

文章编号: 1000-0887(2003) 06_0565_07

迟滞型材料阻尼转轴的分岔*

丁千, 陈予恕

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 应用平均法研究迟滞型材料阻尼转轴的分岔。首先用 Hamilton 原理推导出复数形式的转轴运动微分方程, 然后用平均法求出各阶模态主共振时的平均方程, 并分析定常解的稳定性, 最后用奇异性理论分析正常运动和失稳运动响应(异步涡动)的分岔。研究表明, 一定参数条件下, 转轴在通过各阶临界转速(主共振)时, 可能会因受到冲击而失稳(Hopf 分岔)。正常运动响应在不平衡量较大时有滞后和跳跃现象, 而失稳运动响应是一类余维数较高的非对称分岔。由于内阻尼的非线性, 响应随转速增加时还可能产生二次 Hopf 分岔, 对应原系统的双调幅运动。做好动平衡及提高外阻尼水平是避免这种大幅值自激振动的有效措施。

关键词: 转轴; 迟滞型材料阻尼; Hopf 分岔; 自激振动

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

材料内阻尼引起转轴失稳的现象很早就被发现, 因此是转子动力学研究的一个重要课题^[1]。早期研究主要集中于线性内阻尼作用下转子的动力稳定问题, 以给出失稳判据^[2~4]; 随着非线性动力学的发展, 转子的失稳运动即分岔机理的研究也受到重视。文献[5, 6]用中心流形定理分别研究了自治粘弹性转轴和轴-盘系统的稳定区域和分岔, 文[7]则进一步研究了非自治转轴在一阶模态共振域附近较复杂的非线性动力学行为。

前述研究, 特别是分岔机理的研究, 主要是针对具有较强粘弹性阻尼的转子, 这类转子在诸如航天器和纺织机械中应用较多。其内阻特点是与材料应变速率有关, 进行稳定性分析时, 可以采用粘性阻尼模型^[4]。而其他旋转机械如汽轮机、压缩机转子等, 多由弹性较强(但非完全)的钢材制成, 在很大频率范围内, 内阻与材料应变速率无关, 仅与应变幅值有关。对此材料特性比较有说服力的描述是迟滞阻尼模型^[8], 它认为材料内阻尼是由应变变化落后于应力变化引起的, 而转轴失稳后的大幅异步涡动情况下, 内阻尼因材料大变形而呈非线性特点。

本文用平均法研究迟滞型材料阻尼转轴的分岔。首先用 Hamilton 原理推导出两端简支、考虑几何非线性和内阻的转轴运动微分方程, 然后用平均法求出其各阶模态主共振时的平均方程, 按线性内阻尼模型分析其定常解的稳定性, 最后用奇异性理论分析正常运动响应和失稳

* 收稿日期: 2002_02_01; 修订日期: 2003_02_19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19990510, 10272078); 国家重点基金研究专项经费资助项目(G1998010316)

作者简介: 丁千(1963—), 男, 安徽萧县人, 副教授, 博士(E-mail: qding@pubic.tpt.tj.cn)。

运动(应用非线性内阻尼模型)响应的分岔

1 迟滞型材料内阻尼

由于非完全弹性,工程上大多数材料受动载荷作用时,都会表现出应变变化落后于应力变化的滞后特性,其动态力 F 与动变形 r 形成图 1 所示的滞后回线。除去静变形弹性力 F_s 即得到材料内阻力 $F_d = F - F_s$ 。实验指出^[8],大多数金属材料(如钢材)的内阻力最大值 F_{d0} 在很大频率范围内与应变速率(动载频率)无关,而与变形幅值 a 呈指数关系,即 $F_{d0} = ka^m$,其中 k, m 与材料性质有关。

