应用数学和力学,第 24 卷 第 6 期(2003 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 06_0583_12

乘积G _凸空间内的G_B _优化映象的极大元及其应用(Ⅰ)*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 引入和研究了一类新的映拓扑空间到不同广义凸空间的集值映象簇• 利用连续单位分解定理和 Brouwer 不动点定理, 在乘积广义凸空间的非紧设置下, 对这类集值映象簇证明了极大元存在定理• 这些定理改进,统一和推广了近期文献中许多重要结果•

关 键 词: 极大元; G_B _优化映象族; 乘积 G _凸空间
中图分类号: O177.92 文献标识码: A

引 言

熟知在拓扑(矢量)空间内集值映象的极大元的存在性和它们的广泛应用已被很多在数学和经济学领域的作者广泛研究• 对各类集值映象极大元的存在性结果,它们对数理经济和其他数学分支的应用, 读者可参考文献[1~ 27]和其中的参考文献•

设 X 是拓扑空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是非空凸集 Y_i 的乘积空间, 其中每一 Y_i 在一Hausdorff拓扑矢量空间中和 I 是任何指标集• 令 $S: Y\to X$ 和对每一 $i\in I$, $A_i: X\to 2^{Y_i}$• 最近 Deguire, Tan 和 Yuan[23](也见[24, p. 71])引入了 L_S_优化映象(L_S_映象)类 $M_S(X, Y)_{i\in I}(L_S(X, Y)_{i\in I})$• 在文[23~ 25]中, 具有 L_S_优化映象的极大元、极小极大不等式和变分不等式解的某些存在性定理在乘积空间内被证明• Shen[26]在 H_空间内引入了 H_优化映象概念并建立了 H_优化映象的极大元的某些存在定理• 在 CH_空间内对具有 H_优化映象的抽象经济建立了平衡存在性定理•

令 X 是拓扑空间, $(Y_i, \Gamma_i)_{i\in I}$ 是一族 G_凸空间, 其中 I 是任何指标集和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$• 在本文中, 对每一 $i\in I$, 我们引入了一类新的涉及一集值映象 $F\in B(Y, X)$ 的 G_B_优化映象 $A_i: X\to 2^{Y_i}$• G_B_优化映象概念统一和推广了在[23, 24]中的 L_S_优化映象; 在[26]中的 H_优化映象和在[3~ 13, 16~ 19, 22]中的各类优化映象概念• 在拓扑空间和乘积 G_凸空间的非紧设置下对 G_B_优化映象证明了某些极大元存在性定理• 这些定理改进、统一和推广了在最近文献中很多重要的已知结果• 这些结果的应用将在一篇后继文章中给出•

* 收稿日期: 2002_01_19; 修订日期: 2003_02_19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059); 四川省教育厅重点科研资助项目([2000] 25)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 四川自贡人, 教授(E_mail: dingxip@ sicnu. edu. cn)•

1 预备知识

设 X 和 Y 是非空集• 我们将分别用 2^Y 和 $\mathscr{F}(X)$ 表 Y 的一切子集的族和 X 的一切非空有限子集的族• 对任何 $A\in\mathscr{F}(X)$, $|A|$ 表 A 的基数• 令 Δ_n 是具有顶点 $e_0, e_1, \dots, e_n$ 的 n_维标准单形• 如果 J 是 $\{0, 1, \dots, n\}$ 的非空子集, 我们用 Δ_J 表顶点集 $\{e_j: j\in J\}$ 的凸包• Park 和 Kim[28, 29] 在一个多余的保序条件下引入了广义凸(或 G_凸)空间概念• 最近 Park[30] 去掉此多余条件给出了 G_凸空间的如下定义: 称 (Y, Γ) 是 G_凸空间, 如果 Y 是拓扑空间和 $\Gamma: \mathscr{F}(Y)\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ 使得对每一 $M\in\mathscr{F}(Y)$, $|M| = n+1$, 存在连续映象 $\varphi_M: \Delta_n\to\Gamma(M)$ 使得 $B\in\mathscr{F}(M)$, $|B| = |J| + 1$ 蕴含 $\varphi_M(\Delta_J)\subset\Gamma(B)$, 其中 Δ_J 表 Δ_n 的对应于 $B\in\mathscr{F}(M)$ 的面•

设 (Y, Γ) 是 G_凸空间和 $D\subset Y$• 称 D 是 G_凸的, 如果对每一 $M\in\mathscr{F}(D)$, $\Gamma(M)\subset D$• 称 G_凸空间 (Y, Γ) 是 CG_凸的如果对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$, 存在一 Y 的包含 N 的紧 G_凸子集 L_N• 显然拓扑矢量空间内的任何非空凸集 Y; 任何紧 H_空间; 任何 Shen[26] 意义下的 CH_空间和任何紧 G_凸空间都是 CG_凸空间• G_凸空间的主要例子是拓扑矢量空间的凸子集, 具有 Michael 凸结构的度量空间, Lassonde 的凸空间, 归于 Horvath 的 C_空间(或 H_空间), Pasicki 的 S_可缩空间, Horvath 的伪凸空间, Komiya 的凸空间, Bielawski 的简单凸性空间, Joo 的伪凸空间等等, 例如见[28~31]•

令 X 是拓扑空间和 (Y, Γ) 是 G_凸空间• Park[31] 引入了最佳容许映象类 $B(Y, X)$ 如下: $F\in B(Y, X)\Leftrightarrow F: Y\to 2^X$ 是上半连续集值映象具有非空紧值使得对任何 $A\in\mathscr{F}(Y)$, $|A| = n+1$ 和对任何连续映象 $\psi: F(\Gamma(A))\to\Delta_n$, 结合映象 $\psi\circ F|_{\Gamma(A)}\circ\varphi_A: \Delta_n\to 2^{\Delta_n}$ 有不动点•

如果 Y 是矢量空间 E 的非空凸子集和对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$ 具有 $|N| = n+1$, $\Gamma(N) = \mathrm{co}(N)$ 被赋予欧氏拓扑和 $\varphi_N: \Delta_n\to\mathrm{co}(N)$ 是一同态, 则 (Y, Γ) 是归于 Lassonde 的凸空间的推广, 它也变成一 G_凸空间• 在此情形下, 类 $B(Y, X)$ 由 Park[32, 33] 引入和研究• 最佳容许集值映象类 $B(Y, X)$ 包含非常重要的集值映象类, 例如在[28, 29] 中的 $\mathscr{U}_c^k(Y, X)$, 在[34] 中的 $KKM(Y, X)$ 和在[35] 中的 $A(Y, X)$ 等作为真子类, 见 Park[31]•

令 X 是拓扑空间和 D 是 X 的非空子集• 分别用 $\mathrm{int}D$ 和 $\overline{D}$ 表 D 在 X 内的内部和闭包• 称 D 在 X 内是紧开(紧闭)的, 如果对 X 的每一非空紧子集 K, $D\cap K$ 在 K 内是开(闭)的• 显然 X 的每一开(闭)子集在 X 内是紧开(紧闭)的•

