因此我们得到对每一 $i \in I$

$$\hat{x}^i \in A^i(\hat{x}^{\hat{i}}) \text{ 和 } W^i \cdot F^i(\hat{x}) \leqslant W^i F^i(x^i, \hat{x}^{\hat{i}}) \qquad (\forall x^i \in F^i(\hat{x}^{\hat{i}}))•$$

这就证明了 $\hat{x} \in D$ 是 Γ 关于权矢量 W 的一加权 Nash 平衡点•

注 2.1 如果对每一 $i \in I$, $(X^i, \{\Gamma^i_{A_i}\})$ 是紧 Hausdorff 局部凸 H_空间, 则令 $D^i = X^i$, $\forall i \in I$, 定理 2.1 的结论显然成立• 我们强调对每一 $i \in I$, 约束对应 A^i 和支付函数 $F^i = (f^i_1, f^i_2, \cdots, f^i_{k_i})$ 可以不是连续的• 如果 A^i 和 F^i 是连续的, 则条件 1) 被自动满足• 定理 2.1 改进和推广了 Yu 和 Yuan[15] 的定理 1 和 Wang[10] 的定理 3.1 到非紧局部凸 H_空间和具有无限多个局中人的约束多目标对策• 当 $I = N$ 是有限集时, 定理 2.1 也是一不同于 Ding[12] 的定理 4.1 和 Ding[13] 的定理 3.1 的新结果, 因为对第一 $i \in I$, 约束对应 A^i 的逆映象 $(A^i)^{-1}$ 可以不是紧开值的•

系 2.1 令 $\Gamma = (X^i, A^i, F^i)_{i \in I}$ 是约束多目标对策, 对每一 $i \in I$, 令 X^i 是局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间的非空凸子集, D^i 是 X^i 的非空紧子集, $A^i: X^{\hat{i}} \to 2^{D^i}$ 是具有非空闭凸集的上半连续约束对应和 $F^i = (f^i_1, f^i_2, \cdots, f^i_{k_i}): X \to R^{k_i}$ 是支付函数• 假设存在一权矢量 $W = \prod_{i \in I} W^i$, $W^i \in R^{k_i} \setminus \{0\}$ $\forall i \in I$, 使得对每一 $i \in I$,

1) 由 $g^i(x) = -W^i \cdot F^i(x)$ 定义的函数 $g^i: X^i \times X^{\hat{i}} \to \mathbf{R}$ 在点 $(x^i, x^{\hat{i}})$ 关于 A^i 是转移上连续的,

2) 对每一 $x^{\hat{i}} \in X^{\hat{i}}$, 函数 $y^i \to g^i(y^i, x^{\hat{i}})$ 是拟凹的•

则 Γ 至少有一关于权矢量 W 的加权 Nash 平衡点 $\hat{x} \in D = \prod_{i \in I} D^i$•

证明 对每一 $A_i \in \mathscr{F}(X^i)$, 令 $\Gamma^i_{A_i} = \mathrm{co}(A_i)$, 则 $(X_i, \{\Gamma^i_{A_i}\})$ 是 Hausdorff 局部凸 H_空间• 因 A^i 有闭凸值, 从条件 2) 推得对每一 $x^{\hat{i}} \in X^{\hat{i}}$, 集

$$\left\{ y^i \in A^i(x^{\hat{i}}) : g^i(y^i, x^{\hat{i}}) = \sup_{z^i \in A^i(x^{\hat{i}})} g^i(z^i, x^{\hat{i}}) \right\}$$

是非空凸的且因此定理 2.1 的条件 2) (a) 和 2) (b) 被满足• 结果从定理 2.1 推得•

定理 2.2 令 $\Gamma = (X^i, F^i)_{i \in I}$ 是多目标对策其中 $(X^i, \{\Gamma^i_{A_i}\})$ 是紧 Hausdorff 局部凸 H_空间和 $F^i = (f^i_1, f^i_2, \cdots, f^i_{k_i}): X \to R^{k_i}$ 是支付函数• 假设存在权矢量 $W = \prod_{i \in I} W^i$, $W^i \in R^{k_i} \setminus \{0\}$ 使得对每一 $i \in I$,