正常的同步涡动时(即 $\Omega = \omega$, 以下称为正常运动),转轴截面不受动应力作用。非同步涡动时($\Omega \neq \omega$),截面受动应力作用,滞后现象表现为应力中性线 $\sigma = 0$ 与应变中性线 $\varepsilon = 0$ 存在夹角。由于动态力与应力中性线垂直,所产生涡动切向分力 F_t 便成为促成转轴失稳的潜在因素,见图 2。对于非同步涡动转轴,最大内阻力 $F_{d0} = ka^m$ 中的 a 可以等效为轴心的涡动幅值 OO' 。一般认为,可用线性内阻模型进行稳定性分析,即取 $m = 1$,且 $k = k_1$ 。失稳后则应按非线性内阻模型进行分岔分析,以钢材转轴为例, $m = 2 \sim 2.3$ (本文取 $m = 2$)及 $k = k_1/a_0^{m-1}$, a_0 为失稳时的轴心涡动幅值。由于图 1(b) 的滞后回线短轴一般远远小于长轴,所以有 $F_d \approx F_{d0}$, 并与轴心位移速度方向相反。因此,作用于转轴截面形心 O' 的内阻力可写成:

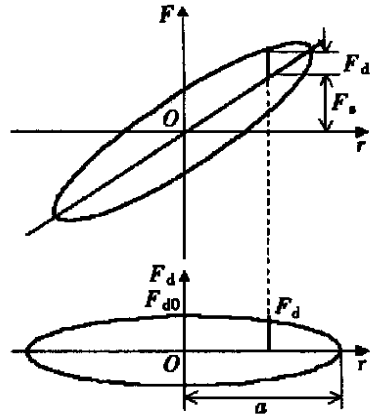


图 1 动态力与动变形滞后回线

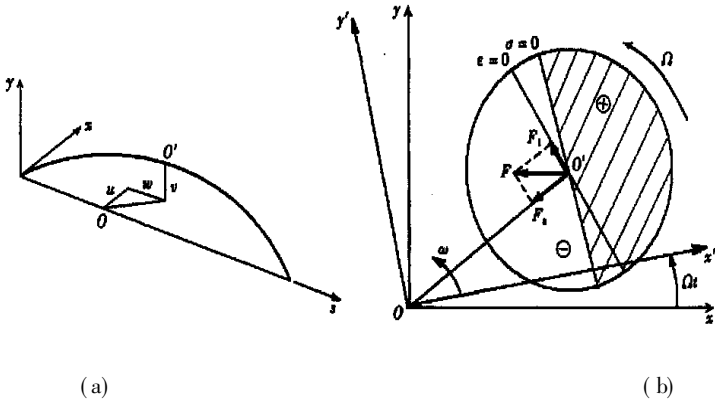


图 2 转轴模型与异步涡动时截面动态力
($\Omega > \omega$; σ —应力, ε —应变)

$$F_d = -ka^m \frac{\dot{\xi}}{|\xi|}, \tag{1}$$

式中 $\dot{\xi}$ 为 O' 相对于以自转角速度 Ω 转动的动坐标系 $Ox'y'$ 的速度。

2 运动方程

考虑图 2(a) 所示两端简支的均直转轴,长度为 l , 截面半径 R , 面积 A , 惯性矩 I , 密度 ρ , 以角速度 Ω 自转。因横向挠曲,轴线上点 $O(0, 0, s)$ 位移至 $O'(u, v, w + s)$ 。令 $Z = u + iv$,

$i = \sqrt{-1}$, 不考虑扭转运动, 转轴横向挠曲动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{Z}^2 ds = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \dot{Z}^2 ds \cdot$$

根据工程梁理论, 截面上距 $\varepsilon = 0$ 为 b 且与之平行的线段上的应变_位移关系为: $\varepsilon = w' - bZ'' + 0.5Z'Z'$, 其中 $()' = \partial()/\partial s$, 这样, 轴弯曲变形应变能为:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV = \frac{E}{2} \int_0^l \left[IZ''^2 + Aw'^2 + \frac{1}{2}Aw'Z'Z' \right] ds,$$

其中 E 为材料弹性模量. 将材料内阻力看作沿轴向分布的外力, 同时考虑外阻和质量不平衡力, 应用 Hamilton 原理结合边界条件 $w(0) = w(l) = 0$, 推导出 Z 方向复数形式的运动微分方程:

$$\rho A \ddot{Z} + EI Z'''' + C_e \dot{Z} - F_d(s) - \frac{EA}{2l} Z'' \int_0^l Z' Z' ds = \rho A \cdot e(s) \Omega^2 e^{i\Omega t}, \quad (2)$$