设 X 是拓扑空间和 I 是一有限或无限指标集• 对每一 $i\in I$, 设 (Y_i, Γ_i) 是 G_凸空间和 $Y = \prod_{i\in I} Y_i$ 被赋予乘积拓扑• 对每一 $i\in I$, 令 π_i 是 Y 到 Y_i 上的投影• 定义 $\Gamma: \mathscr{F}(Y)\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ 为对每一 $D\in\mathscr{F}(Y)$, $\Gamma(D) = \prod_{i\in I}\Gamma_i(\pi_i(D))$, 则由使用 Tan 和 Zhang[19] 的定理 4.1 证明中相同的论证, 容易证明 (Y, Γ) 也是一 G_凸空间• 令 $F\in B(Y, X)$ 和对每一 $i\in I$, 令 $A_i: X\to 2^{Y_i}$ 是集值映象• 对每一 $y\in Y$, 记 $y = (y_i)_{i\in I}$ 其中 $y_i = \pi_i(y)\in Y_i$• 对每一 $i\in I$,

1) 称 $A_i: X\to 2^{Y_i}$ 是 G_B_映象如果

(a) 对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$, $F(\Gamma(N))\cap(\bigcap_{y\in N} A_i^{-1}(\pi_i(y))) = \varnothing$;

(b) 对每一 $y_i\in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i) = \{x\in X: y_i\in A_i(x)\}$ 在 X 内是紧开的•

2) 称 $A_{x,i}: X\to 2^{Y_i}$ 是 A_i 在点 $x\in X$ 的优化映象, 如果 $A_{x,i}$ 是 G_B_映象和存在 x 的邻域 $N(x)$

使得对一切 $z\in N(x)$, $A_i(z)\subset A_{x,i}(z)$.

3) 称 A_i 是 G_B_优化的如果对每一 $x\in X$, 存在 A_i 在点 x 的优化映象 $A_{x,i}$.

称 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是一 G_B_映象(G_B_优化映象) 的族, 如果对每一 $i\in I$, $A_i:X\to 2^{Y_i}$ 是 G_B_映象(G_B_优化映象).

显然 G_B_映象族和 G_B_优化映象族概念都是新的. 如果 $F=S$ 是单值映象和对每一 $x\in X$, $A_i(x)$ 是 G_凸的, 则条件: 对每一 $y\in Y$, $y_i\notin A_i(S(y))$ 蕴含 1) 中条件(a) 成立. 的确, 如果(a) 不成立, 则存在 $N\in\mathscr{F}(Y)$ 和 $y\in\Gamma(N)$ 使得 $F(y)=S(y)\in\bigcap_{y\in N}A_i^{-1}(\pi_i(y))$ 且因此 $y_i=\pi_i(y)\in A_i(S(y))$ 对每一 $y\in N$ 成立, 即有 $\pi_i(N)\subset A_i(S(y))$. 从 $y\in\Gamma(N)$ 推得 $y_i=\pi_i(y)\in\pi_i(\Gamma(N))=\Gamma_i(\pi_i(N))$. 从 $A_i(S(y))$ 的 G_凸性推得 $y_i=\pi_i(y)\in\Gamma_i(\pi_i(N))\subset A_i(S(y))$, 这与条件: 对每一 $y\in Y$, $y_i\notin A_i(S(y))$ 相矛盾. 因此每一由 Deguire, Tan 和 Yuan[23, p.934] 引入的 L_S_映象(L_S_优化映象) 必是 G_B_映象(G_B_优化映象). 其逆一般不真, 见[26, p.69] 的例子. 如果 $X=Y$, 则 G_B_映象和 G_B_优化映象是 Shen[26, p.69] 在 H_空间引入的 H_对应和 H_优化对应的推广. 因此 G_B_映象类和 G_B_优化映象类顺次推广了在[1~27] 中引入的优化对应类.

2 极大元的存在性

我们首先对一 G_B_映象证明下面极大元存在定理.

定理 2.1 设 X 是拓扑空间和 (Y,Γ) 是 G_凸空间. 设 $F\in B(Y,X)$ 和 $A:X\to 2^Y$ 是 G_B_映象使得

(ⅰ) 存在非空集 $Y_0\subset Y$ 和对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$, 存在 Y 的紧 G_凸子集 L_N 包含 $Y_0\cup N$ 使得 $K=\bigcap_{y\in Y_0}(A^{-1}(y))^c$ 在 X 内是空的或紧的, 其中 $(A^{-1}(y))^c$ 表 $A^{-1}(y)$ 的补集. 则存在一点 $\hat{x}\in X$ 使得 $A(\hat{x})=\varnothing$.

证明 假设结论不真, 则 A 在 X 上有非空值. 如果 K 是空集, 则我们有

$$X=X\setminus\bigcap_{y\in Y_0}(A^{-1}(y))^c=\bigcup_{y\in Y_0}A^{-1}(y). \tag{1}$$

如果 K 是非空紧集, 我们有

$$K=\bigcup_{y\in Y}(A^{-1}(y)\cap K).$$

因 K 是紧集和由 G_B_映象的条件(b), $A^{-1}(y)$ 在 X 内是紧开的, 存在 $N\in\mathscr{F}(Y)$ 使得

$$K=\bigcup_{y\in N}(A^{-1}(y)\cap K)\subset\bigcup_{y\in N}A^{-1}(y).$$

从 $K=\bigcap_{y\in Y_0}(A^{-1}(y))^c$ 推得

$$X\setminus\bigcup_{y\in Y_0}A^{-1}(y)=\bigcap_{y\in Y_0}(A^{-1}(y))^c=K\subset\bigcup_{y\in N}A^{-1}(y).$$

因此我们得到

$$X=\bigcup_{y\in Y_0\cup N}A^{-1}(y). \tag{2}$$

所以在两种情形下, 存在 $N\in\mathscr{F}(Y)$ 使(2) 式成立. 由条件(ⅰ) 存在 Y 的紧 G_凸子集 L_N 包含 $Y_0\cup N$. 因 F 是上半连续的具有紧值, 从 Aubin 和 Ekeland[36] 的命题 3.1.11 推得 $F(L_N)$ 在 X 内是紧的. 由(2), 我们有

$$F(L_N)=\bigcup_{y\in L_N}(A^{-1}(y)\cap F(L_N)). \tag{3}$$

因此存在有限集 $M = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \mathscr{F}(L_N)$ 使得

$$F(L_N) = \bigcup_{i=0}^{n}(A^{-1}(y_i) \cap F(L_N)), \tag{4}$$

因为 L_N 也是 $G_$凸空间, 存在连续映象 $\varphi_M: \Delta_n \to \Gamma(M)$ 使得

$$\varphi_M(\Delta_J) \subset \Gamma(\{y_j : j \in J\}) \qquad \forall J \subset \{0, 1, \cdots, n\}• \tag{5}$$

