

文章编号: 1000-0887(2003) 07-0691-08

偏心裂纹板在裂纹面受两对反平面点力的弹塑性解析解*

王 成, 吴承平

(重庆交通学院 桥梁系, 重庆 400074)

(本刊编委吴承平来稿)

摘要: 采用线场分析方法对理想弹塑性材料偏心裂纹板在裂纹面受两对反平面点力的情形进行弹塑性分析, 分析不受小范围屈服条件的限制, 求得了裂纹线附近应力场和位移场的弹塑性解析解, 裂纹线上的塑性区长度随外荷载的变化规律及有限宽板具有偏心裂纹的承载力。

关键词: 偏心裂纹; 弹塑性解析解; 两对反平面点力; 裂纹线分析

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

有限宽裂纹板的弹塑性解是弹塑性断裂力学最困难的问题这一。文[1, 2]对理想弹性 II 型准静态扩展裂纹线附近的应力和变形进行了研究, 但他们的结果受小范围屈服条件的限制。小范围屈服理论假定: 第一, 裂纹前缘塑性区很小, 塑性区外的弹性场为裂纹的线弹性奇异 K 场; 第二, 塑性区的存在使得弹性场沿裂纹线向前移动了一微小距离。因此, 文[1, 2]的结果对于塑性区不断增大的情形不再有意义。文[3, 4]对线场分析方法进行了改进, 使之不受小范围屈服条件的限制, 即弹性场和塑性场边界的匹配过程中, 塑性区应力场是裂纹线附近的通解, 弹性区应力场是精确解。文[5, 6, 7]对中心裂纹板在裂纹面受反平面集中力的情况进行了裂纹线场的弹塑性分析, 这些分析都完全放弃了采用多年的小范围屈服假定条件。

实际上偏心裂纹板的受力问题比中心裂纹板更为普遍, 研究偏心裂纹板的受力问题更有实际意义, 本文将要对理想弹塑性材料偏心裂纹板在裂纹面受两对反平面点力的问题进行分析。

1 基本方程

图 1 所示为一偏心裂纹板在裂纹面受两对反平面集中力的问题, 不为零的应力分量和位移分量分别为 τ_{xz} , τ_{yz} 和 w 。

平衡微分方程和屈服条件为:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

* 收稿日期: 2001_12_21; 修订日期: 2003_03_03

作者简介: 王成(1962—), 男, 重庆人, 教授, 博士(E-mail: wch62@ cquc. edu. cn)。

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \tag{2}$$

其中 k 为剪切屈服极限。

应变及弹塑性理论的应力应变关系为:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{4}$$

$$\tau_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} + \lambda\tau_{xz}, \tag{5}$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} + \lambda\tau_{yz}, \tag{6}$$

式中 G 为剪切弹性模量, λ 为塑性因子。

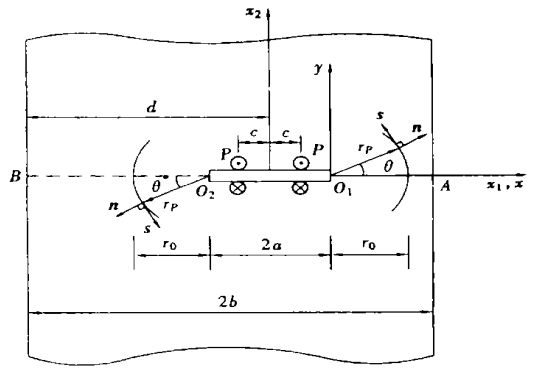


图 1 有限宽板偏心裂纹在裂纹面受两对点力及弹塑性边界

2 裂纹线附近的塑性应力场和位移场

在裂纹线 O_1A 附近的塑性区内 ($0 < x \leq r_0, y/x \ll 1$), 各场量可按泰勒级数展为下列形式:

