

文章编号: 1000-0887(2003) 07_0723_07

窄带随机噪声作用下非线性系统的响应^{*}

戎海武^{1,2}, 王向东¹, 孟光², 徐伟³, 方同³

(1. 佛山科学技术学院 数学系, 广东佛山 528000; 2. 上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030; 3. 西北工业大学 应用数学系, 西安 710072)

(张石生、李骊推荐)

摘要: 研究了 Duffing 振子在窄带随机噪声激励下的主共振响应和稳定性问题。用多尺度法分离了系统的快变项, 讨论了系统的阻尼项、随机项等对系统响应的影响。在一定条件下, 系统具有两个均方响应值。数值模拟表明方法是有效的。

关键词: Duffing 振子; 主共振; 多尺度法

中图分类号: O324 文献标识码: A

引 言

迄今, 非线性系统随机振动的绝大部分成果都属于对随机宽带激励的响应。然而实际中很多情形下激励是窄带随机过程。例如近二十年来, 地震工程中很重视研究主次系统(如建筑物与其内设施)的地震响应。在串联分析中, 若主系统可模型化为在宽带随机激励下的小阻尼单自由度线性系统, 则次系统的激励就是窄带随机过程。而且与宽带随机激励相比, 在窄带随机激励下系统的非线性效应更为突出, 尤其在共振区及其邻域。研究起来也难些, 目前尚无有效的解析方法。因此研究非线性系统对窄带随机激励的响应具有重要的理论与实际意义。

在非线性系统对窄带随机激励的响应领域, 做过较多研究的是具有硬弹簧特性的 Duffing 振子, 因为在一定的条件下它的响应呈现出跳跃特性, 颇令人感兴趣。从非线性振动理论^[1]得知, Duffing 振子在简谐激励下, 当外激频率与系统固有频率之比值在某一范围之内时响应幅值有三个解, 其中最大与最小两个解是稳定的, 中间解是不稳定的。当外激频率逐渐增大或减少时, 响应会从一个稳定幅值跳到另一个稳定幅值, 这就是 Duffing 振子在简谐激励下的跳跃现象。1961 年, Lyon^[2] 等用等效线性化法得到了硬弹簧 Duffing 振子在窄带随机激励下均方位移响应多值解, 并用这种多值解解释实验中观察到的跳跃现象。在此后近 40 年中, 许多人继续研究这个问题, 多数仍用等效线性化法^[2~5], 也有用拟静态法^[6~7], 随机平均法^[8], 路径积分法^[9]及数值模拟^[10]。基本结论仍与 Lyon^[2] 等相同。而朱位秋^[11] 则认为 Duffing 系统在窄带随机激励下的均方响应是唯一的。本文用多尺度法对此问题作进一步的研究, 本文的结果表明在一定的条件下, Duffing 振子在窄带随机激励下可有两个均方位移响应。数值模拟表明本文

* 收稿日期: 2000_08_30; 修订日期: 2002_12_01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072049, 19972054); 广东省自然科学基金资助项目(000017); 上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室开放基金(VSN_2002_04)

作者简介: 戎海武(1966—), 男, 浙江宁波人, 副教授, 博士(E-mail: ronghw@foshan.net)。

提出的方法是有效的。

1 多尺度法

考虑受随机噪声激励的 Duffing 振子

$$\ddot{u} + \varepsilon \beta \dot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon \alpha u^3 = \xi(t), \quad (1)$$

式中 u 上方的圆点表示对时间 t 的导数, $\varepsilon \ll 1$ 为小参数, β, ω_0 分别为系统的阻尼系数和自然频率, $\alpha > 0$ 为系统的非线性强度, $\xi(t)$ 是随机噪声项, 本文采用 Wedig^[12] 提出的统一的模型