令$\{\psi_i\}_{i=0}^{n}$ 是从属于开覆盖$\{A^{-1}(y_i) \cap F(L_N)\}_{i=0}^{n}$ 的连续单位分解• 则对每一 $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ 和$x \in F(L_N)$,

$$\psi_i(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in A^{-1}(y_i) \cap F(L_N) \subset A^{-1}(y_i)• \tag{6}$$

定义映象 $\psi: F(L_N) \to \Delta_n$ 如下:

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n}\psi_i(x)e_i \qquad \forall x \in F(L_N)• \tag{7}$$

则 ψ 是连续的且

$$\psi(x) = \sum_{j \in J(x)}\psi_j(x)e_j \in \Delta_{J(x)} \qquad \forall x \in F(L_N), \tag{8}$$

其中 $J(x) = \{j \in \{0, 1, \cdots, n\} : \psi_j(x) \neq 0\}$• 注意到 $M \subset L_N$ 和L_N 是$G_$凸的, 我们有 $\Gamma(M) \subset L_N$ 且因此$F(\Gamma(N)) \subset F(L_N)$• 因$F \in B(Y, X)$, 从(5) 和(8) 式推得函数 $\psi \circ F|_{\Gamma(M)} \circ \varphi_M: \Delta_n \to \Delta_n$ 有不动点$z \in \Delta_n$, 即有$z \in \psi \circ F|_{\Gamma(M)} \circ \varphi_M(z)$• 因此存在 $x_0 \in F|_{\Gamma(M)} \circ \varphi_M(z)$ 使得 $z = \psi(x_0)$• 由(5)、(8) 式和 $G_B_$映象的条件(a), 我们有

$$x_0 \in F|_{\Gamma(M)} \circ \varphi_M(z) \subset F(\varphi_M(\Delta_{J(x_0)})) \subset F(\Gamma(\{y_j : j \in J(x_0)\})) \subset \bigcup_{j \in J(x_0)}(X \setminus A^{-1}(y_j))•$$

所以存在 $j_0 \in J(x_0)$ 使得$x_0 \notin A^{-1}(y_{j_0})$• 另一方面, 由 $J(x_0)$ 的定义, 我们有 $\psi_{j_0}(x_0) \neq 0$• 从(6) 式推得 $x_0 \in A^{-1}(y_{j_0})$, 这是一矛盾• 因此必存在 $\hat{x} \in X$ 使得$A(\hat{x}) = \emptyset$•

定理 2.2 令 X 是拓扑空间, K 是X 的非空紧子集和(Y, Γ) 是 $G_$凸空间• 令$F \in B(Y, X)$ 和 $A: X \to 2^Y$ 是 $G_B_$映象使得

(i) 对每一 $N \in \mathscr{F}(Y)$, 存在 Y 的紧 $G_$凸子集L_N 包含N 使得对每一$x \in X \setminus K$, $L_N \cap A(x) \neq \emptyset$•

则存在点 $\hat{x} \in K$ 使得$A(\hat{x}) = \emptyset$, 即$\hat{x}$ 是A 的极大元•

证明 假设对每一 $x \in X$, $A(x) \neq \emptyset$, 则我们有

$$X = \bigcup_{y \in Y}A^{-1}(y) \text{ 和 } K = \bigcup_{y \in Y}(A^{-1}(y) \cap K)•$$

因K 是紧的和$A^{-1}(y)$ 是紧开的, 则存在 $N \in \mathscr{F}(Y)$ 使得

$$K = \bigcup_{y \in N}(A^{-1}(y) \cap K)•$$

由条件(i)和 $F \in B(Y, X)$, 存在 Y 的紧 $G_$凸子集L_N 包含N 和$F(L_N)$ 是 X 的紧子集且因此有

$$F(L_N) = \bigcup_{y \in Y}(A^{-1}(y) \cap F(L_N))•$$

使用与定理2.1证明中相类似的论证, 我们能证明存在 $\hat{x} \in X$ 使得$A(\hat{x}) = \emptyset$• 条件(i) 蕴含$\hat{x}$ 在K 中•

系 2.1 令 (X, Γ) 是 $G_$凸空间和K 是X 的非空紧子集• 令 $F \in B(X, X)$ 和 $A: X \to 2^X$ 是 $G_B_$映象使得

(i) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$, 存在 X 是紧$G_$凸子集L_N 包含N 使得对第一$x \in X \setminus K$, $L_N \cap$

$A(x) \neq \emptyset$.

则 A 有一极大元 $\hat{x} \in K$, 即 $A(\hat{x}) = \emptyset$.

证明 系 2.1 的结论由具有 $X = (Y, \Gamma)$ 的定理 2.2 推得.

注 2.1 我们注意到定理 2.1 的强制条件(ⅰ)和定理 2.2 的强制条件(ⅰ)不是等价的. 因此它们是不同的结果. 显然 Shen[26] 意义下的每一 $CH_$空间$(X, \{\Gamma_A\})$ 是 $G_$凸空间且对任何$N \in \mathscr{F}(X)$, $CH\_co(N)$ 是 X 的包含 N 的紧$G_$凸子集. 因此系 2.1 在下列几方面推广了 Shen[26] 的定理 2.1: 1) 从 $CH_$空间到$G_$凸空间; 2) 从 $H_$对应到$G_B_$映象; 3) 强制条件(ⅰ)比Shen[26] 的定理 2.1 内的强制条件更弱. 系 2.1 顺次推广了 Ding 和 Tan[10] 的定理 1, Ding 等[8] 的定理 1, Tulcea[5] 的定理 2, Toussaint[4] 的定理 2.2, Yannelis 和 Prabhakar [3] 的定理 5.1 和 Borglin 和 Keiding[1] 的系 1.

定理 2.3 设 X 是拓扑空间和(Y, Γ) 是 $G_$凸空间. 令 $F \in B(Y, X)$ 和$A: X \to 2^Y$ 是$G_B_$优化映象使得

(ⅰ) 存在 X 的仿紧子集E 使得$\{x \in X: A(x) \neq \emptyset\} \subset E$;

(ⅱ) 存在集 $Y_0 \subset Y$ 和对每一$N \in \mathscr{F}(Y)$, 存在 Y 的紧$G_$凸子集L_N 包含 $Y_0 \cup N$ 使得集 $K = \bigcap_{y \in Y_0}(A^{-1}(y))^c$ 是空的或紧的.

则 A 有一极大元$\hat{x} \in X$, 即 $A(\hat{x}) = \emptyset$.