$$\tau_{xz} = \tau_1(x)y + O(y^3), \tag{7}$$

$$\tau_{yz} = \tau_0(x) + \tau_2(x)y^2 + O(y^4), \tag{8}$$

$$\lambda = \lambda_0(x) + \lambda_2(x)y^2 + O(y^4), \tag{9}$$

$$w = w_1(x)y + O(y^3), \tag{10}$$

这里我们已经考虑了 τ_{yz}, λ 关于 $y = 0$ 的对称性和 τ_{xz}, w 关于 $y = 0$ 的反对称性。将式(7) ~ (10) 代入基本方程式(1) ~ (6), 按 y 的同次幂的系数相等得到一组方程, 解此方程组即求得 $\tau_0, \tau_1, \tau_2, w_1$ 的具体表达式, 然后将其代回式(7) ~ (10), 则得到塑性区的应力和位移分量为

$$\tau_{xz}^p = -\frac{k}{x+L}y + O(y^3), \tag{11}$$

$$\tau_{yz}^p = k - \frac{k}{2(x+L)}y^2 + O(y^4), \tag{12}$$

$$w^p = \frac{C}{x+L}y + O(y^3), \tag{13}$$

同理, 裂纹线 O_2B 附近的应力场和位移场为

$$\tau_{xz}^p = -\frac{k}{x+L}y + O(y^3), \tag{14}$$

$$\tau_{yz}^p = k - \frac{k}{2(x+L)}y^2 + O(y^4), \tag{15}$$

$$w^p = \frac{C}{x+L}y + O(y^3), \tag{16}$$

式中 L, L, C, C 为积分常数。式(11) ~ (16) 是裂纹线附近塑性区应力场的通解。

3 裂纹线附近的弹性应力场

3.1 无限大板裂纹线附近的弹性应力场

与图 1 所示的有限宽板相应的无限大板在裂纹面受两对反平面点力的问题的弹性应力场, 采用复变函数解法, 选取 Westergaard 应力函数:

$$Z_{III}(z) = \frac{2Pz \sqrt{a^2 - c^2}}{\pi(z^2 - c^2) \sqrt{z^2 - a^2}} \quad (17)$$

则弹性应力分量为

$$\tau_{xz} = \text{Im}Z_{III}(z), \quad (18)$$

$$\tau_{yz} = \text{Re}Z_{III}(z). \quad (19)$$

此解满足弹性理论的基本方程,且也满足裂纹面的边界条件和远离裂纹的远场边界条件,因此,式(18)和(19)为无限大板问题弹性应力场的精确解。

式(18)和(19)在极坐标系($z = a + re^{i\theta}$, $e \approx 2.718$)下按小 θ 的幂级数展开到裂纹线附近,得下列形式:

$$\tau_{xz} = \frac{2P \sqrt{a^2 - c^2}(a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left[\frac{r}{a+r} - \frac{a+r}{2a+r} - \frac{2r(a+r)}{(a+r)^2 - c^2} \right] \theta + O(\theta^3), \quad (20)$$

$$\tau_{yz} = \frac{2P \sqrt{a^2 - c^2}(a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left\{ 1 + \left[\frac{r(a+4r)}{(a+r)^2 - c^2} - \frac{4r^2(a+r)^2}{((a+r)^2 - c^2)^2} + \frac{a+4r}{2(2a+r)} - \frac{3}{2} \frac{(a+r)^2}{(2a+r)^2} - \frac{2r(a+r)^2}{(2a+r)((a+r)^2 - c^2)} - \frac{r}{2(a+r)} \right] \theta^2 \right\} + O(\theta^4), \quad (21)$$

式(20)和(21)在裂纹线附近足够精确。

3.2 有限宽板裂纹线附近的弹性应力场

对于偏心裂纹板,裂纹线附近的应力场显然不是(20)和(21)式,满足有限宽偏心裂纹板所有边界条件的弹性应力场目前还没有找到。但是考虑它具有和(20)和(21)式相似的表达形式。

由于裂纹偏心,裂纹 $2a$ 两边裂纹线附近的弹性应力是不同的,分别假定如下:

在裂纹线 O_1A 附近

$$\tau_{xz}^e = \frac{2Q \sqrt{a^2 - c^2}(a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left[\frac{r}{a+r} - \frac{a+r}{2a+r} - \frac{2r(a+r)}{(a+r)^2 - c^2} \right] \theta + O(\theta^3), \quad (22)$$

$$\tau_{yz}^e = \frac{2Q \sqrt{a^2 - c^2}(a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left\{ 1 + \left[\frac{r(a+4r)}{(a+r)^2 - c^2} - \frac{4r^2(a+r)^2}{((a+r)^2 - c^2)^2} + \frac{a+4r}{2(2a+r)} - \frac{3}{2} \frac{(a+r)^2}{(2a+r)^2} - \frac{2r(a+r)^2}{(2a+r)((a+r)^2 - c^2)} - \frac{r}{2(a+r)} \right] \theta^2 \right\} + O(\theta^4), \quad (23)$$

在裂纹线 O_2B 附近

$$\tau_{xz}^e = \frac{2Q \sqrt{a^2 - c^2}(a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left[\frac{r}{a+r} - \frac{a+r}{2a+r} - \frac{2r(a+r)}{(a+r)^2 - c^2} \right] \theta + O(\theta^3), \quad (24)$$

$$\tau_{yz}^e = \frac{2Q \sqrt{a^2 - c^2}(a+r)}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \left\{ 1 + \left[\frac{r(a+4r)}{(a+r)^2 - c^2} - \frac{4r^2(a+r)^2}{((a+r)^2 - c^2)^2} + \frac{a+4r}{2(2a+r)} - \frac{3}{2} \frac{(a+r)^2}{(2a+r)^2} - \frac{2r(a+r)^2}{(2a+r)((a+r)^2 - c^2)} - \frac{r}{2(a+r)} \right] \theta^2 \right\} + O(\theta^4)$$

$$\left. \frac{2r(a+r)^2}{(2a+r)((a+r)^2-c^2)} - \frac{r}{2(a+r)} \right] \theta^2 \Big\} + O(\theta^4), \quad (25)$$

其中 Q, Q 是与板宽度 $2b$, 裂纹长度 $2a$, 裂纹偏心程度 d 及点力 $2P$ 等有关的参数。 (24) 和 (25) 中的变量 r, θ 是以 O_2 为极点建立的坐标。为了确定参数 Q, Q , 必须寻找附加条件建立方程。

3.3 裂纹线上的附加条件

附加条件可以这样建立, 将有限宽偏心裂纹板沿裂纹线分为两部分, 考虑任意一部分的静力平衡条件有:

$$k(r_0 + r_0) + \int_{r_0}^{2b-d-a} (\tau_{yz}^e)_{\theta=0} dr + \int_{r_0}^{l-a} (\tau_{yz}^e)_{\theta=0} dr = 2P, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} kr_0 \left(a + \frac{1}{2} r_0 \right) + \int_{r_0}^{2b-d-a} (\tau_{yz}^e)_{\theta=0} (a+r) dr - \\ kr_0 \left(a + \frac{1}{2} r_0 \right) - \int_{r_0}^{d-a} (\tau_{yz}^e)_{\theta=0} (a+r) dr = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

将式(23)和(25)代入(26)和(27)式后, 引入无量纲变量

$$\xi = \frac{r_0}{a}, \quad \xi = \frac{r_0}{a}, \quad \eta = \frac{c}{a}, \quad m = \frac{b}{a}, \quad n = \frac{d}{a},$$