其中 C_e 为外阻尼系数, $e(s)$ 和 $F_d(s)$ 为沿轴向各截面的质量偏心距和内阻力. 设模态函数

$Z = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n(s)$, 这里 $\varphi_n(s) = \sin \frac{n\pi s}{l}$ ($s \in [0, l]$), 代表线性简支梁的第 n 阶弯曲振型, $f_n(t)$ 为 t 的复数形式的未知函数, 即第 n 阶模态振幅. 将内阻力 $F_d(s)$ 沿轴向按模态振型展开得到

$$F_d(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} k(f_n f_n)^{m/2} \frac{\xi_n}{|\xi_n|} \sin \frac{n\pi s}{l}, \quad (3)$$

其中 ξ_n 是第 n 阶模态振型波腹点相对于动坐标系 $O'x'y'$ 的速度. 质量偏心距也按模态振幅展开为

$$e(s) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi s}{l} \cdot$$

将 $Z, F_d(s)$ 和 $e(s)$ 的展开式代入(2), 应用 Galerkin 法计算得到考虑迟滞内阻影响的转轴关于模态振幅的常微分方程组:

$$\begin{aligned} \dot{f}_n + \omega_n^2 f_n - \mu f_n^2 + \frac{\nu}{n} \omega_n^2 (f_n f_n)^{m/2} \frac{\xi_n}{|\xi_n|} + \frac{\omega_n^2}{n^2 R^2} f_n \sum_{j=1}^{\infty} f_j f_j = \\ E_n \Omega^2 e^{i\Omega t} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\mu = C_e/\rho A$, $\nu = kl^2/(EI\pi^2)$ 分别为调整后的外、内阻尼系数, $\omega_n = (n\pi/l)^2 \sqrt{EI/\rho A}$ 为线性轴的第 n 阶固有圆频率.

3 平均方程和稳定性

由于作为转轴失稳因素的迟滞材料内阻力 F_d 与转轴涡动幅值成正比, 因此应主要研究通过各阶主共振(模态共振)时的稳定性. 第 n 阶主共振条件为 $\Omega = \omega_n + \varepsilon$, 这里 $\sigma = O(1)$ 是调谐参数, ε 是小参数. 对于简支轴, 此时 $f_n \gg f_k, k \neq n$, 因此考虑各项的量级之后, (4) 式可写为:

$$\begin{aligned} \dot{f}_n + \omega_n^2 f_n = \varepsilon \left[E_n \Omega^2 e^{i\Omega t} - \mu f_n^2 - \frac{\omega_n^2}{R^2} f_n^2 f_n - \right. \\ \left. \left(\frac{\nu}{n} \right) \omega_n^2 (f_n f_n)^{m/2} \frac{f_n - i \mathcal{Q}_n}{|f_n - i \mathcal{Q}_n|} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

设其一次近似解为: $f_n = a_n e^{i(\Omega + \theta_n)t}$, $f_n^2 = i \omega_n a_n e^{i(\Omega + \theta_n)t}$, a_n, θ_n (均为实数) 分别为振幅和

相位• 将其代入(5)式并进行KB一次平均^[9], 得平均方程:

$$\begin{cases} \dot{a}_n = \varepsilon \left[-\frac{1}{2} \mu a_n + \frac{1}{2} \frac{V}{n} \omega_n a_n^m - \frac{1}{2} E_n \omega_n \sin \theta_n \right], \\ \dot{\theta}_n = \varepsilon \left[-\sigma + \frac{\omega_n}{2R^2} a_n^2 - \frac{1}{2a_n} E_n \omega_n \cos \theta_n \right]. \end{cases} \quad (6)$$

取 $m = 1$, 研究内阻力影响下的转轴稳定性• 设 a_n, θ_n 为平均方程(6)的定常解 $\dot{a}_n = \dot{\theta}_n = 0$, 经推导, 其线性变分方程的特征方程为:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (7)$$

其中

$$p = \mu - \frac{V \omega_n}{n},$$

$$q = \left[-\frac{1}{2} \mu + \frac{V \omega_n}{2n} \right] \frac{E_n \omega_n}{2a_n} \sin \theta_n + \left[\frac{\omega_n a_n}{R^2} + \frac{E_n \omega_n}{2a_n^2} \cos \theta_n \right] \frac{E_n \omega_n}{2} \cos \theta_n.$$