1) 由 $g^i(x) = -W^i \cdot F^i(x)$ 的函数 $g^i: X \to \mathbf{R}$ 在 $(x^i, x^{\hat{i}})$ 关于 X_i 是转移上连续的,

2) 下列条件之一被满足:

(a) 如果 I 有限, 集 $\left\{ y^i \in X^i : g^i(y^i, x^{\hat{i}}) = \sup_{z^i \in X^i} g^i(z^i, x^{\hat{i}}) \right\}$ 是零调的;

(b) 如果 I 无限, 集 $\prod_{i\in I}\left\{y^i\in X^i: g^i(y^i, x^{\hat{i}}) = \sup_{z^i\in X^i} g^i(z^i, x^{\hat{i}})\right\}$
是零调的•
则 Γ 至少有一关于权矢量 W 的加权 Nash 平衡点 $\hat{x}\in X$•

证明 对每一 $i\in I$ 和 $x^{\hat{i}}\in X^{\hat{i}}$, 令 $D^i = X^i$, 和 $A^i(x^{\hat{i}}) = X^i$• 容易看出定理 2.2 的结论从定理 2.1 推得•

系 2.2 令 $\Gamma = (X^i, F^i)_{i\in I}$ 是多目标对策, 其中 X^i 是局部凸拓扑矢量空间的非空凸子集和 $F^i = (f^i_1, f^i_2, \cdots, f^i_{k_i}): X\to R^{k_i}$ 是支付函数• 假设存在一权矢量 $W = \prod_{i\in I} W^i$, $W^i\in R^{k_i}\setminus\{0\}$, 使得对每一 $i\in I$,

1) 由 $g^i(x) = -W^i\cdot F^i(x)$ 定义的函数 $g^i: X\to \mathbf{R}$ 在点 x 关于 X^i 是转移上连续的,

2) 对每一 $x^{\hat{i}}\in X^{\hat{i}}$, 函数 $y^i\to g^i(y^i, x^{\hat{i}})$ 是拟凹的•

则 Γ 至少有一关于权矢量 W 的加权 Nash 平衡点 $\hat{x}\in X$•

证明 容易看出结论从定理 2.1 和 2.2 或系 2.1 得到•

注 2.2 在定理 2.2 和系 2.2 中, 支付函数 F^i 可以不是连续的• 如果 F^i 是连续的, 则定理 2.2 和系 2.2 的条件 1) 被自动满足• 定理 2.2 改进和推广了 Yu 和 Yuan[15] 的定理 1, Wang[10] 的定理 3.1, Szidarovszky[3] 的定理 1.11 和 Borm[6] 的定理 1 到非紧 Hausdorff 局部凸 $H\_$ 空间• 定理 2.1 进一步统一和推广了上述结果到具有无限个局中人的约束多目标对策和到非紧 Hausdorff 局部凸 $H\_$ 空间•

定理 2.3 令 $\Gamma = (X^i, A^i, F^i)_{i\in I}$ 是具有无限个局中人的约束对策• 对每一 $i\in I$, $(X^i, \{\Gamma^i_{A_i}\})$ 是 Hausdorff 局部凸 $H\_$ 空间, D^i 是 X^i 的非空 $H\_$ 紧子集, $A^i: X^{\hat{i}}\to 2^{D^i}$ 是具有非空闭值的上半连续约束对应和 $f^i: X = \prod_{i\in I} X^i\to \mathbf{R}$ 是支付函数使得对每一 $i\in I$,

1) $g^i(x) = -f^i(x)$ 在 $(x^i, x^{\hat{i}})$ 关于 X_i 是转移上连续的,

2) 下列条件之一成立:

(a) 若 I 有限, 集 $\left\{y^i\in A^i(x^{\hat{i}}): g^i(y^i, x^{\hat{i}}) = \sup_{z^i\in A^i(x^{\hat{i}})} g^i(z^i, x^{\hat{i}})\right\}$ 是零调的;

(b) 若 I 无限, 集 $\prod_{i\in I}\left\{y^i\in A^i(x^{\hat{i}}): g^i(y^i, x^{\hat{i}}) = \sup_{z^i\in A^i(x^{\hat{i}})} g^i(z^i, x^{\hat{i}})\right\}$ 是零调的;

则存在点 $\hat{x}\in D = \prod_{i\in I} D^i$ 使得对每一 $i\in I$,

$$\hat{x}^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}}) \text{ 和 } f^i(\hat{x}) \leqslant f^i(x^i, \hat{x}^{\hat{i}}) \qquad (\forall x^i\in A^i(\hat{x}^{\hat{i}})),$$

即 $\hat{x}$ 是约束对策 Γ 的一平衡点•

证明 对每一 $i\in I$, 令 $F^i = f^i$, 即 $k_i = 1$ 和 $W^i = 1$• 则容易看出定理 2.3 的结论从定理 2.1 推得•

注 2.3 定理 2.3 改进和推广了 Aubin[22, p.283] 的定理 9.3.3 和 Aubin 和 Ekeland[23, p.351] 的定理 6.4.23 到没有线性结构的非紧局部凸 $H\_$ 空间•

3 Pareto 平衡存在性

在本节中我们将使用上节内加权 Nash 平衡存在结果来导出约束多目标对策的 Pareto 平衡的某些存在结果• 为此我们需要下面引理, 该引理告诉我们约束多目标对策的 Pareto 平衡存在性问题在某些情形下能简化到加权 Nash 平衡的存在性•

引理 3.1 对约束多目标对策 $\Gamma=(X^i, A^i, F^i)_{i\in I}$ 关于权矢量 $W=\prod_{i\in I}W^i\in\prod_{i\in I}T_+^{k_i}$ ($W\in\prod_{i\in I}\mathrm{int}T_+^{k_i}$) 的每一正规加权 Nash 平衡 $\hat{x}\in X$ 是 Γ 的一弱 Pareto 平衡(Pareto 平衡)•

证明 注意到对约束多目标对策的加权 Nash 平衡和 Pareto 平衡的定义, 由使用 Wang[10, pp.376~377] 的引理 2.1 的证明中类似的论证容易证明引理 3.1 的结论成立且因此我们省去•

注 3.1 我们注意到如果 $\hat{x}\in X$ 是 Γ 的具有权矢量 $W\in\prod_{i\in I}R_+^{k_i}\setminus\{0\}$ ($W\in\prod_{i\in I}\mathrm{int}R_+^{k_i}$) 的加权 Nash 平衡, 引理 3.1 的结论仍然成立• 也应指出 Γ 的一 Pareto 平衡不必是 Γ 的一加权 Nash 平衡•

定理 3.1 令 $\Gamma=(X^i, A^i, F^i)_{i\in I}$ 是约束多目标对策• 对每一 $i\in I$, $(X^i,\{\Gamma^i_{A_i}\})$ 是一 Hausdorff 局部凸 H_空间, D^i 是 X^i 的非空 H_紧子集, $A^i: X^{\hat{i}}\to 2^{D^i}$ 是具有非空闭值的上半连续约束对应和 $F^i=(f_1^i, f_2^i, \cdots, f_{k_i}^i): X\to R^{k_i}$ 是损失函数• 假设存在权矢量 $W=\prod_{i\in I}W^i$, $W^i\in R^{k_i}\setminus\{0\}$ $\forall i\in I$, 使得定理 2.1 的条件 1) 和 2) 被满足, 则 Γ 在 X 内至少有一弱 Pareto 平衡点• 此外, 如果 $W=\prod_{i=I}\mathrm{int}T_+^{k_i}$, 则 Γ 在 X 内至少有一 Pareto 平衡点•