可得

$$\frac{2Q}{2ak} = \frac{t_2 r_1 + s_2 r_2}{s_1 t_2 + s_2 t_1} \pi, \quad (28)$$

$$\frac{2Q}{2ak} = \frac{t_1 r_1 - s_1 r_2}{s_1 t_2 + s_2 t_1} \pi, \quad (29)$$

其中:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2P}{2ak} - \frac{\xi + \xi}{2}, \quad r_2 = -\frac{\xi - \xi}{2} \left(1 + \frac{\xi + \xi}{2} \right), \\ s_1 &= \ln \left[\frac{\sqrt{(2m-n)^2 - \eta^2} - \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{(2m-n)^2 - \eta^2} + \sqrt{1-\eta^2}} \right] \left[\frac{\sqrt{(1+\xi)^2 - \eta^2} + \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{(1+\xi)^2 - \eta^2} - \sqrt{1-\eta^2}} \right], \\ s_2 &= \ln \left[\frac{\sqrt{n^2 - \eta^2} - \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{n^2 - \eta^2} + \sqrt{1-\eta^2}} \right] \left[\frac{\sqrt{(1+\xi)^2 - \eta^2} + \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{(1+\xi)^2 - \eta^2} - \sqrt{1-\eta^2}} \right], \\ t_1 &= \sqrt{1-\eta^2} \ln \frac{2m-n + \sqrt{(2m-n)^2 - 1}}{1 + \xi + \sqrt{\xi(2+\xi)}} + \\ &\quad \eta \left[\arctan \frac{\eta \sqrt{(2m-n)^2 - 1}}{(2m-n) \sqrt{1-\eta^2}} - \arctan \frac{\eta \sqrt{\xi(2+\xi)}}{(1+\xi) \sqrt{1-\eta^2}} \right], \\ t_2 &= \sqrt{1-\eta^2} \ln \frac{n + \sqrt{n^2 - 1}}{1 + \xi + \sqrt{\xi(2+\xi)}} + \\ &\quad \eta \left[\arctan \frac{\eta \sqrt{n^2 - 1}}{n \sqrt{1-\eta^2}} - \arctan \frac{\eta \sqrt{\xi(2+\xi)}}{(1+\xi) \sqrt{1-\eta^2}} \right], \end{aligned}$$

r_0, r_0 分别是右边和左边裂纹线上塑性区的长度, 将由弹塑性边界上的匹配条件确定。与(22)

~ (25) 式相对应的弹性位移为

$$w^e = \frac{2Q}{G} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} \theta + O(\theta^3), \quad (30)$$

$$w^e = \frac{2Q}{G} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\pi[(a+r)^2 - c^2] \sqrt{r(2a+r)}} (a+r) \theta + O(\theta^3) \quad (31)$$

4 裂纹线附近弹塑性场在弹塑性边界上的匹配

4.1 裂纹线附近的弹塑性边界

裂纹线 O_1A 附近的弹塑性边界定义为 $r = r_p(\theta)$ (裂纹线 O_2B 附近也类似), 如图 1 所示, 由 $r_p(\theta)$ 关于裂纹线的对称性, 对于一个小 θ 有^[3,4]

$$r_p(\theta) = r_0 + r_2\theta^2 + O(\theta^4) \quad (32)$$

由此可得弹塑性边界上任意一点的单位法向量 $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ 为

$$n_x = 1 - \frac{1}{2} \left[1 - 2 \frac{r_2}{r_0} \right]^2 \theta^2 + O(\theta^4), \quad (33)$$

$$n_y = \left[1 - 2 \frac{r_2}{r_0} \right] \theta + O(\theta^3) \quad (34)$$

在弹塑性边界上有

$$x = r_0 + r_0 \left[\frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2} \right]^2 \theta^2 + O(\theta^4), \quad (35)$$

$$y = r_0\theta + O(\theta^3) \quad (36)$$

4.2 匹配结果

利用 (32) ~ (36) 式, 分别求出弹性区应力场 (22) ~ (25) 式与塑性区应力场 (11)、(12)、(14) 和 (15) 式在弹塑性边界上的法向分量和切向分量的表达式, 由弹性区应力场与塑性区应力场在弹塑性边界上的连续性条件, 比较等式两端 θ 同次幂的系数得一组方程, 解这组方程可得:

$$\frac{2P}{2ak} = \frac{\xi + \bar{\xi}}{2} + \frac{u(s_1t_2 + s_2t_1) - s_2r_2}{2t_2}, \quad (37)$$

$$\frac{L}{a} = \left[\frac{(1 + \xi)(2 + \xi)\rho^2}{\rho^2 + 2\xi(1 + \xi)^2(2 + \xi)} - 1 \right] \xi \quad (38)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{\rho^2 + 2\xi(1 + \xi)^2(2 + \xi)}{2(1 + \xi)(2 + \xi)\rho^2} + \frac{(1 + \xi)(2 + \xi)\rho^2}{\rho^2 + 2\xi(1 + \xi)^2(2 + \xi)} \left[\frac{\xi(1 + 4\xi)}{\rho^2} - \frac{4\xi^2(1 + \xi)^2}{\rho^4} + \frac{1 + 4\xi}{2(2 + \xi)} - \frac{3(1 + \xi)^2}{2(2 + \xi)^2} - \frac{2\xi(1 + \xi)^2}{(2 + \xi)\rho^2} - \frac{\xi}{2(1 + \xi)} \right], \quad (39)$$