因此, 正常运动响应的稳定条件是:

$$\mu > \frac{V \omega_n}{n} = nV\omega_1. \quad (8)$$

当 $\mu = nV\omega_1$ 时, 特征方程(7)具有一对纯虚根, 因此定常解失稳源于 Hopf 分岔, 意味着转轴产生异步振动• 正常同步涡动时, 转轴并不受内阻力作用, 内阻力一般首先出现于由横向冲击引起的瞬态异步涡动过程中• 若条件(8)成立, 瞬态异步涡动过程很快衰减, 恢复同步涡动; 反之若条件(8)不被满足, 异步涡动将持续下去, 形成失稳运动• 常见横向冲击源于动、碰摩^[10]和汽流扰动等等, 这在通过共振区时往往是不可避免的现象• 失稳后的持久异步涡动为自激振动, 过大的振幅及轴内较大的交变应力对系统的安全性是有害的•

(8)式还表明, 提高外阻尼有利于转轴正常运动的稳定性; 但随着转速提高(即通过更高阶主共振区), 外阻尼的抑止作用降低, 转轴失稳的可能性增大, 这与文[2, 8]的结论相符•

4 正常运动的分岔

令 $v = 0$, 从平均方程(6)的定常解 $\dot{a}_n = \dot{\theta}_n = 0$ 中消去循环项 θ_n , 得到正常运动的第 n 阶主共振分岔方程

$$R(x, \lambda, \Gamma) = [(x^2 - \lambda)^2 + \alpha^2]x^2 + \beta = 0, \quad (9)$$

其中 $x = \frac{\sqrt{\omega_n}}{R} a_n$, $\alpha = \mu$, $\beta = -\frac{\omega_n^3}{R^2} E_n^2$, $\lambda = 2\sigma$ •

取代表转速增量的 λ 为分岔参数, $\Gamma = (\alpha, \beta)$ 为开折参数平面, 应用奇异性理论^[11] 导出转迁集 $\mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{D}$: 分岔集 $\mathcal{B} = \{\beta = 0, \alpha < 0\}$; 滞后集 $\mathcal{H} = \{\alpha = -(\sqrt{3}/2)\beta^{1/3}, \beta \leq 0\}$; 双极限点集 $\mathcal{D} = \{\text{空集}\}$ • 参数平面 $\Gamma = (\alpha, \beta)$ 上的转迁集和对应各参数域的分岔曲线(实线为稳定解, 虚线为不稳定解)见图3•

对于实际物理系统, 我们有 $\alpha \geq 0$ 和 $\beta \leq 0$, 因此在物理参数平面 (E_n, μ) 上只有滞后集 $\mathcal{H} = \{E_n^2 = 8R^2 \mu^3 / (3\sqrt{3} \omega_n^3)\}$ 以及 ①和 ②两种分岔曲线• 分析表明, 越细长的

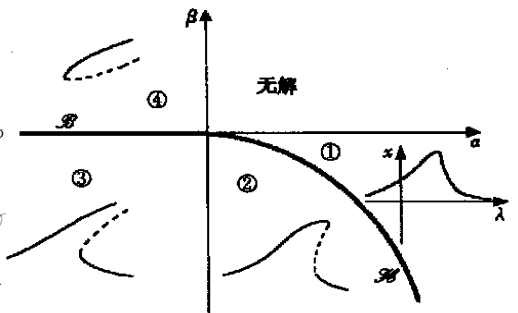


图3 正常运动的转迁集和分岔曲线

轴,越需要较大的不平衡量(E_n)以使响应出现滞后和跳跃现象,即分岔曲线②,但相应的最大振幅值及跳跃幅度也会更大。

5 失稳(自激)运动的分岔

不满足稳定条件(8)并受冲击失稳后,转轴一直受到非线性内阻力作用。取 $m = 2$,从(6)的定常解 $\dot{a}_n = \dot{\theta}_n = 0$ 中消去循环项 θ_n ,得失稳(自激)运动分岔方程:

$$G(x, \lambda, \Gamma) = [(x^2 - \lambda)^2 + (\alpha - \gamma x)^2]x^2 + \beta = 0, \tag{10}$$