证明 假设结论不真, 则对每一$x \in X$, $A(x) \neq \emptyset$. 因 A 是$G_B_$优化的, 对每一$x \in X$, 存在 x 在X 内的邻域$N(x)$ 和一 $G_B_$映象$A_x: X \to 2^Y$ 使得

(a) $A(z) \subset A_x(z)$ 对每一 $z \in N(x)$ 成立;

(b) 对每一$N \in \mathscr{F}(Y)$, $F(\Gamma(N)) \cap (\bigcap_{y \in N} A_x^{-1}(y)) = \emptyset$;

(c) 对每一$y \in Y$, $A_x^{-1}(y)$ 是紧开的.

因$X = \{x \in X: A(x) \neq \emptyset\} = E$ 是仿紧的, 由 Dugundji[37], X 的开覆盖$\{N(x): x \in X\}$ 有一开精确局部有限精细$\{O(x): x \in X\}$ 且对每一$x \in X$, $\overline{O(x)} \subset N(x)$, 因 X 是正规的. 对每一$x \in X$, 定义 $B_x: X \to 2^Y$ 如下:

$$B_x(z) = \begin{cases} A_x(z) & \text{如果 } z \in \overline{O(x)}, \\ Y & \text{如果 } z \in X \setminus \overline{O(x)}. \end{cases}$$

则对每一$y \in Y$, 有

$$\begin{aligned} B_x^{-1}(y) &= \{z \in \overline{O(x)}: y \in A_x(z)\} \cup \{z \in X \setminus \overline{O(x)}: y \in Y\} = \\ &(A_x^{-1}(y) \cap \overline{O(x)}) \cup (X \setminus \overline{O(x)}) = \\ &[A_x^{-1}(y) \cup (X \setminus \overline{O(x)})] \cap [\overline{O(x)} \cup (X \setminus \overline{O(x)})] = \\ &A_x^{-1}(y) \cup (X \setminus \overline{O(x)}). \end{aligned}$$

因此由(c), $B_x^{-1}(y)$ 在 X 内是紧开的.

现在定义映象 $B: X \to 2^Y$ 如下:

$$B(z) = \bigcap_{x \in X} B_x(z) \qquad \forall z \in X.$$

我们主张 B 是一$G_B_$映象且对每一$z \in X$, $A(z) \subset B(z)$. 的确对 X 的任何非空紧子集C 和对每一$y \in Y$ 具有$B^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset$, 令 $u \in B^{-1}(y) \cap C$ 是任意一点. 因$\{O(x): x \in X\}$ 是局部有限的, 存在 u 在X 内的开邻域V_u 使得$\{x \in X: V_u \cap O(x) \neq \emptyset\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一有限集. 如果 $x \notin \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 则 $\emptyset = V_u \cap O(x) = V_u \cap \overline{O(x)}$ 且因此对一切 $z \in V_u$,

$B_x(z)=Y$。这蕴含 $B(z)=\bigcap_{x\in X}B_x(z)=\bigcap_{i=1}^{n}B_{x_i}(z)$ 对一切 $z\in V_u$ 成立。由此推得对每一 $y\in Y$,

$$B^{-1}(y)=\{z\in X:y\in B(z)\}\supset\{z\in V_u:y\in B(z)\}=$$
$$\{z\in V_u:y\in\bigcap_{i=1}^{n}B_{x_i}(z)\}=V_u\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_{x_i}^{-1}(y)\right)。$$

令 $M_u=(V_u\cap C)\cap[\bigcap_{i=1}^{n}B_{x_i}^{-1}(y)\cap C]$, 则 M_u 是 u 在 C 中的邻域使得 $M_u\subset B^{-1}(y)\cap C$ 且因此 $B^{-1}(y)$ 在 X 内是紧开的。

另一方面对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$, 如果 $t\in\bigcap_{y\in N}B^{-1}(y)$, 则 $N\subset B(t)$。因为存在 $x_0\in X$ 使 $t\in\overline{O(x_0)}$ 和 $N\subset B(t)\subset B_{x_0}(t)=A_{x_0}(t)$, 由(b) 我们有 $t\in\bigcap_{y\in N}A_{x_0}^{-1}(y)$, $t\notin F(\Gamma(N))$。因此对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$ 我们有 $F(\Gamma(N))\cap(\bigcap_{y\in N}B^{-1}(y))=\emptyset$。这就证明了 B 是一 G_B_映象。

对每一 $z\in X$, 如果 $y\notin B(z)$, 则存在 $x_0\in X$ 使 $y\notin B_{x_0}(z)=A_{x_0}(z)$ 和 $z\in\overline{O(x_0)}\subset N(x_0)$。从(a) 推得 $y\notin A(z)$。因此我们有 $A(z)\subset B(z)$ 对一切 $z\in X$ 成立。由假设(ii), 存在集 $Y_0\subset Y$ 和对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$ 存在 Y 的紧 G_凸子集 L_N 包含 $Y_0\cup N$ 使得集 $K=\bigcap_{y\in Y_0}(A^{-1}(y))^c$ 是空的或紧的。注意到对每一 $z\in X$, $A(z)\subset B(z)$ 蕴含对每一 $y\in Y$, $(B^{-1}(y))^c\subset(A^{-1}(y))^c$。因此如果 $K'=\bigcap_{y\in Y_0}(B^{-1}(y))^c\neq\emptyset$, 则 K' 是紧集 K 的非空闭子集且因此它是紧的。由定理 2.1, 存在 $x\in X$ 使得 $B(x)=\emptyset$ 且因此 $A(x)=\emptyset$。这与假设对每一 $x\in X$, $A(x)\neq\emptyset$ 相矛盾。所以存在 $\hat{x}\in X$ 使得 $A(\hat{x})=\emptyset$。这就完成了证明。

定理 2.4 设 X 是拓扑空间, K 是 X 非紧子集和 (Y,Γ) 是 G_凸空间。令 $F\in B(Y,X)$ 和 $A:X\to 2^Y$ 是 G_B_优化映象使得

(i) 存在 X 的仿紧子集 E 使得 $\{x\in X:A(x)\neq\emptyset\}\subset E$;

(ii) 对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$, 存在 Y 的紧 G_凸子集 L_N 包含 N 满足对每一 $x\in X\setminus K$, $L_N\cap A(x)\neq\emptyset$。

则存在 $\hat{x}\in K$ 使得 $A(\hat{x})=\emptyset$。

证明 假设对每一 $x\in X$, $A(x)\neq\emptyset$。由定理 2.3 的证明, 存在一 G_B_映象 $B:X\to 2^Y$ 使得 $A(x)\subset B(x)$ 对每一 $x\in X$ 成立。从条件(ii) 推得对每一 $x\in X\setminus K$, $L_N\cap B(x)\neq\emptyset$。由定理 2.2, 存在一点 $x\in K$ 使得 $B(x)=\emptyset$ 且因此 $A(x)=\emptyset$。这与假设对每一 $x\in X$, $A(x)\neq\emptyset$ 相矛盾。所以存在 $\hat{x}\in X$ 使 $A(\hat{x})=\emptyset$。条件(ii) 蕴含 $\hat{x}\in K$。