$$\xi(t) = h \cos(\Omega + \gamma W(t)), \quad (2)$$

式中 $h > 0$ 为随机激励的强度, Ω 为中心频率, $W(t)$ 是标准 Wiener 过程, $\gamma \geq 0$ 为随机扰动的强度。由 Wedig^[12] 可知当 γ 充分小时, $\xi(t)$ 是窄带随机噪声, 本文主要用多尺度法^[13] 研究这种情形, 此时模型(1)也可看作 Duffing 振子在窄带随机过程激励下的模型。多尺度法已广泛应用于确定系统的研究中, 近些年来在随机系统中也有一些应用。在随机外激的情形, Rajan 和 Davies^[14], Nayfeh 和 Serhan^[15] 用多尺度法研究了非线性系统的响应; 本文作者^[16] 则将多尺度法推广到非线性系统的随机参激情形。设系统(1)具有如下形式的解

$$u(t, \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (3)$$

式中 $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t$ 分别是快、慢时间尺度。

本文只对首次近似解 $u_0(T_0, T_1)$ 进行讨论。记 $D_0 = \partial/\partial T_0, D_1 = \partial/\partial T_1$, 按照 T_0, T_1 对时间的微分转化为

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (4)$$

将方程(3)、(4)代入方程(1)中, 并比较方程两边 ε 同次幂的系数, 可得下列微分方程组:

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0, \quad (5)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \varepsilon D_0 u_0 - \alpha u_0^3 + h \cos(\Omega + \gamma W(t)). \quad (6)$$

方程(5)的解为

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + cc, \quad (7)$$

式中 cc 表示前述各项的共轭, $A(T_1)$ 是随时间缓变的系统响应的振幅。将(2)、(7)两式代入(6)式可得

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2i\omega_0 A' \exp(i\omega_0 T_0) - i\omega_0 \varepsilon A \exp(i\omega_0 T_0) - \alpha A^3 \exp(3i\omega_0 T_0) - 3\alpha A^2 A \exp(i\omega_0 T_0) + \frac{h}{2} \exp[i\Omega T_0 + i\gamma W(T_1)] + cc, \quad (8)$$

式中 A', A 分别表示 A 关于 T_1 的导数及共轭, $\gamma = \gamma/\sqrt{\varepsilon}$ 。由于对于标准 Wiener 过程 $W(t)$, 有 $EW(t) = 0, EW^2(t) = t$, 故有

$$\gamma W(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}} W(\varepsilon t) = \gamma W(T_1). \quad (9)$$

(8)式右端的第一、二和四项可使方程(8)的特解产生长期项, 而依赖共振条件 $\Omega \approx \omega_0$, (8)式右端的第五项可使特解产生小除数项。本文下面将讨论系统(1)的主共振响应。

设 $\Omega \approx \omega_0$, 引入调谐参数 $\sigma, \Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$, 则有 $\Omega T = \omega_0 T_0 + \sigma T_1$ 。令(8)式右端中的奇异项为零可得

$$2i\omega_0 A' + i\beta\omega_0 A + 2\alpha A^2 - \frac{h}{2} \exp(i\sigma T_1 + i\gamma W(T_1)) = 0. \quad (10)$$

将 A 表示成极坐标的形式

$$A(T_1) = \alpha(T_1) \exp[i\varphi(T_1)], \quad (11)$$

将(11)式代入(10)式并分离实部和虚部可得

$$a' = -\frac{\beta}{2}a + \frac{h}{4\omega_0}\sin\eta, \quad a\eta' = \sigma a - \frac{3\alpha a^3}{2\omega_0} + \frac{h}{4\omega_0}\cos\eta - \gamma W'(T_1), \quad (12)$$

式中 $\eta = \sigma T_1 - \varphi + \gamma W(T_1)$ 。由(12)式解出 a 和 η 后, 可得方程(1)的首次近似解为

$$u = 2a(\varepsilon) \cos[\Omega - \eta(\varepsilon)] + O(\varepsilon). \quad (13)$$

2 线性化方法

下面我们求解方程(12)。此方程很难精确求解, 可用摄动法求解。由于 γ 较小, 可不妨设 $\gamma = 0$, 则方程(12)变为

$$a' = -\frac{\beta}{2}a + \frac{h}{4\omega_0}\sin\eta, \quad a\eta' = \sigma a - \frac{3\alpha a^3}{2\omega_0} + \frac{h}{4\omega_0}\cos\eta. \quad (14)$$