其中 $\gamma = \mathcal{W}(\omega_n)^{1/2}/n$ 是内阻力对运动的影响。(10)为一类余维数较高的非对称分岔($G(-x) \neq G(x)$),目前对此情况的研究还比较少^[12]。本文也暂不研究其普适开折形式,仅针对本文讨论的具体问题,推导出(10)在开折参数空间 $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ 上的转迁集 $\mathcal{R} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{D}$ 分岔集

$$\mathcal{R} = \left\{ \beta = 0, \alpha < 0 \right\}, \mathcal{B} = \left\{ \beta = -\frac{\alpha^4}{16\gamma^2}, \text{sgn}(\alpha\gamma x) > 0 \right\};$$

滞后集

$$\mathcal{H} = \left\{ \beta = -\left[x^3 + \frac{\alpha\gamma}{4} \right] x^3, \alpha^2 \left[\frac{9}{8} \gamma^2 + 8x^2 \right] - 3\alpha\gamma(\gamma^2 + 7x^2) + 2x^2(\gamma^4 + 6\gamma^2x^2 - 3x^4) = 0 \right\};$$

双极限点集 $\mathcal{D} = \{ \text{空集} \}$ 。其中滞后集以参数形式给出(x 作为参数),需用数值求解并描绘其代表性曲面。由于实际物理系统只能有 $\alpha \geq 0, \beta \leq 0$ 和 $\gamma \geq 0$ 的情形,我们绘出该区域内 $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma)$ 空间及投影到 (α, β) 平面的转迁集,以及各参数域的分岔曲线,见图4。由于 $\alpha = \mu$ 而 $|\beta| \propto E_n^2$,因此若外阻尼固定,随着不平衡量增大,分岔响应曲线依次为①、②、③或①、②、③、④、③,显然,最大振幅值也在依次增大。反之不平衡量固定,最大振幅值随外阻尼增加而减小。

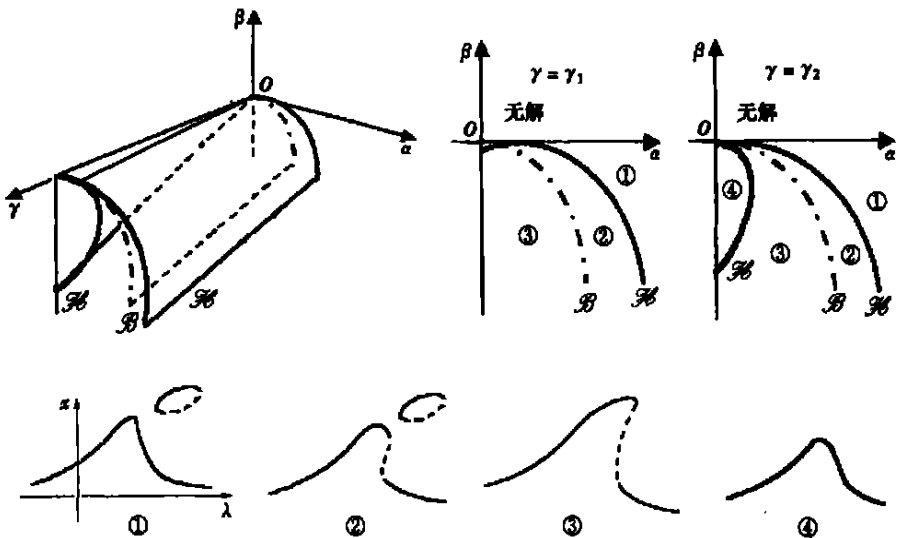


图4 自激运动的转迁集和分岔曲线($\gamma_2 > \gamma_1$)

令 $m = 2, \dot{a}_n = \dot{\theta}_n = 0$,由平均方程(6)得到对应自激运动响应的特征方程仍如(7)式所

示,其中:

$$p = \mu - \frac{3\nu\omega_n}{2n}a,$$

$$q = \frac{1}{4} \left[\mu - \frac{2\nu\omega_n}{n}a_n \right] \left[\mu - \frac{\nu\omega_n}{n}a_n \right] + \frac{1}{4} \left[2\sigma - \frac{\omega_n}{R^2}a_n^2 \right] \left[2\sigma - \frac{3\nu\omega_n}{R^2}a_n^2 \right].$$