注 2.2 如果 X 是紧的, 条件(i) 被平凡满足。如果 $X=(Y,\Gamma)$ 是紧 G_凸空间, 则由令 $K=X=Y=L_N$ 对一切 $N\in\mathscr{F}(X)$ 成立, 条件(i) 和(ii) 被自动满足。定理 2.4 在下列方式下统一和推广了 Shen[26] 的定理 2.1 系 2.2 和定理 2.3: 1) 从 CH_空间到一拓扑空间(定义域) 和一 G_凸空间(值域); 2) 从 H_优化对应到 G_B_优化映象; 3) 强制条件弱于 Shen[26] 的相应结果中的条件。定理 2.4 顺次从几方面推广 Yannelis 和 Prabhakar[3] 的系 5.1, Ding 和 Tan[10] 的定理 1, Ding[13] 的定理 5.3 和 Ding 和 Yuan[16] 的定理 2.3。

系 2.2 设 (X,Γ) 是紧 G_凸空间, $F\in B(X,X)$ 和 $A:X\to 2^X$ 是 G_B_优化映象。则存在 $\hat{x}\in X$ 使得 $A(\hat{x})=\emptyset$。

证明 由令 $X=(Y,\Gamma)=E=K=L_N$ 对每一 $N\in\mathscr{F}(X)$ 成立, 系 2.2 的结论从定理 2.4 得到。

注 2.3 系 2.2 在更弱的假设下推广了 Tan 和 Zhang[19] 的定理 5.2 到 G_B_优化映象。

系 2.3 设 X 是紧拓扑空间和 (Y,Γ) 是 $CG_$凸空间。令 $F\in B(Y,X)$ 和 $A:X\to 2^Y$ 是 $G_B_$优化映象。则 A 有极大元 $\hat{x}\in X$，即 $A(\hat{x})=\emptyset$。

证明 令 $E=K=X$，则定理 2.4 的条件(ⅰ)自动满足。因 (Y,Γ) 是 $CG_$凸空间，对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$ 存在 Y 的紧 $G_$凸子集 L_N 包含 N 且定理 2.4 的条件(ⅱ)也被平凡满足。由定理 2.4，存在 $\hat{x}\in X$ 使 $A(\hat{x})=\emptyset$，即 $\hat{x}$ 是 A 的极大元。

注 2.4 系 2.3 从下列方面推广了 Deguire, Tan 和 Yuan[23] 的定理 1: 1) 从拓扑矢量空间的凸子集 Y 到没有线性结构的 $CG_$凸空间; 2) 从 $L_S_$优化映象到 $G_B_$优化映象。

系 2.4 令 X 是拓扑空间和 (Y,Γ) 是 $CG_$凸空间。令 $F\in B(Y,X)$ 是紧映象和 $A:X\to 2^Y$ 是 $G_B_$优化映象。则存在 $\hat{x}\in X$ 使得 $A(\hat{x})=\emptyset$。

证明 因 F 是紧映象，存在 X 的紧子集 X_0 使得 $F(Y)\subset X_0$。考虑 A 到 X_0 的限制，即映象 $A|_{X_0}:X_0\to 2^Y$。容易验证 $A|_{X_0}$ 也是一 $G_B_$优化映象。由系 2.3，存在 $\hat{x}\in X_0$ 使得 $A|_{X_0}(\hat{x})=A(\hat{x})=\emptyset$。

注 2.5 系 2.4 在下列方面推广了 Deguire, Tan 和 Yuan[23] 的定理 2: 1) 从拓扑矢量空间的凸子集 Y 到没有线性结构的 $CG_$凸空间; 2) 从 $L_S_$优化映象到 $G_B_$优化映象。

定理 2.5 设 X 是拓扑空间和 I 是任何指标集。对每一 $i\in I$，令 (Y_i,Γ_i) 是 $G_$凸空间和令 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 使得 (Y,Γ) 是如前面定义的 $G_$凸空间。令 $F\in B(Y,X)$ 使得对每一 $i\in I$，

(ⅰ) $A_i:X\to 2^{Y_i}$ 是 $G_B_$优化映象;

(ⅱ) $\bigcup_{i\in I}\{x\in X:A_i(x)\neq\emptyset\}=\bigcup_{i\in I}\operatorname{int}\{x\in X:A_i(x)\neq\emptyset\}$;

(ⅲ) 存在 X 的仿紧子集 E_i 使得 $\{x\in X:A_i(x)\neq\emptyset\}\subset E_i$;

(ⅳ) 存在非空集 $Y_0\subset Y$ 和对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$ 存在 Y 的紧 $G_$凸子集 L_N 包含 $Y_0\cup N$ 满足: 集 $\bigcap_{y\in Y_0}\{x\in X:\exists\, i\in I(x),\ \pi_i(y)\notin A_i(x)\}$ 是空的或紧的其中 $I(x)=\{i\in I:A_i(x)\neq\emptyset\}$。则存在 $\hat{x}\in X$ 使得对每一 $i\in I$，$A_i(\hat{x})=\emptyset$。

证明 对每一 $x\in X$，令 $I(x)=\{i\in I:A_i(x)\neq\emptyset\}$。定义映象 $A:X\to 2^Y$ 如下:

$$A(x)=\begin{cases}\bigcap_{i\in I(x)}\pi_i^{-1}(A_i(x)) & \text{如果 } I(x)\neq\emptyset,\\ \emptyset & \text{如果 } I(x)=\emptyset。\end{cases}$$

则对每一 $x\in X$，$A(x)\neq\emptyset$ 当且仅当 $I(x)\neq\emptyset$。令 $x\in X$ 具有 $A(x)\neq\emptyset$，则存在 $j_0\in I(x)$ 使得 $A_{j_0}(x)\neq\emptyset$。由条件(ⅱ)，存在 $i_0\in I(x)$ 使得 $x\in\operatorname{int}\{x\in X:A_{i_0}(x)\neq\emptyset\}$。因 A_{i_0} 是 $G_B_$优化映象，存在 x 在 X 内的开邻域 $N(x)$ 和 A_{i_0} 在 x 的优化映象 A_{x,i_0} 使得

(a) $A_{i_0}(z)\subset A_{x,i_0}(z)$ 对每一 $z\in N(x)$ 成立;

(b) 对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$，$F(\Gamma(N))\cap\left(\bigcap_{y\in N}A_{x,i_0}^{-1}(\pi_i(y))\right)=\emptyset$;

(c) 对每一 $y_i\in Y_i$，$A_{x,i_0}^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的。