对于稳态振动 $a = a_0$, $\eta = \eta_0$, 有 $a' = \eta' = 0$ 。于是方程(14)变为

$$\frac{\beta}{2}a_0 = \frac{h}{4\omega_0}\sin\eta_0, \quad -\sigma a_0 + \frac{3\alpha a_0^3}{2\omega_0} = \frac{h}{4\omega_0}\cos\eta_0. \quad (15)$$

将上面二式平方相加, 便可得系统(14)的频率响应方程

$$\left[\frac{\beta^2}{4} + \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right)^2 \right] a_0^2 = \frac{h^2}{16\omega_0^2}. \quad (16)$$

(16)式表明, 在一定的参数区域系统(14)可有三个稳态解。这三个稳态解并不都是稳定的, 由稳定性讨论可知, 系统(14)稳态解稳定的充分必要条件是

$$\frac{\beta^2}{4} + \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) > 0. \quad (17)$$

(17)式表明, 并不是所有由(16)式定义的周期响应都是稳定的。如果由(16)式能解出三个解, 则大解和小解都是稳定的, 而中间的那个解是不稳定的。这说明对于非线性系统来说, 其受迫振动稳态解的振幅和频率与初始条件有关, 其振幅可具有多值性, 即在一定条件下同一干扰力频率对应着几个稳态周期运动, 物理上实现哪一个周期运动取决于初始条件。

下面讨论当 $\gamma \neq 0$ 的情形。由于 γ 较小, 可设方程(12)的解为

$$a = a_0 + a_1, \quad \eta = \eta_0 + \eta_1, \quad (18)$$

式中 a_0 , η_0 由(15)、(16)式确定, a_1 , η_1 为小摄动项。将(18)式代入(12)式, 忽略关于 a_1 , η_1 的高阶项可得方程(12)在点 (a_0, η_0) 的线性化方程为

$$a_1' = -\frac{\beta}{2}a_1 - \left[\alpha a_0 - \frac{3\alpha a_0^3}{2\omega_0} \right] \eta_1, \quad \eta_1' = \left[\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right] a_1 - \frac{\beta}{2}\eta_1 - \gamma W'. \quad (19)$$

方程(19)可写为相应 Itô 随机微分的方程

$$\begin{cases} da_1 = - \left[\frac{\beta}{2}a_1 + \left(\alpha a_0 - \frac{3\alpha a_0^3}{2\omega_0} \right) \eta_1 \right] dT_1, \\ d\eta_1 = \left[\left(\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right) a_1 - \frac{\beta}{2}\eta_1 \right] dT_1 - \gamma dW. \end{cases} \quad (20)$$

可用矩法^[17] 求出方程(20)的稳态解。对方程(20)两边取数学期望可得一阶稳态矩为

$$Ea_1 = E\eta_1 = 0. \quad (21)$$

由 Itô 微分法则可得方程(20)的二阶稳态矩 Ea_1^2 , $Ea_1\eta_1$, $E\eta_1^2$ 满足的方程为

$$\begin{cases} -\beta E a_1^2 - 2 \left(\alpha_{00} - \frac{3\alpha a_0^3}{2\omega_0} \right) E a_1 \eta_1 = 0, \\ \left(\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right) E a_1^2 - \beta E a_1 \eta_1 - \left(\alpha_{00} - \frac{3\alpha a_0^3}{2\omega_0} \right) E \eta_1^2 = 0, \\ -2 \left(\frac{\sigma}{a_0} - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right) E a_1 \eta_1 + \beta E \eta_1^2 = \gamma^2. \end{cases} \quad (22)$$

求解方程(22), 可得

$$\begin{cases} E a_1^2 = \frac{\left(\alpha_{00} - \frac{3\alpha a_0^3}{2\omega_0} \right)^2}{\beta^2 + 4 \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right)} \frac{\gamma^2}{\beta}, \\ E a_1 \eta_1 = - \frac{\left(\alpha_{00} - \frac{3\alpha a_0^3}{2\omega_0} \right) \gamma^2}{\beta^2 + 4 \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right)}, \\ E \eta_1^2 = \frac{\beta^2 + 2 \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right)}{\beta^2 + 4 \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right)} \frac{\gamma^2}{\beta}. \end{cases} \quad (23)$$