证明 由定理 2.1, Γ 至少有一关于权矢量 W 的加权 Nash 平衡点 $\hat{x}\in\prod_{i\in I}D^i$• 引理 3.1 显示, $\hat{x}$ 也是 Γ 的一弱 Pareto 平衡点, 且如果 $W^i\in\prod_{i\in I}\mathrm{int}T_+^{k_i}$, $\forall i\in I$, 则 $\hat{x}$ 是 Γ 的一 Pareto 平衡点•

注 3.2 定理 3.1 是不同于 Ding[12] 的定理 4.1 和 Ding[13] 的定理 5.1 的新结果, 因为 A^i 的逆映象 $(A^i)^{-1}$ 可以不是紧开值的•

作为定理 3.1 的一直接推论, 我们能得到下面结果•

系 3.1 令 $\Gamma=(X^i, A^i, F^i)_{i\in I}$ 是约束多目标对策, 对每一局中人 $i\in I$, 他的策略集 X^i 是 Hausdorff 拓扑矢量空间的非空凸子集, D^i 是 X^i 的非空紧子集, $A^i: X^{\hat{i}}\to 2^{D^i}$ 他的是具有非空闭凸集的上半连续约束对应和 $F^i=(f_1^i, f_2^i, \cdots, f_{k_i}^i): X\to R^{k_i}$ 是他的支付函数• 假设存在一权矢量 $W=\prod_{i\in I}W^i\in\prod_{i\in I}R^{k_i}\setminus\{0\}$ 使得系 2.1 的条件 1) 和 2) 成立• 则 Γ 至少有一弱 Pareto 平衡点 $\hat{x}\in D$• 而且如果 $W\in\prod_{i\in I}\mathrm{int}T_+^{k_i}$, 则 Γ 至少有一 Pareto 平衡点•

证明 由系 2.1, Γ 至少有一关于权矢量 W 的加权 Nash 平衡点 $\hat{x}\in X$• 引理 3.1 蕴含 $\hat{x}$ 也是 Γ 的一弱 Pareto 平衡点且如果 $W\in\prod_{i\in I}\mathrm{int}T_+^{k_i}$, 则 $\hat{x}$ 是 Γ 的一 Pareto 平衡点•

[参 考 文 献]

[1] Nash J F. Equilibrium point in n_person games[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1950, **36**(1): 48—49.

[2] Nash J F. Noncooperative games[J]. Ann Math, 1951, **54**(2): 286—295.

[3] Szidarovszky F M E, Gershon M E, Duckstein L. Techniques for Multiobjective Decision Marking in System Management[M]. Amsterdam Holland: Elsevier, 1986.

[4] Zeleny M. Game with multiple payoffs[J]. Internat J Game Theory, 1976, **4**(2): 179—191.

[5] Bergstresser K, Yu P L. Domination structures and multicriteria problem in N_person games[J]. Theory and Decision, 1977, **8**(1): 5—47.

[6] Brom P E M, Tijs S H, Van Den Aarssen J C M. Pareto equilibrium in multiobjective games[J]. Methods of Operations Research, 1990, **60**(2): 303—312.

[7] Yu P L. Second_order game problems: Decision dynamics in gaming phenomena[J]. J Optim Theory Appl, 1979, **27**(1): 147—166.

[8] Chose D, Prasad U R. Solution concepts in two_person multicriteria games[J]. J Optim Theory Appl, 1989, **63**(1): 167—189.

[9] Wang S Y. An existence theorem of a Pareto equilibrium[J]. Appl Math Lett, 1991, **4**(1): 61—63.

[10] Wang S Y. Existence of a Pareto equilibrium[J]. J Optim Theory Appl, 1993, **79**(2): 373—384.