不失一般性我们可设 $N(x)\subset\operatorname{int}\{x\in X:A_{i_0}(x)\neq\emptyset\}$。因此对每一 $z\in N(x)$，$A_{i_0}(z)\neq\emptyset$。定义 $B_{x,i_0}:X\to 2^Y$ 如下:

$$B_{x,i_0}(z)=\pi_{i_0}^{-1}(A_{x,i_0}(z))\qquad\forall z\in X。$$

我们主张 B_{x,i_0} 是 A 在 x 点的 G_B_优化映象. 的确, 我们有

(a′) 对每一 $z \in N(x)$, $A(z) = \bigcap_{i\in I(z)} \pi_i^{-1}(A_i(z)) \subset \pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}(z)) \subset \pi_{i_0}^{-1}(A_{x,i_0}(z)) = B_{x,i_0}(z)$;

(b′) 对每一 $N \in \mathscr{F}(Y)$, 如果 $u \in \bigcap_{y\in N} B_{x,i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y))$, 则 $N \subset B_{x,i_0}(u)$, 且因此 $\pi_{i_0}(N) \subset A_{x,i_0}(u)$, 即 $u \in \bigcap_{y\in N} A_{x,i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y))$, 由(b), $u \notin F(\Gamma(N))$. 由此推得

$$F(\Gamma(N)) \cap \left(\bigcap_{y\in N} B_{x,i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y))\right) = \emptyset;$$

(c′) 由(c)对每一 $y \in Y$, 我们有 $B_{x,i_0}^{-1}(y) = A_{x,i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y))$ 在 X 内是紧开的.

因此 B_{x,i_0} 是 A 在点 x 的 G_B_优化映象和 $A: X \to 2^Y$ 是 G_B_优化的. 由(iii), 我们有

$$\{x \in X : A(x) \neq \emptyset\} \subset \{x \in X : A_{i_0}(x) \neq \emptyset\} \subset E_{i_0}.$$

由(iv), 存在非空集 $Y_0 \subset Y$ 和对每一 $N \in \mathscr{F}(Y)$, 存在 Y 的紧 G_凸子集 L_N 包含 $Y_0 \cup N$. 对每一 $y \in Y_0$, 从 A 的定义推得

$$A^{-1}(y) = \{x \in X : y \in A(x)\} = \left\{x \in X : y \in \bigcap_{i\in I(x)} \pi_i^{-1}(A_i(x))\right\} = \left\{x \in X : \pi_i(y) \in \bigcap_{i\in I(x)} A_i(x)\right\},$$

因此我们有

$$\bigcap_{y\in Y_0} (A^{-1}(y))^c = \bigcap_{y\in Y_0} \{x \in X : \exists\, i \in I(x),\ \pi_i(y) \notin A_i(x)\}.$$

由(iv), $K = \bigcap_{y\in Y_0}(A^{-1}(y))^c$ 是空集或非空紧集, 因此定理2.3的条件(ii)被满足. 由定理2.3, 存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $A(\hat{x}) = \emptyset$. 这蕴含 $I(\hat{x}) = \emptyset$, 即有对一切 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \emptyset$. 证毕.

定理2.6 设 X 是拓扑空间, K 是 X 的非空紧子集和 I 是任何指标集. 对每一 $i \in I$, 令 (Y_i, Γ_i) 是 G_凸空间和 $Y = \prod_{i\in I} Y_i$ 是如前定义的 G_凸空间. 令 $F \in B(Y, X)$ 和对每一 $i \in I$, $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 是 G_B_映象使得

(i) 对每一 $i \in I$ 和 $N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的非空紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i 和对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 满足 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \emptyset$.

则存在 $\hat{x} \in K$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \emptyset$.

证明 假设结论不真, 则对每一 $x \in K$, 存在 $i \in I$ 使得 $A_i(x) \neq \emptyset$. 因此我们有

$$K \subset \bigcup_{i\in I} \bigcup_{y_i\in Y_i} A_i^{-1}(y_i).$$

因 K 是紧的, 存在有限集 $J \subset I$ 使得对每一 $j \in J$, 存在 $N_j = \{y_j^1, y_j^2, \dots, y_j^{m_j}\} \subset Y_j$ 具有 $K \subset \bigcup_{j\in J} \bigcup_{k=1}^{m_j} A_j^{-1}(y_j^k)$. 由此推得对每一 $x \in K$, 存在 $j \in J \subset I$ 使得 $N_j \cap A_j(x) \neq \emptyset$. 任选固定 $y^0 = (y_i^0)_{i\in I} \in Y$. 对每一 $i \in I \setminus J$, 令 $N_i = \{y_i^0\}$. 由条件(i), 对每一 $i \in I$, 存在 Y_i 的非空紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i 且对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$, 满足 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \emptyset$. 因此对每一 $x \in X$, 存在 $i \in I$ 使得 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \emptyset$. 令 $L_N = \prod_{i\in I} L_{N_i}$, 则由 Tan 和 Zhang[19] 的引理4, L_N 是 (Y, Γ) 的非空紧 G_凸子集且因此它也是一紧 CG_凸空间. 令 $X_0 = F(L_N)$, 则 X_0 在 X 内是紧的. 定义 $A_i': X_0 \to 2^{L_{N_i}}$ 如下: $A_i'(x) = L_{N_i} \cap A_i(x)$. 对每一 $y_i \in L_{N_i}$, 我们有

$$(A_i')^{-1}(y_i) = \{x \in X_0 : y_i \in L_{N_i} \cap A_i(x)\} = X_0 \cap A_i^{-1}(y_i).$$

因为对每一 $i \in I$ 和 $y_i \in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的, $(A_i')^{-1}(y_i)$ 在 X_0 内是开的. 注意到

A_i 是$G_B_$映象, 对每一 $M\in\mathscr{F}(L_N)\subset\mathscr{F}(Y)$, 我们有

$$F(\Gamma(M))\cap(\bigcap_{y\in M}(A_i')^{-1}(\pi_i(y)))=$$
$$F(\Gamma(M))\cap(\bigcap_{y\in M}(X_0\cap A_i^{-1}(\pi_i(y))))\subset$$
$$F(\Gamma(M))\cap(\bigcap_{y\in M}A_i^{-1}(\pi_i(y)))=\varnothing.$$

因此对每一 $i\in I$, A_i' 是$G_B_$映象且因此它也是$G_B_$优化映象. 由系2.3, 存在$x\in X_0\subset X$ 使得对每一$i\in I$, $A_i'(x)=L_{N_i}\cap A_i(x)=\varnothing$. 这与前述事实对每一$x\in X$, 存在 $i\in I$ 使得$L_{N_i}\cap A_i(x)\neq\varnothing$ 相矛盾. 所以必存在 $\hat{x}\in K$ 使得每一$i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varnothing$. 证毕.

注2.6 定理2.6 在下列方面改进和推广了 Deguire, Tan 和 Yuan[23]的定理7: 1) 从Hausdorff 拓扑矢量空间的非空凸子集到 $G_$凸空间; 2) 从 $L_S_$映象族到$G_B_$映象族.