由(23)式可得二阶矩存在的充分必要条件是 $E a_1^2 \geq 0, E \eta_1^2 \geq 0$, 即

$$\beta^2 + 4 \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right) > 0. \quad (24)$$

条件(24)与确定性系统(14)周期解的稳定性条件(17)是相同的。(24)式还表明在一定的参数范围, 由(16)式定义的周期解的幅值 a_0 有三个解, 其中大解和小解都是稳定的, 而中间的那个解是不稳定的。当 γ 充分小时, 随机扰动项 $\gamma W(t)$ 并不影响由(16)式定义的周期解的稳定性。当 a_0 有三个解时, 由(16)和(23)式可知此时系统有三个均方响应值, 其中大的和小的都是稳定的, 而中间的那个是不稳定的。

结合(18)、(21)和(23)式可得

$$\begin{cases} E a = a_0, E a^2 = a_0^2 + E a_1^2 = a_0^2 + \frac{\left(\alpha_{00} - \frac{3\alpha a_0^3}{2\omega_0} \right)^2}{\beta^2 + 4 \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right)} \frac{\gamma^2}{\beta}, \\ E \eta = \eta_0, E \eta^2 = \eta_0^2 + E \eta_1^2 = \eta_0^2 + \frac{\beta^2 + 2 \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right)}{\beta^2 + 4 \left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{2\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0}{2\omega_0} \right)} \frac{\gamma^2}{\beta}. \end{cases} \quad (25)$$

(25)是表明随着随机扰动强度的增大系统的均方响应将增大, 而随着系统阻尼 β 的增大系统的均方响应将减小, 显然这是符合物理直觉的。

3 数值模拟

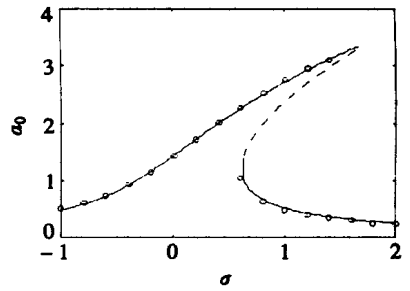
有关随机过程数值模拟的方法可见朱位秋^[17], 在本文的数值模拟中, 取参数如下

$$\alpha = 0.1, \beta = 0.3, \omega_0 = 1, h = 2, \varepsilon = 0.1.$$

用四阶龙格库特法可计算出系统(1)的响应。当 $\gamma = 0$ 即系统只受确定性谐和激励时, 对应于不同的激励频率 Ω , (16) 式给出的系统响应的振幅 a_0 的理论值与数值计算值的比较见图 1。

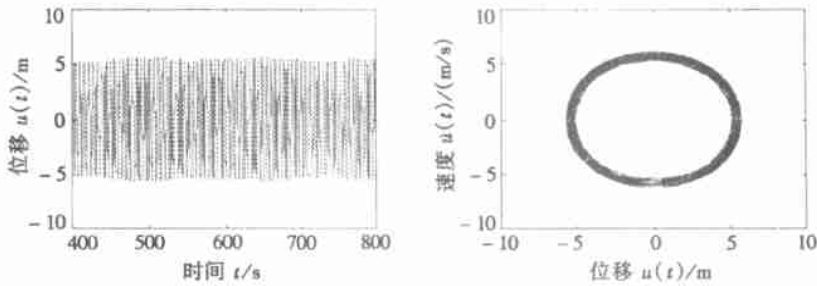
下面研究随机扰动 $\gamma W(t)$ 对系统响应的影响。取 $\sigma = 1.0$, 此时系统(14) 将有两个稳定的稳态解。当 $\gamma = 0.05$, 对应于不同的初值系统(1) 响应的时间历程图和相轨图分别见图 2 和图 3。图 2 中的初值是 $u(0) = 5.0, \dot{u} = 4.5$, 图 3 中的初值是 $u(0) = 1.0, \dot{u} = 0.5$ 。