[11] 丁协平. 没有紧性, 连续性和凹性的多准则对策的帕雷多平衡[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(9): 801—808.

[12] DING Xie_ping. Existence of pareto equilibria for constrained multiobjective games in H_space[J]. Comput Math Appl, 2000, **39**(9): 125—134.

[13] DING Xie_ping. Constrained multiobjective games in general topological space[J]. Comput Math Appl, 2000, **39**(3/14): 23—30.

[14] YUAN Xian_zhi, Tarafdar E. Non_compact Pareto equilibria for multiobjective games[J]. J Math Anal Appl, 1996, **204**(1): 156—163.

[15] YU Jiao, YUAN Xian_zhi. The study of pareto equilibria for multiobjective games by fixed point and Ky Fan minimax inequality methods[J]. Comput Math Appl, 1998, **35**(9): 17—24.

[16] WU Xian. Approximate selection theorems in H_spaces with application[J]. J Math Anal Appl, 1999, **231**(1): 118—132.

[17] TIAN Guo_qiang, ZHOU Jian_xin. Transfer continuities, generalizations of the Weierstrass and maximum theorems: a full characterization[J]. J Math Economics, 1995, **24**(2): 281—303.

[18] Bardaro C, Ceppitelli L. Some further generalizations of Knaster_Kuratowski_Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1988, **132**(3): 484—490.

[19] Bardaro C, Ceppitelli L. Applications of generalized Knaste_Kuratowskir_Mazurkiewicz theorem to variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1989, **137**(1): 46—58.

[20] Horvath C. Points fixes et coincidences dans les espaces topologiques compacts contractiles[J]. C R Acad Sci Paris, 1984, **299**: 519—521.

[21] Horvath C. Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity[A]. In: Lin B L, Simons S Eds. Nonlinear and Convex Analysis: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics [C]. Vol 107, New York: Dekker, 1987, 99—106.

[22] Aubin J P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory[M]. Amsterdam: North_Holland, 1982.

[23] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Wiley, 1984.

[24] 丁协平. 拟变分不等式和社会平衡[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(7): 599—606.

[25] DING Xie_ping. Generalized quasi_variational inequalities, optimization and equilibrium problems[J]. J Sichuan Normal Univ, 1998, **21**(1): 22—27.

[26] TIAN Guo_qiang. Generalizations of the FKKM theorem and the Fan minimax inequality with applications to maximal elements, price equilibrium and complementarity[J]. J Math Anal Appl, 1992, **170**(2): 457—471.

[27] YUAN Xian_zhi, Isac G, Tan K K, et al. The study of minimax inequalities, abstract economics and applications to variational inequalities and Nash equilibria[J]. Acta Appl Math, 1998, **54**(1): 135—166.

[28] Tarafdar E. A fixed point theorem in H_space and related results[J]. Bull Austral Math Soc, 1990, **42**(1): 133—140.
[29] Massey W S. Singular Homology Theory [M]. New York: Springer_Verlag, 1980.
[30] Fan Ky. Fixed points and minmax theorems in locally convex spaces[J]. Proc Nat Acad Sci U S A, 1952, **38**: 121—126.

Constrained Multiobjective Games in Locally Convex $H_$Spaces

DING Xie_ping
(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P. R. China)

Abstract: A new class of constrained multiobjective games with infinite players in noncompact locally convex $H\_$ spaces without linear structure are introduced and studied. By applying a Fan_Glicksberg type fixed point theorem for upper semicontinuous set_valued mappings with closed acyclic values and a maximum theorem, several existence theorems of weighted Nath_equilibria and Pareto equilibria for the constrained multiobjective games are proved in noncompact locally convex $H\_$ spaces. These theorems improve, unify and generalize the corresponding results of the multiobjective games in recent literatures.

Key words: constrained multiobjective game; maximum theorem; fixed point; weighted Nash_equilibria; Pareto equilibria; locally convex $H_$space