引理2.1 令X 是仿紧拓扑空间和I 是任何指标集. 对每一$i\in I$, 令(Y_i, Γ_i) 是 $G_$凸空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如前定义的$G_$凸空间. 令$F\in B(Y,X)$ 和对每一$i\in I$, $A_i: X\to 2^{Y_i}$ 是$G_B_$优化映象. 则对每一 $i\in I$, 存在一 $G_B_$映象$B_i: X\to 2^{Y_i}$ 使得对一切$x\in X$, $A_i(x)\subset B_i(x)$.

证明 对每一$i\in I$, 因A_i 是$G_B_$优化映象, 对每一$x\in X$, 存在x 在X 内的开邻域$N(x)$ 和一 $G_B_$映象$A_{x,i}: X\to 2^{Y_i}$ 使得

(a) $A_i(z)\subset A_{x,i}(z)$ 对每一 $z\in N(x)$ 成立;

(b) 对每一$N\in\mathscr{F}(Y)$, $F(\Gamma(N))\cap(\bigcap_{y\in N}A_{x,i}^{-1}(\pi_i(y)))=\varnothing$;

(c) 对每一$y_i\in Y_i$, $A_{x,i}^{-1}(y_i)$ 是紧开的.

因 X 是仿紧的, X 的开覆盖$\{N(x): x\in X\}$有一开精确的局部有限精细$\{O(x): x\in X\}$且因 X 是正规的, 对每一$x\in X$, $\overline{O(x)}\subset N(x)$. 对每一$x\in X$, 定义 $B_{x,i}: X\to 2^{Y_i}$ 如下:

$$B_{x,i}(z)=\begin{cases}A_{x,i}(z) & 若\ z\in\overline{O(x)},\\ Y_i & 若\ z\in X\setminus\overline{O(x)}.\end{cases}$$

则对每一$y_i\in Y_i$, 有

$$B_{x,i}^{-1}(y_i)=\{z\in\overline{O(x)}: y_i\in A_{x,i}(z)\}\cup\{z\in X\setminus\overline{O(x)}: y_i\in Y_i\}=$$
$$(A_{x,i}^{-1}(y_i)\cap\overline{O(x)})\cup(X\setminus\overline{O(x)})=$$
$$[A_{x,i}^{-1}(y_i)\cup(X\setminus\overline{O(x)})]\cap[\overline{O(x)}\cup(X\setminus\overline{O(x)})]=$$
$$A_{x,i}^{-1}(y_i)\cup(X\setminus\overline{O(x)}).$$

因此由(c), $B_{x,i}^{-1}(y)$ 在X 内是紧开的.

现在定义映象 $B_i: X\to 2^{Y_i}$ 如下:

$$B_i(z)=\bigcap_{x\in X}B_{x,i}(z)\qquad\forall z\in X.$$

我们主张 B_i 是一$G_B_$映象且对每一$z\in X$, $A_i(z)\subset B_i(z)$. 事实上, 对X 的任何非空紧子集 C 和对每一$y_i\in Y_i$, 具有 $B_i^{-1}(y_i)\cap C\neq\varnothing$, 令 $u\in B_i^{-1}(y_i)\cap C$ 是任意固定的, 因$\{O(x): x\in X\}$是局部有限的, 存在 u 在X 内的开邻域V_u 使得$\{x\in X: V_u\cap O(x)\neq\varnothing\}=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是一有限集. 如果$x\notin\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 则 $\varnothing=V_u\cap O(x)=V_u\cap\overline{O(x)}$. 且因此 $B_{x,i}(z)=Y_i$ 对一切$z\in V_u$ 成立. 这就蕴含对一切 $z\in V_u$, $B_i(z)=\bigcap_{x\in X}B_{x,i}(z)=\bigcap_{k=1}^{n}B_{x_k,i}(z)$. 由此推得对每一 $y_i\in Y_i$,

$$B_i^{-1}(y_i)=\left\{z\in X: y_i\in B_i(z)\right\}\supset\left\{z\in V_u: y_i\in B_i(z)\right\}=$$

$$\left\{z\in V_u: y_i\in\bigcap_{k=1}^{n}B_{x_k,i}(z)\right\}=V_u\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n}B_{x_k,i}^{-1}(y_i)\right)\bullet$$

令 $M_u=(V_u\cap C)\cap[\bigcap_{k=1}^{n}B_{x_k,i}^{-1}(y_i)\cap C]$, 则 M_u 是 u 在 C 内的开邻域使得 $M_u\subset B_i^{-1}(y_i)\cap C$, 且因此 $B_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的•

另一方面, 对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$, 如果 $t\in\bigcap_{y\in N}B_i^{-1}(\pi_i(y))$, 则对一切 $y\in N$, $\pi_i(y)\in B_i(t)$• 因为存在 $x_0\in X$ 使 $t\in\overline{O(x_0)}$ 和 $\pi_i(y)\in B_i(t)\subset B_{x_0,i}(t)=A_{x_0,i}(t)$ 对一切 $y\in N$ 成立, 我们有 $t\in\bigcap_{y\in N}A_{x_0,i}^{-1}(\pi_i(y))$• 因此由(b), $t\notin F(\Gamma(N))$• 故对每一 $N\in\mathscr{F}(Y)$, 有 $F(\Gamma(N))\cap(\bigcap_{y\in N}B_i^{-1}(\pi_i(y)))=\varnothing$• 这就证明了 B_i 是一 G_B_映象• 对每一 $z\in X$, 如果 $y_i\notin B_i(z)$, 则存在 $x_0\in X$ 使得 $y_i\notin B_{x_0,i}(z)=A_{x_0,i}(z)$ 和 $z\in\overline{O(x_0)}\subset N(x_0)$• 从(a) 推得 $y_i\notin A_i(z)$• 因此我们有 $A_i(z)\subset B_i(z)$ 对一切 $z\in X$ 成立•

注 2.7 引理 2.1 在几方面推广 Deguir, Tan 和 Yuan[23] 的引理 5•

定理 2.7 设 X 是仿紧拓扑空间和 I 是一有限或无限指标集• 对每一 $i\in I$, 令 (Y_i,Γ_i) 是 G_凸空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如前定义的 G_凸空间• 令 $F\in B(Y,X)$ 使得对每一 $i\in I$, $A_i: X\to 2^{Y_i}$ 是 G_B_优化的映象• 假设存在 X 的非空紧子集 K 和对每一 $i\in I$, $N_i\in\mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i 使得对每一 $x\in X\setminus K$, 存在 $i\in I$ 满足 $L_{N_i}\cap A_i(x)\neq\varnothing$• 则存在 $\hat{x}\in K$ 使得对一切 $i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varnothing$•

证明 由引理 2.1, 对每一 $i\in I$, 存在一 G_B_映象 $B_i: X\to 2^{Y_i}$ 使得 $A_i(x)\subset B_i(x)$ 对一切 $x\in X$ 成立• 容易看出族 $\left\{B_i\right\}_{i\in I}$ 满足定理 2.6 的一切条件• 由定理 2.6, 存在 $\hat{x}\in K$ 使得对每一 $i\in I$, $B_i(\hat{x})=\varnothing$, 且因此对每一 $i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varnothing$•

注 2.8 定理 2.7 在几个方面改进和推广了 Deguire, Tan 和 Yuan[23] 的定理 8•

[参 考 文 献]

[1] Borglin A, Keiding H. Existence of equilibrium actions and of equilibrium: A note on the "new" existence theorems[J]. J Math Econom, 1976, **3**(2): 313—316.