因此当 $3\nu\omega_n a_n / (2n) < \mu$ 时, 自激运动稳定; 而 $a_n = 2n\nu / (3\nu\omega_n)$ 则为其 Hopf 分岔条件, 也就是说, 响应在随转速增加时会产生二次分岔, 对应原系统的双调幅运动, 特别是对于不平衡量及振幅较大的情形②、③更是如此。持久的大幅度异步运动既会引起轴内较大的交变应力, 从而使材料产生疲劳, 还可能会在一定转速时诱发油膜振荡, 对系统的安全性是有害的。尽可能做好动平衡以消除通过临界转速时的过大冲击, 以及提高外阻尼水平, 是避免转轴因迟滞材料阻尼引起有害自激振动的有效措施。

6 结 论

对转轴来说, 迟滞型材料阻尼是一种潜在的自激因素, 一定参数条件下, 使其在通过各阶临界转速(主共振)时, 经冲击作用而失稳(通过 Hopf 分岔)。本文研究表明, 提高外阻尼有利于转轴的稳定性, 但随着转速提高, 外阻尼的抑止作用随之降低, 仍存在失稳的可能性。正常运动响应在不平衡量较大时会有滞后和跳跃现象, 而失稳运动响应是一类余维数较高的复杂非对称分岔。由于内阻尼的非线性, 响应在随转速增加时还可能产生二次 Hopf 分岔, 对应原系统的双调幅运动。持久的大幅值异步运动对系统的安全性是有害的, 应尽可能做好动平衡及提高外阻尼水平, 以避免这种有害的自激振动。

[参 考 文 献]

- [1] Den Hartog J P. Mechanical Vibration [M]. New York: McGraw_Hill, 1965.
- [2] Tondl A. Some problems of Rotor Dynamics [M]. London: Chapman & Hall, 1965.
- [3] Vance J M, Lee J. Stability of high speed rotors with internal damping[J]. J Engineering for Industry, 1974, **96**(4): 960—968.
- [4] Zhang W, Ling F H. Dynamic stability of the rotating shaft mode of Boltzmann visco-elastic solid[J]. J Appl Mech, 1986, **53**(2): 424—429.
- [5] Shaw J, Shaw S W. Instability and bifurcation in a rotating shaft[J]. J Sound Vibration, 1989, **132**(2): 227—244.
- [6] Chang C O, Cheng J W. Non-linear dynamics and instability of a rotating shaft-disk system[J]. J Sound Vibration, 1993, **160**(3): 433—454.
- [7] Shaw J, Shaw S W. Non-linear resonance of an unbalanced rotating shaft with internal damping[J]. J Sound Vibration, 1991, **147**(3): 435—451.
- [8] 钟一鄂, 何衍宗, 王正, 等. 转子动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.
- [9] 陈予恕. 非线性振动[M]. 天津: 天津科技出版社, 1983.
- [10] 丁千, 陈予恕. 转子碰摩运动的非稳态分析[J]. 航空动力学报, 2000, **15**(2): 191—195.
- [11] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol 1 [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [12] 陈芳启, 吴志强, 陈予恕. 粘弹性圆柱形壳动力学高余维分岔、普适开折问题[J]. 力学学报, 2001, **33**(5): 661—668.

Bifurcation of a Shaft With Hysteretic_Type Internal Friction Force of Material

DING Qian, CHEN Yu_shu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: The bifurcation of a shaft with hysteretic internal friction of material was analysed. Firstly, the differential motion equation in complex form was deduced using Hamilton principle. Then averaged equations in primary resonances were obtained using the averaging method. The stability of steady-state responses was also determined. Lastly, the bifurcations of both normal motion (synchronous whirl) and self-excited motion (non-synchronous whirl) were investigated using the method of singularity. The study shows that by a rather large disturbance, the stability of the shaft can be lost through Hopf bifurcation in case the stability condition is not satisfied. The averaged self-excited response appears as a type of unsymmetrical bifurcation with high orders of co-dimension. The second Hopf bifurcation, which corresponds to double amplitude-modulated response, can occur as the speed of the shaft increases. Balancing the shaft carefully to decrease its unbalance level and increasing the external damping are two effective methods to avoid the appearance of the self-sustained whirl induced by the hysteretic internal friction of material.

Key words: shaft; hysteretic_type internal friction of material; Hopf bifurcation; non-synchronous whirl