$$\frac{2P}{2ak} = \frac{\xi + \bar{\xi}}{2} + \frac{u(s_1t_2 + s_2t_1) + s_1r_2}{2t_1}, \quad (40)$$

$$\frac{L}{a} = \left[\frac{(1 + \xi)(2 + \xi)\rho^2}{\rho^2 + 2\xi(1 + \xi)^2(2 + \xi)} - 1 \right] \bar{\xi}, \quad (41)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{\rho^2 + 2\xi(1 + \xi)^2(2 + \xi)}{2(1 + \xi)(2 + \xi)\rho^2} + \frac{(1 + \xi)(2 + \xi)\rho^2}{\rho^2 + 2\xi(1 + \xi)^2(2 + \xi)} \left[\frac{\bar{\xi}(1 + 4\bar{\xi})}{\rho^2} - \frac{4\bar{\xi}^2(1 + \bar{\xi})^2}{\rho^4} + \frac{1 + 4\bar{\xi}}{2(2 + \bar{\xi})} - \frac{3(1 + \bar{\xi})^2}{2(2 + \bar{\xi})^2} - \frac{2\bar{\xi}(1 + \bar{\xi})^2}{(2 + \bar{\xi})\rho^2} - \frac{\bar{\xi}}{2(1 + \bar{\xi})} \right], \quad (42)$$

其中

$$u = \frac{\rho^2 \sqrt{\xi(2 + \xi)}}{\sqrt{1 - \eta^2(1 + \xi)}}, \quad \bar{u} = \frac{\rho^2 \sqrt{\bar{\xi}(2 + \bar{\xi})}}{\sqrt{1 - \eta^2(1 + \bar{\xi})}},$$

$$\rho^2 = (1 + \xi)^2 - \eta^2, \quad \bar{\rho}^2 = (1 + \bar{\xi})^2 - \eta^2.$$

4.3 对结果的讨论

1) 通过(37)和(40)式可确定两端裂纹线上的塑性区相对长度 ξ 和 ξ_2

2) 式(38)和(41)确定了塑性区应力场和位移场(11)~(16)式中的积分常数 L 。但是,当 $L \leq 0$ 时,则可能出现奇异性,这种奇异性与传统意义或小范围屈服意义下的奇异性有本质的不同,因它不一定出现在裂纹的尖端处,这必然是裂纹开始起裂扩展或失稳扩展。此外, $L < 0$ 在裂尖附近应变出现负值,是实际不可能的情况。因此,本文要求 $L \geq 0$ 。如果 $2m - n - 1$ 的值不是很小,则由(38)式可确定裂纹线上的与荷载位置有关的最大塑性区长度见表1。

3) 显然,如果 $2m - n - 1$ 的值小于表1中的 ξ_{\max} , 那么 $\xi_{\max} = 2m - n - 1$ 。

表1 裂纹线上的最大塑性区长度

η	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
ξ_{\max}	0.618	0.613	0.596	0.567	0.527	0.472	0.404	0.319	0.218	0.108

4) 式(39)和(42)结合式(32)~(34)可以估计裂纹两端裂纹线附近塑性区的形状,即裂纹线附近弹塑性边界的形状。

5) 图2表示在几种不同的板宽 $m = b/a$ 、裂纹偏心程度 $n = d/a$ 和荷载位置 $\eta = c/a$ 时,无量纲点力与裂纹线上塑性区相对长度之间的关系。

6) 图3表示在几种不同板宽 $m = b/a$ 和荷载位置 $\eta = c/a$ 时,裂纹的偏心程度 $n = d/a$ 与承载力 $2P_{\max}/(2ak)$ 之间的关系曲线。