[2] Debreu G. A Social equilibrium existence theorem[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1952, **38**(1): 121—126.

[3] Yannelis N C, Prabhakar N D. Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces[J]. J Math Econom, 1983, **12**(2): 233—245.

[4] Toussaint S. On the existence of equilibra in economies with infinite commodities and without ordered preferences[J]. J Econom Theory, 1984, **33**(1): 98—115.

[5] Tulcea C I. On the equilibriums of generalized games[R]. The Center for Math, Studies in Economics and Management Science, Paper No. 696, 1986.

[6] Tulcea C I. On the approximation of upper semi_continuous correspondences and the equilibriums of generalized games[J]. J Math Anal Appl, 1988, **136**(2): 267—289.

[7] Ding X P, Kim W K, Tan K K. Equilibria of noncompact generalized games with $\mathscr{L}^*$_majorized preference correspondences[J]. J Math Anal Appl, 1992, **162**(3): 508—517.

[8] Ding X P, Kim W K, Tan K K. Equilibria of generalized games with L_majorized correspondences[J].

Internat J Math Math Sci, 1994, **17**(4): 783—790.

[9] Ding X P, Tan K K. A minimax inequality with applications to existence of equilibrium point and fixed point theorems[J]. Colloq Math, 1992, **63**(1): 233—247.

[10] Ding X P, Tan K K. On equilibria of noncompact generalized games[J]. J Math Anal Appl, 1993, **177**(1): 226—238.

[11] Ding X P, Tarafdar E. Fixed point theorems and existence of equilibrium points of noncompact abstract economies[J]. Nonlinear World, 1994, **1**(1): 319—340.

[12] Ding X P. Coincidence theorems and equilibria of generalized games[J]. Indian J Pure Appl Math, 1996, **27**(11): 1057—1071.

[13] Ding X P. Fixed points, minimax inequalities and equilibria of noncompact generalized games[J]. Taiwanese J Math, 1998, **2**(1): 25—55.

[14] Ding X P. Equilibria of noncompact generalized games with $\mathscr{U}$_majorized preference correspondences[J]. Appl Math Lett, 1998, **11**(5): 115—119.

[15] Ding X P. Maximal element principles on generalized convex spaces and their application[A]. In: R P Argawal Ed. Ser Math Anal Appl[C]. London: Taylor and Francis, 2002, 149—174.

[16] Ding X P, Yuan G X_Z. The study of existence of equilibria for generalized games without lower semicontinuity in locally convex topological vector spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, **227**(2): 420—438.

[17] Tan K K, Yuan X Z. Existence of equilibrium for abstract economies[J]. J Math Econom, 1994, **23**(2): 243—251.

[18] Tan K K, Yuan X Z. Approximation method and equilibria of abstract economies[J]. Proc Amer Math Soc, **122**(3): 503—510.

[19] Tan K K, Zhang X L. Fixed point theorems on G_convex spaces and applications[J]. Proc Nonlinear Funct Anal Appl, 1996, **1**(1): 1—19.

[20] Tarafdar E. A fixed point theorem and equilibrium point of an abstract economy[J]. J Math Econom, 1991, **20**(2): 211—218.

[21] Tarafdar E. Fixed point theorems in H_spaces and equilibrium points of abstract economies[J]. J Austral Math Soc, Ser A, 1992, **53**(1): 252—260.

[22] Yuan G X_Z. The study of minimax inequalities and applications to economies and variational inequalities[J]. Mem Amer Math Soc, 1998, **132**(625): 1—132.

[23] Deguire P, Tan K K, Yuan X Z. The study of maximal elements, fixed points for L_S_majorized mappings and their applications to minimax and variational inequalities in product topological spaces[J]. Nonlinear Anal, 1999, **37**(8): 933—951.

[24] Yuan G X_Z. KKM Theory and Application in Nonlinear Analysis[M]. New York: Marcel Dekker, Inc 1999.

[25] Yuan G X_Z. The existence of equilibria for noncompact generalized games[J]. Appl Math Lett, 2000, **13**(1): 57—63.

[26] Shen Z F. Maximal element theorems of H_majorized correspondence and existence of equilibrium for abstract economies[J]. J Math Anal Appl, 2001, **256**(1): 67—79.

[27] Singh S P, Tarafdar E, Watson B. A generalized fixed point theorem and equilibrium point of an abstract economy[J]. J Computat Appl Math, 2000, **113**(1): 65—71.

[28] Park S, Kim H. Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 173—187.

[29] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generanized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(3): 551—571.

[30] Park S. Continuous selection theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces [J]. Numer Funct Anal Optimiz, 1999, **25**(3): 567—583.

[31] Park S. Fixed points of admissible maps on generalized convex spaces[J]. J Korean Math Soc, 2000, **37**(4): 885—899.

[32] Park S. Coincidence theorems for the better admissible multimaps and their applications[J]. Nonlinear Anal, 1997, **30**(12): 4183—4191.

[33] Park S. A unified fixed point theory of multimaps on topological vector spaces[J]. J Korean Math Soc, 1998, **35**(4): 803—829. Corrections, ibid, 1999, **36**(4): 829—832.

[34] Chang T H, Yen C L. KKM property and fixed point theorems[J]. J Math Anal Appl, 1996, **203**(1): 224—235.

[35] Ben_El_Mechaiekh H, Chebbi S, Florenzano M, et al. Abstract convexity and fixed points[J]. J Math Anal Appl, 1998, **222**(1): 138—151.

[36] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.

[37] Dugundji J. Topology[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1966.

Maximal Elements for G_B_Majorized Mappings in Product G_Convex Spaces and Applications(Ⅰ)

DING Xie_ping

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University,
Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract: A new family of set_valued mappings from a topological space into generalized convex spaces was introduced and studied. By using the continuous partition of unity theorem and Brouwer fixed point theorem, several existence theorems of maximal elements for the family of set_valued mappings were proved under noncompact setting of product generalized convex spaces. These theorems improve, unify and generalize many important results in recent literature.

Key words: maximal element; family of G_B_majorized mappings; product G_convex space