由图 3、4 可见, 当随机扰动 $\gamma W(t)$ 较小时, 对应于不同的初值系统(1) 可有两个不同的稳态响应, 与前述理论分析的结果一致。由于随机扰动 $\gamma W(t)$ 的存在, 系统响应从一周期解变为一拟周期解, 系统的相轨也从一极限环变为一个扩散的极限环。计算表明, 随着 γ 的增大, 此扩散极限环的宽度将增大。

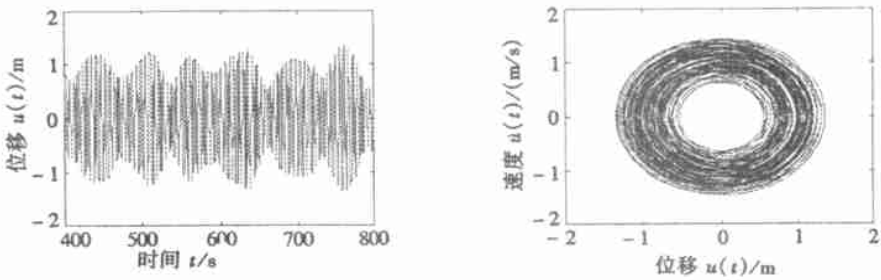


— 稳定解, — 不稳定解, $\circ\circ\circ$ 数值解

图 1 系统(1) 频率响应曲线



(a) $u(t)$ 的时间历程图 (b) 相轨图
图 2 系统(1) 的数值结果 $u(0) = 5.0, \dot{u} = 4.5$



(a) $u(t)$ 的时间历程图 (b) 相轨图
图 3 系统(1) 的数值结果 $u(0) = 1.0, \dot{u} = 0.5$

当 $\gamma = 0.01$, 对应于不同的 σ , 由(25) 式给出的系统均方响应的理论值与数值计算值的比较见图 4。

4 结论与讨论

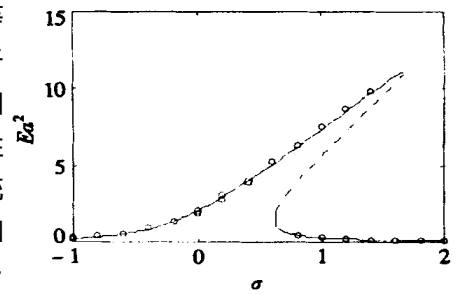
本文用多尺度法研究了 Duffing 系统在窄带随机激励下作用下系统的响应。由于所研究系统的复杂性(非线性和随机性), 精确求解很困难甚至是不可能的。事实上, 即使对于确定性的单自由度非线性系统, 大部分也不可能求出精确的解析解。只能通过各种近似方法如小

参数法、坐标变形法、多尺度法、慢变参数法、KBM法、等效线性化法、谐波平衡法、里茨-伽辽金法,等等。对于非线性随机系统,各种近似方法得到了广泛的应用,如等效线性化法和随机平均法等。随机系统的等效线性化法可看作是确定性系统的等效线性化法在随机系统中的推广,故确定性系统的其他近似方法如多尺度法和谐波平衡法可推广到随机系统的分析中去。事实上,多尺度法近些年来在随机系统中已有一些应用。在随机外激的情形, Rajan 和 Davies^[14], Nayfeh 和 Serhan^[15] 用多尺度法研究了非线性系统的响应; 本文作者^[16] 则将多尺度法推广到非线性系统的随机参激情形。本文的结果表明,多尺度法可用于非线性随机系统的分析中。

理论分析和数值模拟表明,当随机扰动 $\gamma W(t)$ 较小时,对应于不同的初值系统(1)可有两个不同的稳态响应;此时,系统响应从一周周期解变为拟周期解,系统的相轨也从一极限环变为扩散的极限环。计算表明,随着 $\gamma W(t)$ 的增大,此扩散极限环的宽度将增大。这些结论是符合物理直觉的,因为当 γ 较小时,系统(1)中的随机过程 $\xi(t)$ 的性态和确定性谐和激励项 $h \cos \Omega t$ 很接近,故在一定条件下确定性系统的一些现象如多解现象是可以存在的。Nayfeh 和 Serhan^[15] 在研究 Duffing-Rayleigh 振子在确定性谐和激励和随机激励联合作用时也得到了类似的结论,即系统存在多值解现象。