7) 利用弹性位移与塑性区位移在弹塑性边界上的连续性可得出(13)和(16)式中的积分常数 C, C_1 ,从而得出塑性区内的应变。

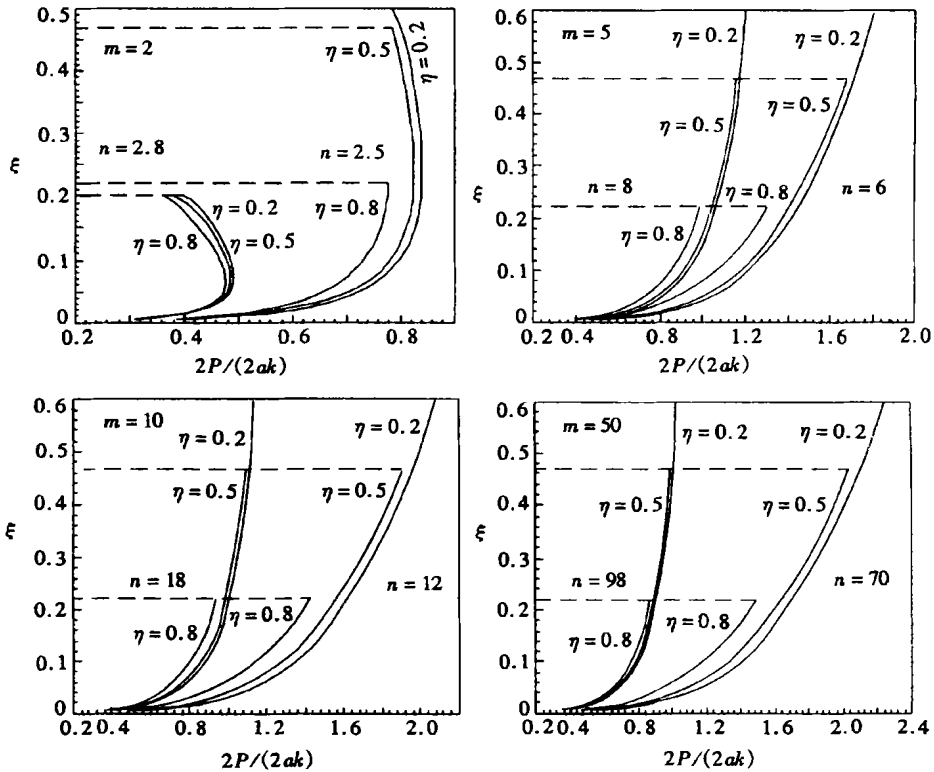


图2 在不同 η, m 和 n 值下 ξ 随 $2P/(2ak)$ 的变化关系

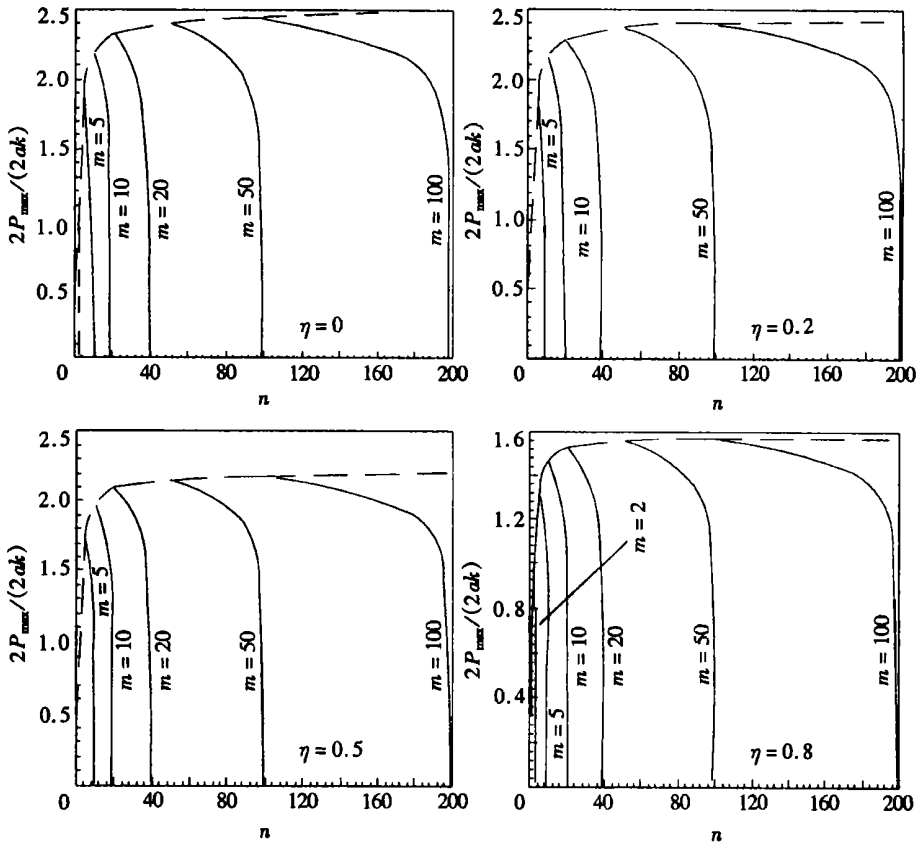


图3 在不同 η 和 m 值下 $2P_{max}/(2ak)$ 随 n 的变化关系

5 结 论

1) 本文的分析完全放弃了小范围屈服理论的近似假定, 本文结果在裂纹线附近足够精确。

2) 塑性区应力场和位移场的表达式中由于有积分常数 L , 使在裂尖附近 ($x \rightarrow 0$) 不存在奇异性。

3) 从式(37)和(40)以及图2知, 当相对板宽 $m = b/a$ 小于2时, 偏心裂纹板的整体受力呈现明显的软化性质。

4) 如果 $2m - n - 1$ 的值不是很小, 对于不同的荷载位置 $\eta = c/a$ 值, 偏心裂纹板具有不同的裂纹线上的最大塑性区长度(见表1)和承载力。

5) 当 $2m - n - 1$ 小于表1中的 ξ_{max} 值时, $\xi_{max} = 2m - n - 1$, 这时有限宽偏心裂纹板的承载力为 $(2P)_{max} = 2ak(2m - n - 1)$ 。

6) 从图3可知, 虚线表示中心裂纹 ($m = n$) 板的承载力随板宽的变化。实线表示不同板宽时板的承载力与裂纹偏心程度的关系, 随着裂纹偏心程度 n 的增大, 板的承载力迅速降低。

[参 考 文 献]

[1] Achenbach J D, Li Z L. Plane stress crack line fields for crack growth in an elastic perfectly plastic material[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1980, 20(3): 534—544.
 [2] GUO Quan_xin, LI Ke_rong. Plastic deformation ahead of a plane stress tensile crack growth in an e-

- lastic perfectly plastic solid[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, **28**(2): 139—146.
- [3] 易志坚. 理想弹塑性 III 型扩展裂纹的全新和精确分析[J]. *应用数学和力学*, 1993, **14**(4): 327—333.
- [4] YI Zhi_jian. The most recent solutions of near crack line field for mode III cracks[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, **47**(1): 147—155.
- [5] 吴承平, 王成. 裂纹面任意点受反平面集中力时裂纹线场的弹塑性分析[J]. *应用数学和力学*, 1996, **17**(12): 1059—1064.
- [6] 王成, 张录坤. 有限宽板在裂纹面受两对反平面集中力时裂纹线场的弹塑性分析[J]. *应用数学和力学*, 1998, **19**(6): 513—520.
- [7] 王成. 有限宽中心裂纹板在裂纹面受一对偏心反平面集中力的弹塑性分析[J]. *工程力学*, 2000, **17**(4): 86—93.

Elastic_Plastic Analytical Solutions For an Eccentric Crack Loaded by Two Pairs of Anti_Plane Point Forces

WANG Cheng, WU Cheng_ping

(Bridge Department, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China)

Abstract: The improved near crack line analysis method was used to investigate an eccentric cracked plate loaded by two pairs of anti_plane point forces at the crack surface in an elastic perfectly plastic solid. The analytical solutions of the elastic plastic stress fields and displacements near the crack line have been found without the assumptions of the small scale yielding. The law that the length of the plastic zone along the crack line is varied with an external loads and the bearing capacity of an eccentric cracked plate are obtained.

Key words: eccentric cracked plate; near crack line analysis; two pairs of anti_plane point forces; elastic plastic analytical solutions