[参 考 文 献]

- [1] Den Hartog J P. Mechanical Vibrations [M]. forth edition. New York McGraw_Hill, 1956.
- [2] Lyon R H, Heckl M, Hazelgrove C B. Response of hard_spring oscillator to narrow_band excitation [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1961, **33**(4): 1404—1411.
- [3] Richard K, Anand G V. Nonlinear resonance in strings under narrow band random excitation_part I: planar response and stability[J]. Journal of Sound and Vibration, 1983, **86**(8): 85—98.
- [4] Davies H G, Nandall D. Phase plane for narrow band random excitation of a Duffing oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, **104**(2): 277—283.
- [5] Iyengar R N. Response of nonlinear systems to narrow_band excitation[J]. Structural Safety, 1989, **6**(2): 177—185.
- [6] Lennox W C, Kuak Y C. Narrow band excitation of a nonlinear oscillator[J]. Journal of Applied Mechanics, 1976, **43**(2): 340—344.
- [7] Grigoriu M. Probabilistic analysis of response of Duffing oscillator to narrow band stationary Gaussian excitation[A]. In: E H Dowell Ed. Proceedings of First Pan_American Congress of Applied Mechanics [C]. Rio de Janeiro, Brazil, 1989.
- [8] Davis H G, Liu Q. The response probability density function of a Duffing oscillator with random narrow band excitation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, **139**(1): 1—8.
- [9] Kapitaniak T. Stochastic response with bifurcations to non_linear Duffing's oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1985, **102**(3): 440—441.
- [10] Fang T, Dowell E H. Numerical simulations of jump phenomena in stable Duffing systems[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1987, **22**(2): 267—274.



— 稳定解, — 不稳定解,
 ○○○ 数值解

图4 系统(1)频率响应曲线

- [11] Zhu W Q, Lu M Q, Wu Q T. Stochastic jump and bifurcation of a Duffing oscillator under narrow_band excitation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, **165**(2): 285—304.
- [12] Wedig W V. Invariant measures and Lyapunov exponents for generalized parameter fluctuations[J]. Structural Safety, 1990, **8**(1): 13—25.
- [13] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques [M]. New York: Wiley, 1981.
- [14] Rajan S, Davies H G. Multiple time scaling of the response of a Duffing oscillator to narrow_band excitations[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, **123**(3): 497—506.
- [15] Nayfeh A H, Serhan S J. Response statistics of nonlinear systems to combined deterministic and random excitations[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1990, **25**(5): 493—509.
- [16] RONG Hai_wu, XU Wei, FANG Tong. Principal response of Duffing oscillator to combined deterministic and narrow_band random parametric excitation[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, **210**(4): 483—515.
- [17] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

Response of Nonlinear Oscillator Under Narrow_Band Random Excitation

RONG Hai_wu^{1,2}, WANG Xiang_dong¹, MENG Guang², XU Wei³, FANG Tong³

(1. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan, Guangdong 528000, P. R. China;

2. The State Key Laboratory of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200030, P. R. China;

3. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical
University, Xi'an 710072, P. R. China)

Abstract: The principal resonance of Duffing oscillator to narrow_band random parametric excitation was investigated. The method of multiple scales was used to determine the equations of modulation of amplitude and phase. The behavior, stability and bifurcation of steady state response were studied by means of qualitative analyses. The effects of damping, detuning, bandwidth and magnitudes of deterministic and random excitations were analyzed. The theoretical analyses were verified by numerical results. Theoretical analyses and numerical simulations show that when the intensity of the random excitation increases, the nontrivial steady state solution may change from a limit cycle to a diffused limit cycle. Under some conditions the system may have two steady state solutions.

Key words: principal resonance; Duffing oscillator; multiple scale method